Использование методов неявного перебора для решения экстремальных задач на графах

Лекция 8

Поиск минимальных разрезов на взвешенных ориентированных сильносвязных графах с помощью МВГ

СОДЕРЖАНИЕ:

Часть 1. Текущий контроль

Решить три задачи, пользуясь методом типа ветвей и границ, осуществляющим фронтальный поиск по дереву ветвлений:

1. Решить задачу о минимальном разрезе на графе G(X,U), заданном матрицей М1, если для вычисления оценки используется «наивный» метод.	2. Решить задачу о минимальном разрезе на графе, заданном матрицей М2, если для вычисления оценки используется уточненный метод на базе циркуляции.	3. Решить замкнутую задачу коммивояжера на графе, заданном матрицей М3, если для вычисления оценки используется «наивный» метод.

М1 М2 М3

ЧАСТЬ 2: МЕТОДЫ ТИПА ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

Две обязательные компоненты методов типа ветвей и границ:

- Построение дерева ветвления (выбор стратегии ветвления).
- Выбор методов вычисления оценок (зависит от специфики задачи).

ИДЕЯ МЕТОДОВ ТИПА ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

1. **Все множество планов решаемой задачи разбивается на ряд подмножеств.**
2. **Для планов каждого подмножества вычисляется наилучшая оценка.**
3. **На основании оценок отбрасываются те подмножества планов, которые заведомо не могут содержать наилучшего решения, а оставшиеся исследуются.**

СТРАТЕГИИ ВЕТВЛЕНИЯ

Приняты две основные стратегии построения дерева ветвлений:

- **Фронтальный спуск по дереву ветвлений.**
- **Движение по дереву ветвлений с возвратом.**

ЧАСТЬ 3

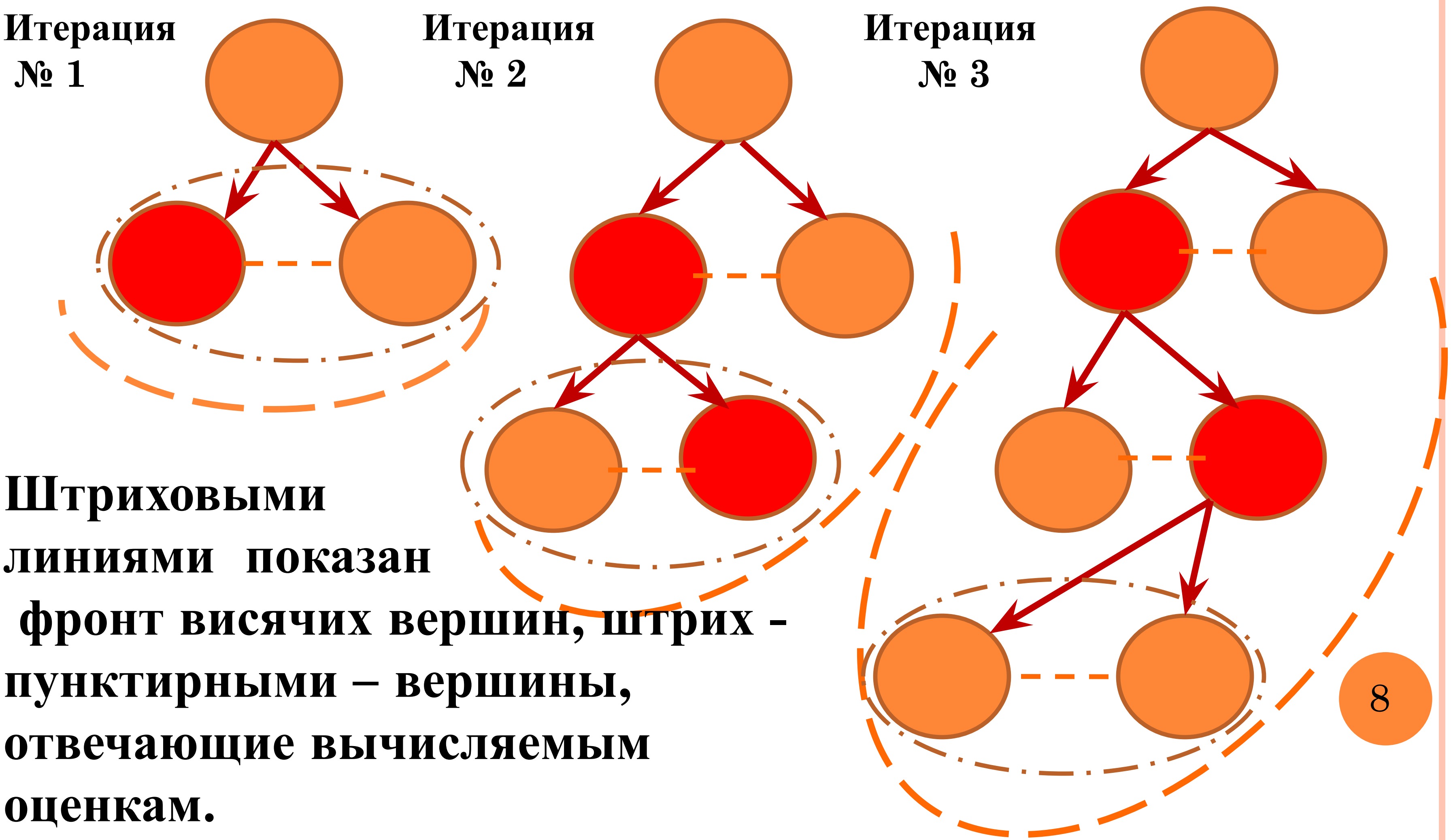
МЕТОДЫ ТИПА ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ, ОСУЩЕСТВЛЯЮЩИЕ ПОИСК МИНИМАЛЬНОГО РАЗРЕЗА НА БИСВЯЗНОМ ГРАФЕ ФРОНТАЛЬНЫМ СПУСКОМ ПО ДЕРЕВУ ВЕТВЛЕНИЙ

ИДЕЯ ФРОНТАЛЬНОГО СПУСКА ПО ДЕРЕВУ ВЕТВЛЕНИЙ

Три основных шага построения дерева ветвлений фронтальным спуском:

1. **На множестве висячих вершин построенной части дерева выбирается вершина с наилучшей оценкой.**
2. **Ветвление осуществляется из вершины, выбранной на предыдущем шаге.**
3. **Если выбранной вершине отвечает случай, когда в базис введены все переменные, то алгоритм закончен – оптимальный план найден.**

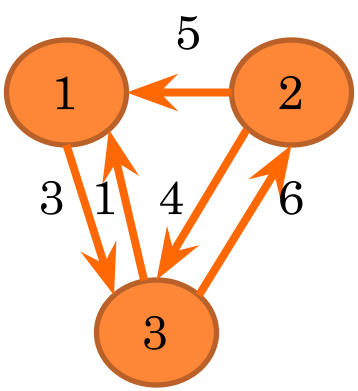
ИЛЛЮСТРАЦИЯ К РЕАЛИЗАЦИИ ФРОНТАЛЬНОГО СПУСКА ПО ДЕРЕВУ ВЕТВЛЕНИЙ



Штриховыми линиями показан фронт висячих вершин, штрих - пунктирными – вершины, отвечающие вычисляемым оценкам.

ПРИМЕР № 1: ПОИСК МИНИМАЛЬНОГО РАЗРЕЗА В БИСВЯЗНОМ ОРГРАФЕ -ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

- Исходный граф G(X,U):



Формальная постановка задачи:

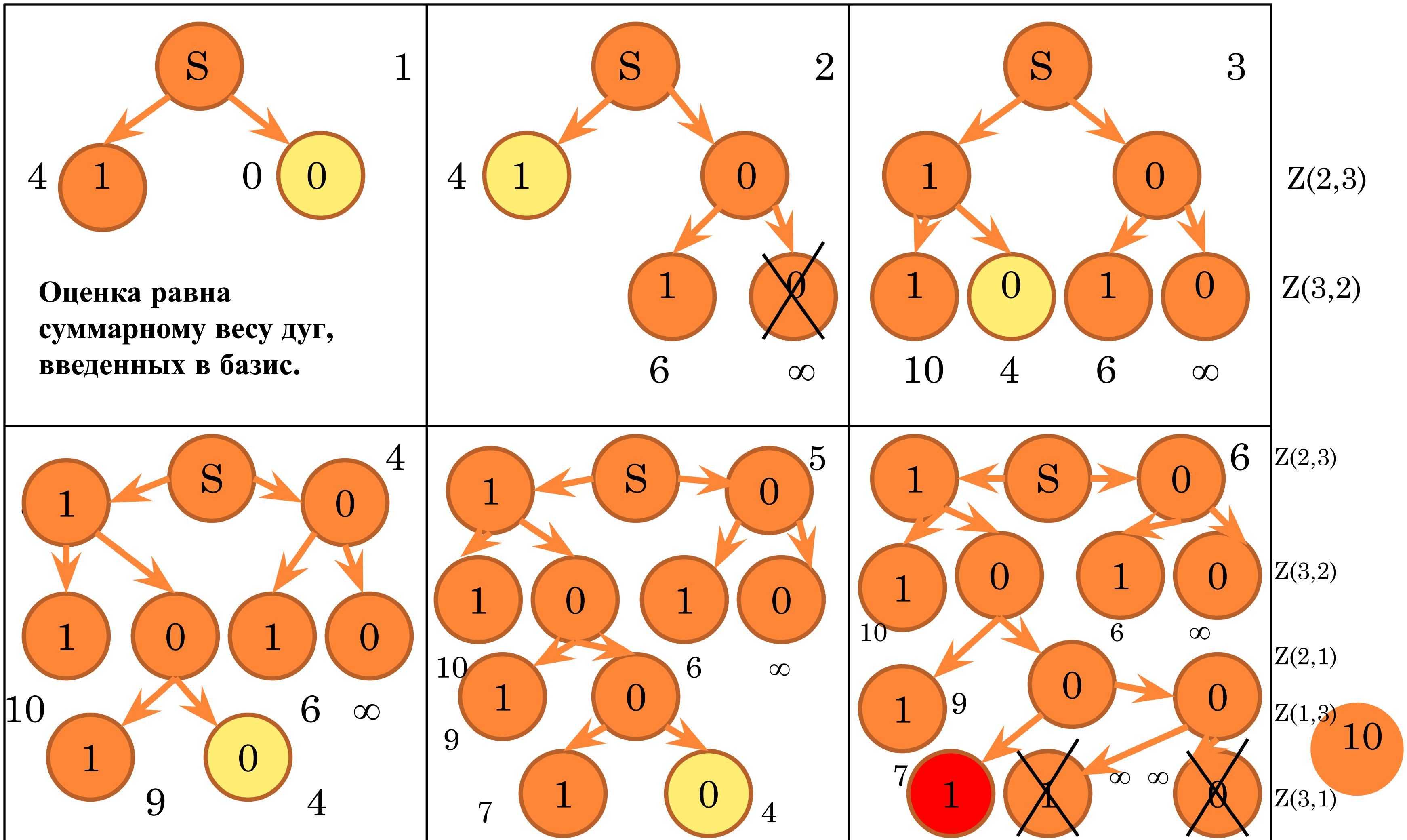
$$\begin{cases} 3z(1,3)+5z(2,1)+4z(2,3)+6z(3,2)+z(3,1)\to \min; \\ z(1,3)+z(3,1)\ge 1; \\ z(2,3)+z(3,2)\ge 1; \\ z(1,3)+z(3,2)+z(2,1)\ge 1; \\ \forall i\ne j: z(i,j)=1,0; \\ \forall i=j: z(i,j)=0. \end{cases}$$

Контуры на графе G(X,U):
$A_1=\{1,3,1\}$;
$A_2=\{2,3,2\}$;
$A_3=\{1,3,2,1\}$.

<u>Способ вычисления оценки</u> $\Delta:\Delta=\sum_{(i,j)\in I} r(i,j)z(i,j)$,

где I – подмножество дуг, введенных в базис.

ПРИМЕР № 1: ПОИСК МИНИМАЛЬНОГО РАЗРЕЗА В БИСВЯЗНОМ ОРГРАФЕ – ПОСТРОЕНИЕ ДЕРЕВА ВЕТВЛЕНИЙ



ПАРАМЕТРЫ ПОИСКА РЕШЕНИЯ В ПРИМЕРЕ 1

- Число вычисленных оценок: 12.
- Число итераций: 6.
- Число операций сравнения: 21

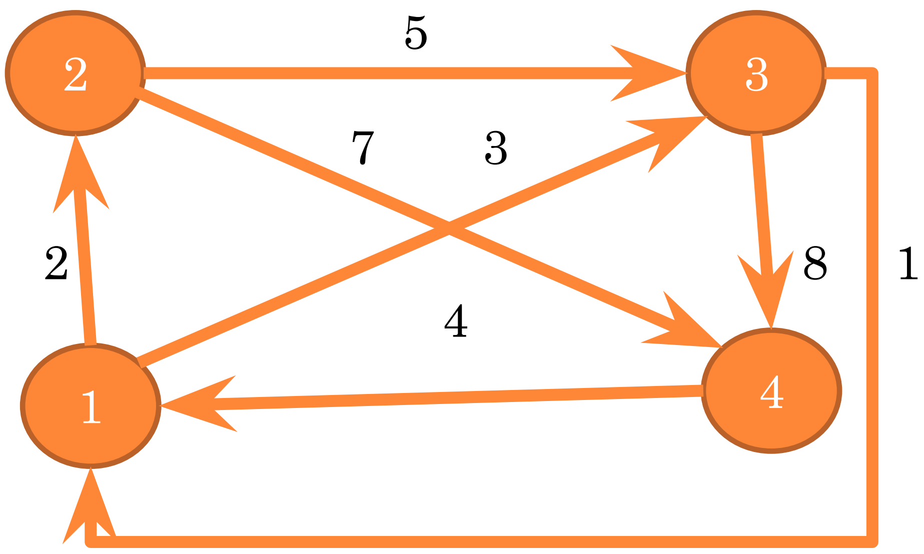
Достоинства и недостатки фронтального спуска по дереву ветвлений

- **Достоинства:** шанс на неполный перебор, первый же полный допустимый план является глобально оптимальным.
- **Недостатки:** по мере спуска по дереву ветвлений растет:

1) число оценок, хранимых в памяти;
2) затраты времени на их сравнение при выборе направления спуска.

САМОСТОЯТЕЛЬНО

Определить минимальный разрез на сильносвязном орграфе G(X,U), пользуясь методом типа ветвей и границ, осуществляющим фронтальный спуск по дереву ветвлений:



ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЦИРКУЛЯЦИЙ ДЛЯ УТОЧНЕНИЯ ОЦЕНКИ

Теорема В.Н. Буркова: Величина максимальной циркуляции не превышает величины минимального разреза.

Пусть: U' – подмножество удаляемых из графа G(X,U) дуг; G'(X,U\U') – граф, полученный после удаления дуг подмножества U'; S(G') – некоторая циркуляция на G'(X,U'); Δ(G') – нижняя граница величины разреза, включающего дуги подмножества U'.

Тогда справедливо:

$$\Delta(G') = \sum_{(i,j)\in U'} r(i,j) + S(G').$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ МАКСИМАЛЬНОЙ ЦИРКУЛЯЦИИ НА ГРАФЕ G(X,U)

- Формальная постановка задачи определения S(G'):

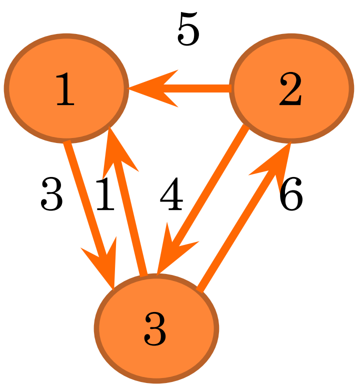
$$\begin{cases} \sum\limits_{a_k \in A(G')} s(a_k) \to \max; \\ \forall (i,j) \in U \setminus U': \quad \sum\limits_{a_k \in A(i,j)} s(a_k) \le r(i,j); \\ \forall a_k \in A(G'): s(a_k) \ge 0, \end{cases}$$

- Контуры на графе:
- $a_1 = \{1,3,1\}$;
- $a_2 = \{2,3,2\}$;
- $a_3 = \{1,3,2,1\}$.

- где a_k- k – й контур множества A(G');
- *r(i,j)* – пропускная способность дуги *(i,j)*;
- s(a_k)- циркуляция в контуре a_k;
- *A(i,j)* – множество контуров, проходящих через дугу *(i,j)*.

ПОИСК МАКСИМАЛЬНОЙ ЦИРКУЛЯЦИИ НА ОРГРАФЕ G(X,U)

- Исходный граф G(X,U):



Формальная постановка задачи:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \to \max; \\ x_1 + x_3 \le 3; \\ x_2 + x_3 \le 6; \\ 0 \le x_1 \le 1; \\ 0 \le x_2 \le 4; \\ 0 \le x_3 \le 3. \end{cases} \qquad (1)$$

Контуры на графе G(X,U):

$A_1 = \{1,3,1\}$;

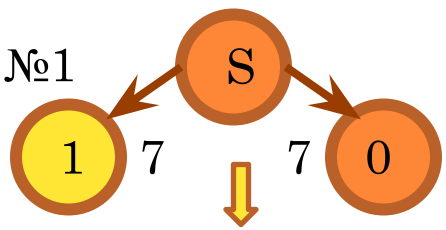
$A_2 = \{2,3,2\}$;

$A_3 = \{1,3,2,1\}$.

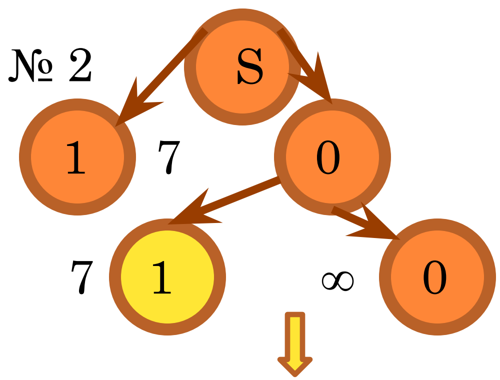
Решение системы (1) симплекс методом:

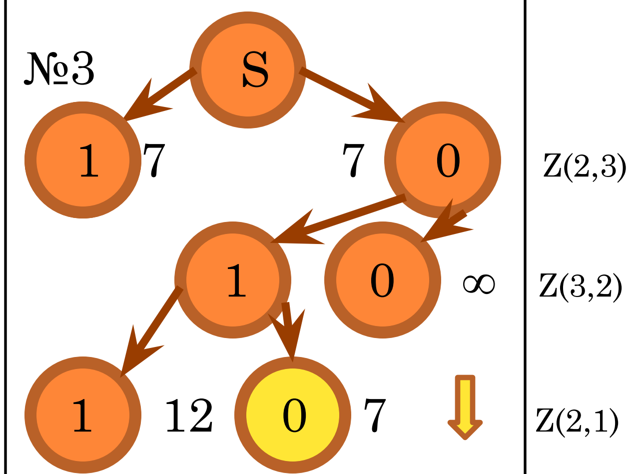
$$x_1 = 1; x_2 = 4; x_3 = 2; S_{\max} = 7.$$

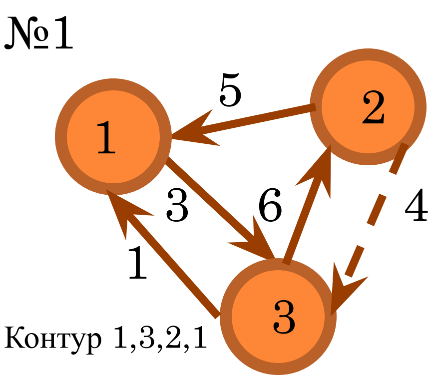
ПРИМЕР № 2: ПОИСК МИНИМАЛЬНОГО РАЗРЕЗА В БИСВЯЗНОМ ОРГРАФЕ – НАЧАЛО ПОСТРОЕНИЯ ДЕРЕВА ВЕТВЛЕНИЙ И ВЫЧИСЛЕНИЕ ОЦЕНОК С УЧЕТОМ ЦИРКУЛЯЦИЙ НА ГРАФЕ ПРИМЕРА 1.



Оценка равна суммарному весу дуг, введенных в базис плюс максимальная циркуляция на G(X,U\I)

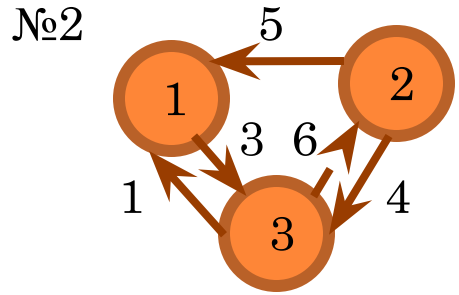






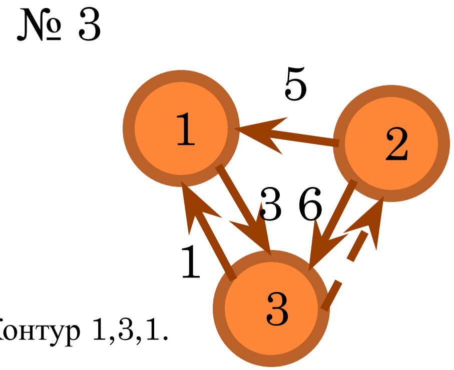
Контур 1,3,2,1

Максимальная циркуляция на графе G(X,U\(2,3)) равна 3, оценка равна Δ = 3+4=7.



Контур 1,3,1.

Максимальная циркуляция на графе G(X,U\(3,2)) равна 1, оценка равна Δ = 1+6=7.

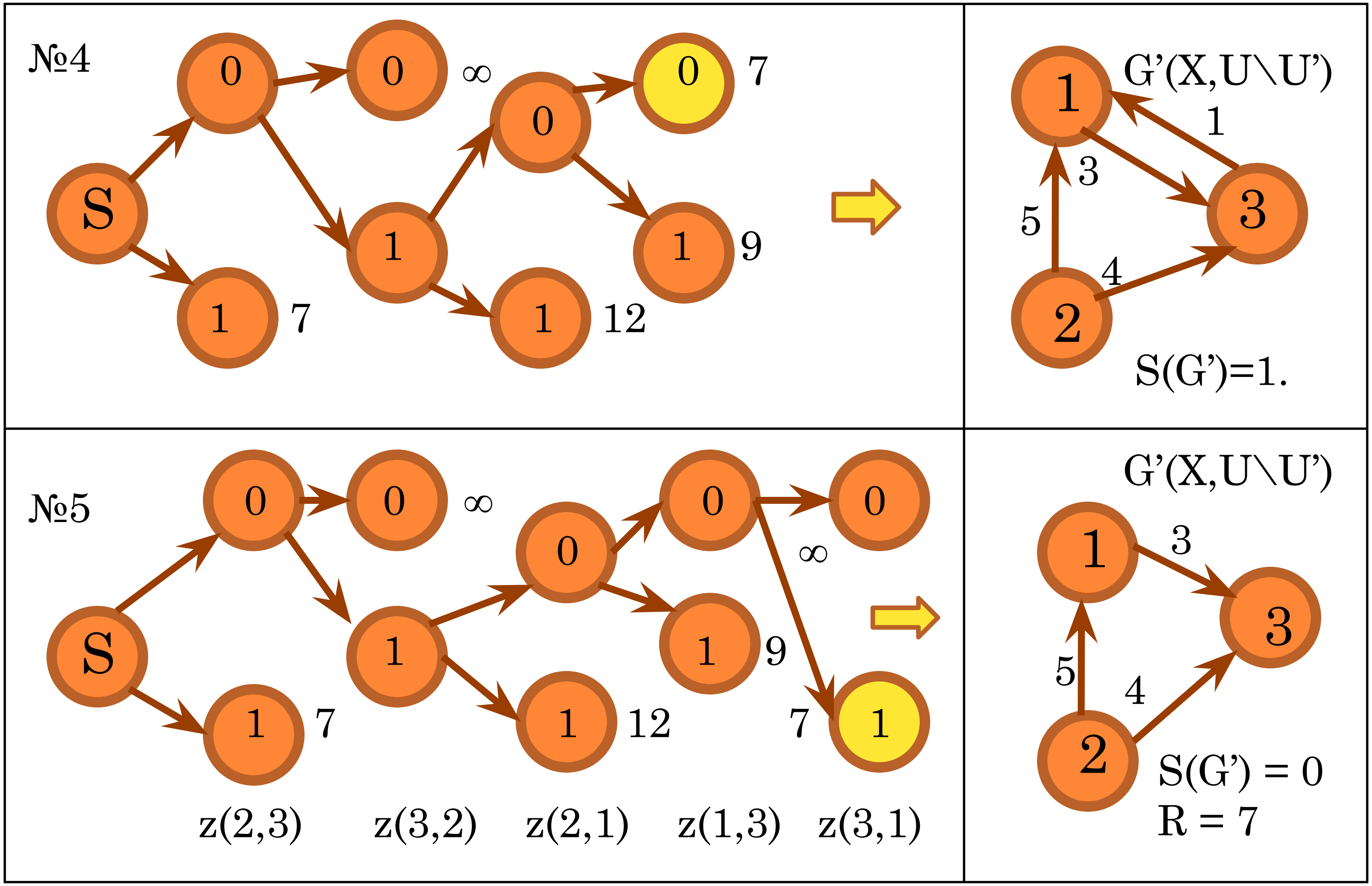


Контур 1,3,1.

Максимальная циркуляция на графе G(X,U\(3,2)) равна 1, оценка равна Δ = 1+6=7.

.

ПРИМЕР № 2: ЗАВЕРШЕНИЕ ПОИСКА МИНИМАЛЬНОГО РАЗРЕЗА В БИСВЯЗНОМ ОРГРАФЕ – ПОСТРОЕНИЕ ДЕРЕВА ВЕТВЛЕНИЙ И ВЫЧИСЛЕНИЕ ОЦЕНОК С УЧЕТОМ ЦИРКУЛЯЦИЙ НА ГРАФЕ ПРИМЕРА 1.



ПАРАМЕТРЫ ПОИСКА РЕШЕНИЯ В ПРИМЕРЕ 2 (ВЫЧИСЛЕНИЕ УТОЧНЕННЫХ ОЦЕНОК)

- Число вычисленных оценок: 10.
- Число итераций: 5.
- Число операций сравнения: 5.

ДОСТОИНСТВА И НЕДОСТАТКИ ФРОНТАЛЬНОГО СПУСКА

- **Достоинства:**

  - гарантия глобально оптимального решения;

  - первый же выбранный полный план отвечает минимальному разрезу.

- **Недостатки:**

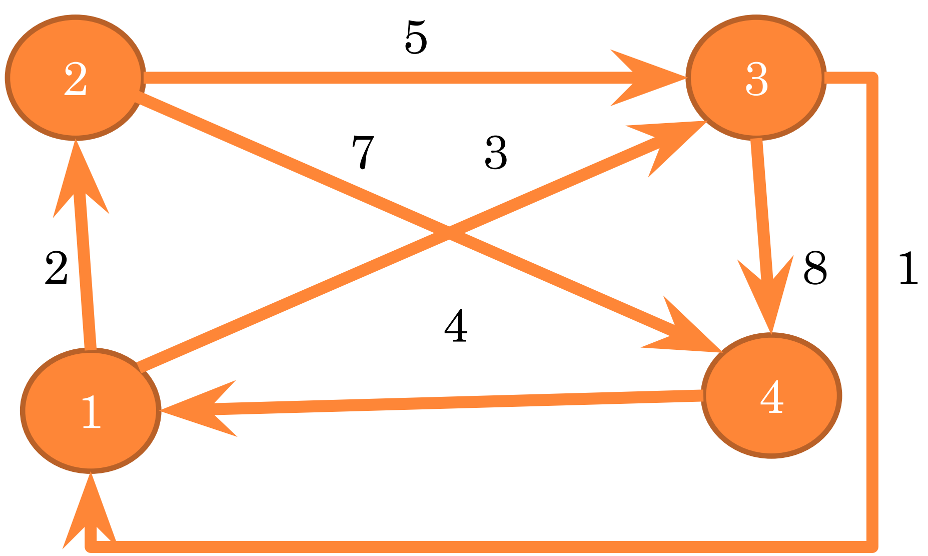
  - высокие требования к памяти используемого компьютера;

  - большие затраты времени на сравнение оценок.

САМОСТОЯТЕЛЬНО

Определить минимальный разрез на сильносвязном орграфе G(X,U), пользуясь: а) методом типа ветвей и границ, осуществляющим фронтальный спуск по дереву ветвлений;

б) задачей о максимальной циркуляции для вычисления оценок.



Решить самостоятельно, пользуясь МВГ, реализующим фронтальный спуск по дереву ветвлений

1

0	7	2
3	0	1
4	5	0

2

0	1	4
8	0	7
3	2	0

3

0	5	1
9	0	10
2	4	0

4

0	1	10
5	0	3
6	2	0

5

0	7	1
2	0	5
8	4	0

6

0	2	8
7	0	3
1	4	0

7

0	4	3
5	0	9
6	6	0

8

0	9	6
8	0	5
7	4	0

9

0	2	3
5	0	4
6	7	0

10

0	7	6
8	0	4
9	3	0

11

0	11	4
5	0	7
6	12	0

12

0	3	9
8	0	1
2	7	0

13

0	12	1
2	0	11
10	3	0

14

0	17	16
8	0	14
9	2	0

15

0	11	14
5	0	17
16	13	0

16

0	13	10
18	0	2
12	17	0

17

0	3	4
6	0	5
7	8	0

18

0	4	5
7	0	6
8	9	0

19

0	9	12
3	0	15
14	11	0

20

0	16	13
11	0	5
15	20	0

21

0	7	8
10	0	9
11	12	0

22

0	9	10
12	0	11
13	14	0

23

0	15	18
9	0	21
20	17	0

24

0	23	30
18	0	12
22	27	0

ЧАСТЬ 4

МЕТОДЫ ТИПА ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ, ОСУЩЕСТВЛЯЮЩИЕ ПОИСК МИНИМАЛЬНОГО РАЗРЕЗА НА БИСВЯЗНОМ ГРАФЕ ДВИЖЕНИЕМ ПО ДЕРЕВУ ВЕТВЛЕНИЙ С ВОЗВРАТОМ

ОСНОВНЫЕ ЭТАПЫ СТРАТЕГИИ ПОИСКА МИНИМАЛЬНОГО РАЗРЕЗА НА ДЕРЕВЕ ВЕТВЛЕНИЙ С ВОЗВРАТОМ

1. **В памяти компьютера постоянно присутствуют две величины: одна оценка Δ выбранного направления движения и текущее значение рекорда R.**
2. **Если Δ меньше R, то осуществляется спуск по дереву ветвлений (расширение базиса), в противном случае – подъем (последняя введенная в базис переменная покидает его).**
3. **Поиск завершается, когда алгоритм возвращается в стартовую вершину.**

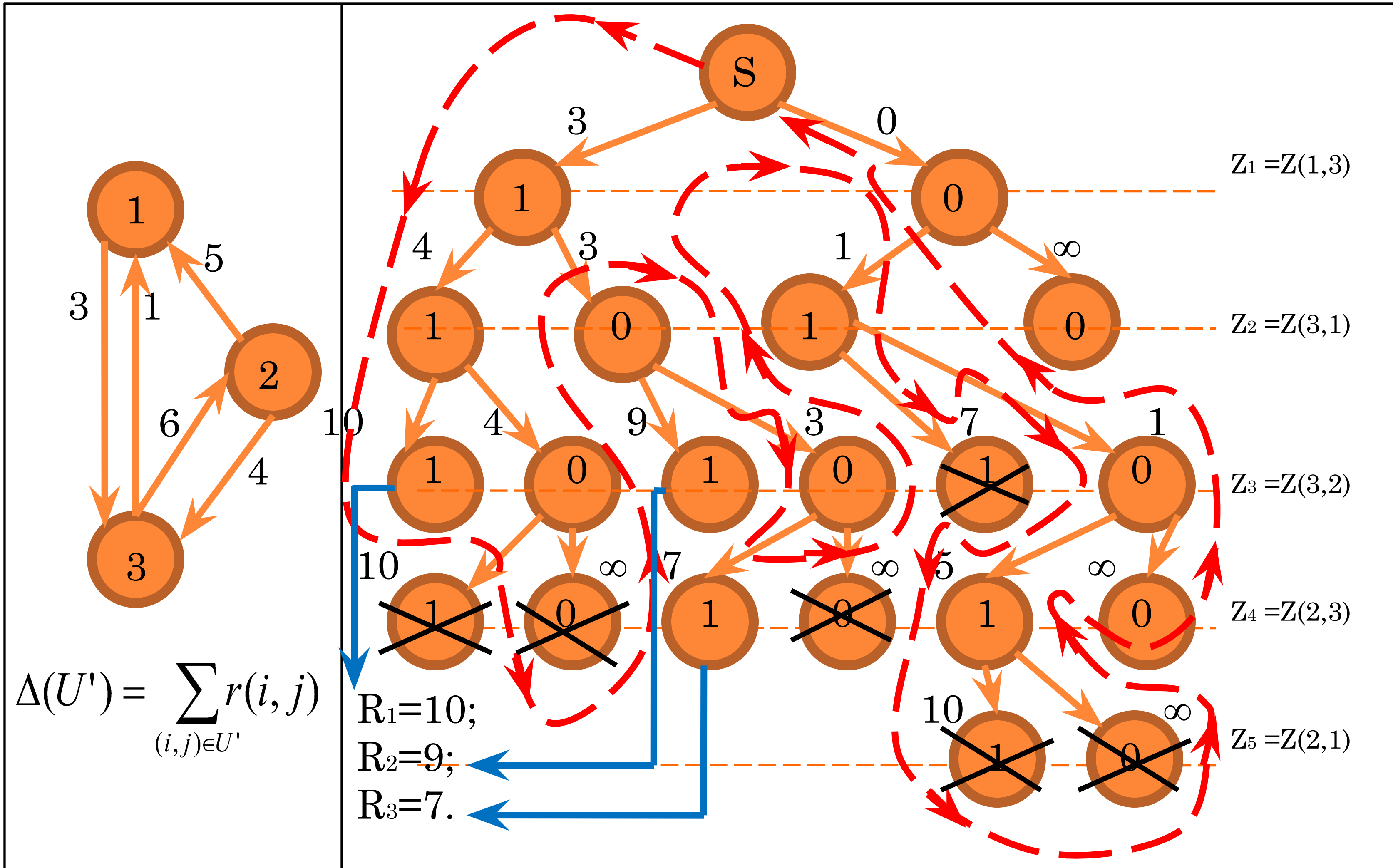
АЛГОРИТМ ПОИСКА МИНИМАЛЬНОГО РАЗРЕЗА НА БИСВЯЗНОМ ГРАФЕ МЕТОДОМ ТИПА ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ, ОСУЩЕСТВЛЯЮЩИЙ ДВИЖЕНИЕ ПО ДЕРЕВУ ВЕТВЛЕНИЙ С ВОЗВРАТОМ – ШАГИ 1 – 7.

- **Шаг 1.** R = +∞
- **Шаг 2.** Каждой дуге $(p,q) \in U$ графа G(X,U) присваивается уникальный индекс i (0<i<|U|+1) и переменная z_i .
- **Шаг 3.** i = 1
- **Шаг 4.** z_i = 1
- **Шаг5.** Одним из рассмотренных в части 1 методов вычисляется оценка Δ.
- **Шаг 6.** Если Δ < R, то перейти к **шагу 7**, нет – к **шагу 10**
- **Шаг 7.** Если все ограничения удовлетворяют, то
- перейти к **шагу 8**, нет **к шагу 10**.

ПРОДОЛЖЕНИЕ АЛГОРИТМА ПОИСКА МИНИМАЛЬНОГО РАЗРЕЗА НА БИСВЯЗНОМ ГРАФЕ МЕТОДОМ ТИПА ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ, ОСУЩЕСТВЛЯЮЩИМ ДВИЖЕНИЕ ПО ДЕРЕВУ ВЕТВЛЕНИЙ С ВОЗВРАТОМ – ШАГИ 8 – 15.

- **Шаг 8.** Если i = n, то перейти к **шагу 9**, нет – к **шагу 14**
- **Шаг 9.** R = F, печать R и вектора
- **Шаг 10.** Если $z_i = 1$, то перейти к **шагу 11,** нет – к **шагу 13.**
- **Шаг 11.** $z_i = 0$, перейти к **шагу 5.**
- **Шаг 12.** Если i = 1, то перейти к **шагу 15,** нет к **шагу 13.**
- **Шаг 13.** i = i - 1, перейти к **шагу 10.**
- **Шаг 14.** i = i + 1, перейти к **шагу 4.**
- **Шаг 15.** Конец алгоритма. Последние выданные на печать значения R и вектор переменных, оптимальны.

ПРИМЕР 3: ИСПОЛЬЗОВАНИЕ «ГРУБЫХ» МЕТОДОВ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОЦЕНОК



$$\Delta(U') = \sum_{(i,j)\in U'} r(i,j)$$

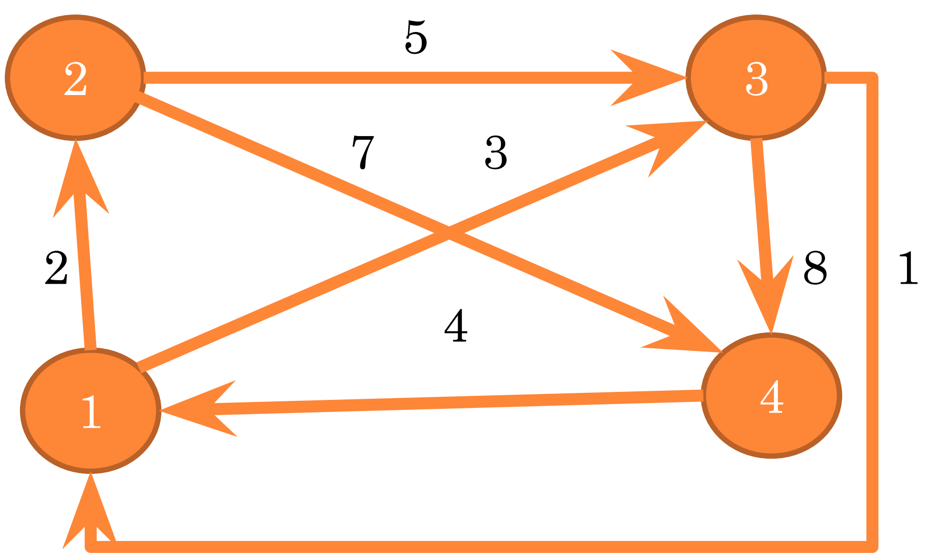
$R_1=10;$
$R_2=9;$
$R_3=7.$

ИТОГИ ПОИСКА РЕШЕНИЯ В ПРИМЕРЕ 3

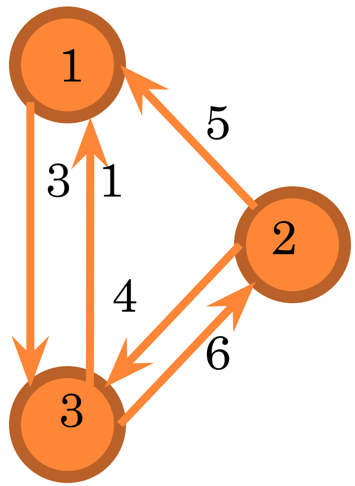
- Число вычисленных оценок – 20
- Число итераций – 20
- Число операций сравнения - 20

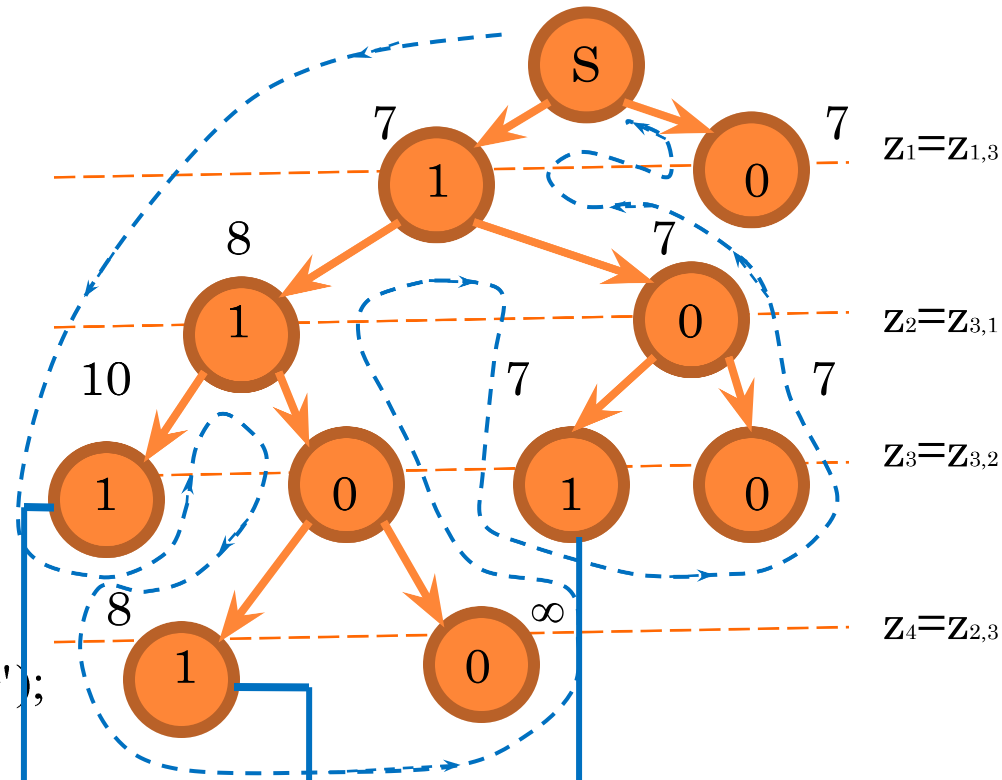
САМОСТОЯТЕЛЬНО

Определить минимальный разрез на сильносвязном орграфе G(X,U), пользуясь методом типа ветвей и границ, осуществляющим поиск с возвратом по дереву ветвлений с «наивным» методом вычисления оценки.



ПРИМЕР 4: ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЦИРКУЛЯЦИЙ ДЛЯ УТОЧНЕНИЯ ОЦЕНКИ





$$\begin{cases} \Delta(U') = \sum\limits_{(i,j)\in U'} r(i,j) + S(G'); \\ G' = G(X, U \setminus U') \end{cases}$$

$R_1 = 10;$

$R_2 = 8;$

$R_3 = 7.$

ИТОГИ ПОИСКА РЕШЕНИЯ В ПРИМЕРЕ 4

- Число вычисленных оценок – 10
- Число итераций – 10
- Число операций сравнения - 10

ДОСТОИНСТВА И НЕДОСТАТКИ СТРАТЕГИИ, РЕАЛИЗУЮЩЕЙ ПОИСК С ВОЗВРАТОМ

Достоинства:

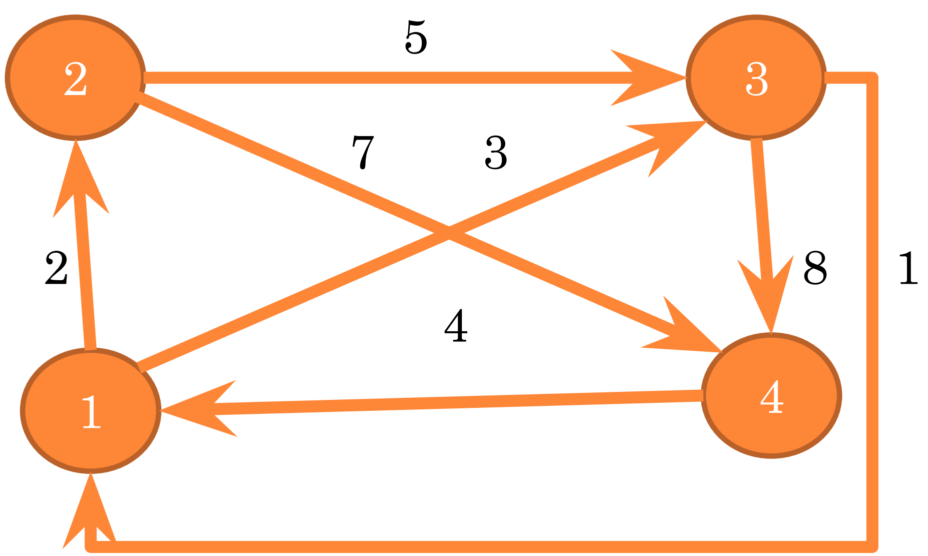
- **гарантия глобально оптимального решения;**
- **возможность прервать поиск и получить локально оптимальное решение;**
- **Низкие требования к памяти компьютера;**
- **Одна операция сравнения на каждой итерации.**

Недостатки:

- **Даже после определения оптимального подмножества дуг, удаление которых разрывает все контуры графа, алгоритм продолжает поиск, чтобы убедиться в том, что полученное решение является глобально оптимальным.**

САМОСТОЯТЕЛЬНО

Определить минимальный разрез на сильносвязном орграфе G(X,U), пользуясь методом типа ветвей и границ, осуществляющим поиск с возвратом по дереву ветвлений с уточнением оценки с помощью циркуляций:



Решить самостоятельно, пользуясь уточненными оценками и МВГ, реализующим поиск с возвратом

1

0	7	2
3	0	1
4	5	0

2

0	1	4
8	0	7
3	2	0

3

0	5	1
9	0	10
2	4	0

4

0	1	10
5	0	3
6	2	0

5

0	7	1
2	0	5
8	4	0

6

0	2	8
7	0	3
1	4	0

7

0	4	3
5	0	9
6	6	0

8

0	9	6
8	0	5
7	4	0

9

0	2	3
5	0	4
6	7	0

10

0	7	6
8	0	4
9	3	0

11

0	11	4
5	0	7
6	12	0

12

0	3	9
8	0	1
2	7	0

13

0	12	1
2	0	11
10	3	0

14

0	17	16
8	0	14
9	2	0

15

0	11	14
5	0	17
16	13	0

16

0	13	10
18	0	2
12	17	0

17

0	3	4
6	0	5
7	8	0

18

0	4	5
7	0	6
8	9	0

19

0	9	12
3	0	15
14	11	0

20

0	16	13
11	0	5
15	20	0

21

0	7	8
10	0	9
11	12	0

22

0	9	10
12	0	11
13	14	0

23

0	15	18
9	0	21
20	17	0

24

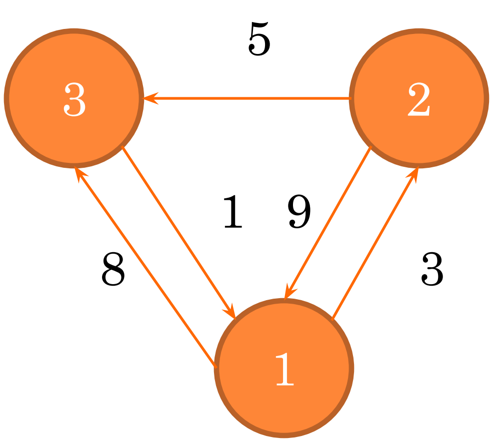
0	23	30
18	0	12
22	27	0

Часть 5.

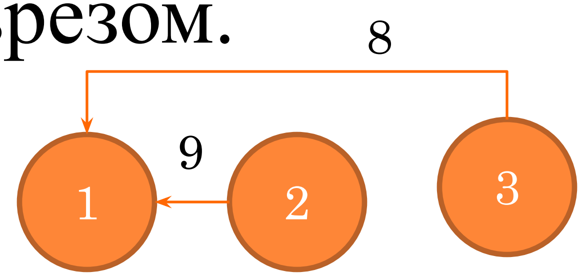
- Методы типа ветвей и границ, осуществляющие поиск решения задачи о минимальном разрезе на сильносвязном взвешенном ориентированном графе фронтальным спуском по дереву ветвлений, как задачи оптимального упорядочения.

Лемма 1

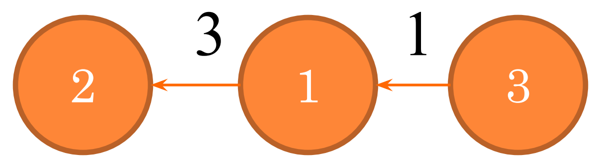
- Любой перестановке вершин π сильносвязного графа G(X,U) отвечает подмножество дуг U’, идущих справа налево и являющихся разрезом.



R=17
π= 1,2,3



R=4
π=2,1,3



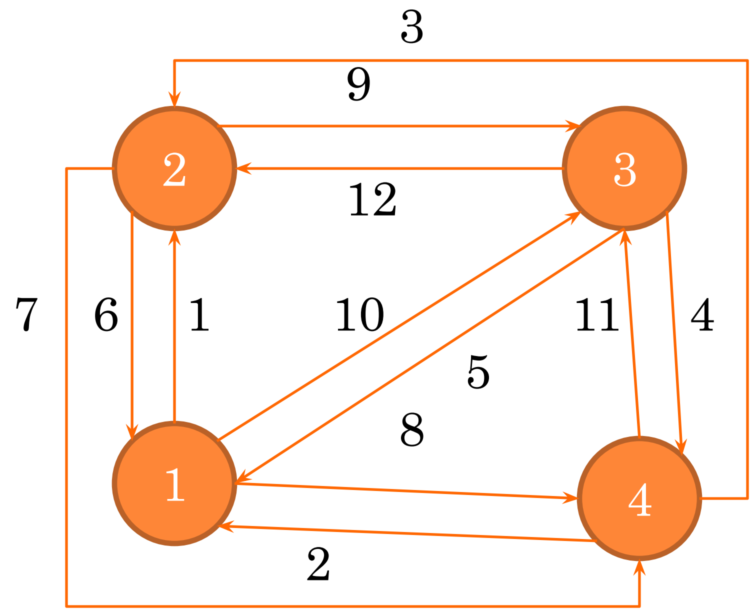
Содержательная и формальная постановки задачи

Ищется такая перестановка вершин $\pi\in\{\pi\}$ графа G(X,U), для которой суммарный вес дуг, идущих справа налево S_π был бы минимален.

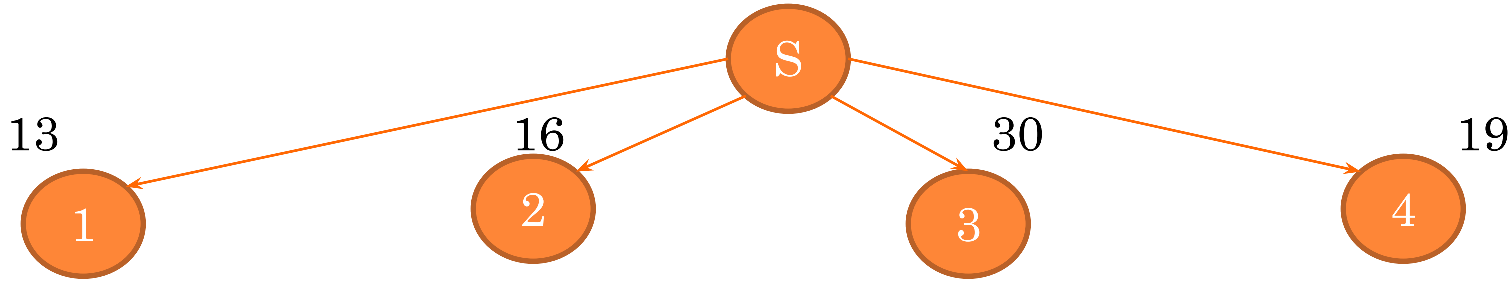
$$\begin{cases} \pi = \{i_1, i_2, i_3, \ldots i_{n-1}, i_n\}; \\ S_\pi = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n} r(i_j, i_k); \\ S_{\min} = \min_{\pi\in\{\pi\}} S_\pi \end{cases}$$

Решить, пользуясь МВГ, осуществляющим фронтальный спуск по дереву ветвлений, задачу о минимальном разрезе на сильносвязном графе, как задачу оптимального упорядочения вершин

0	1	10	8
6	0	9	7
5	12	0	4
2	3	11	0

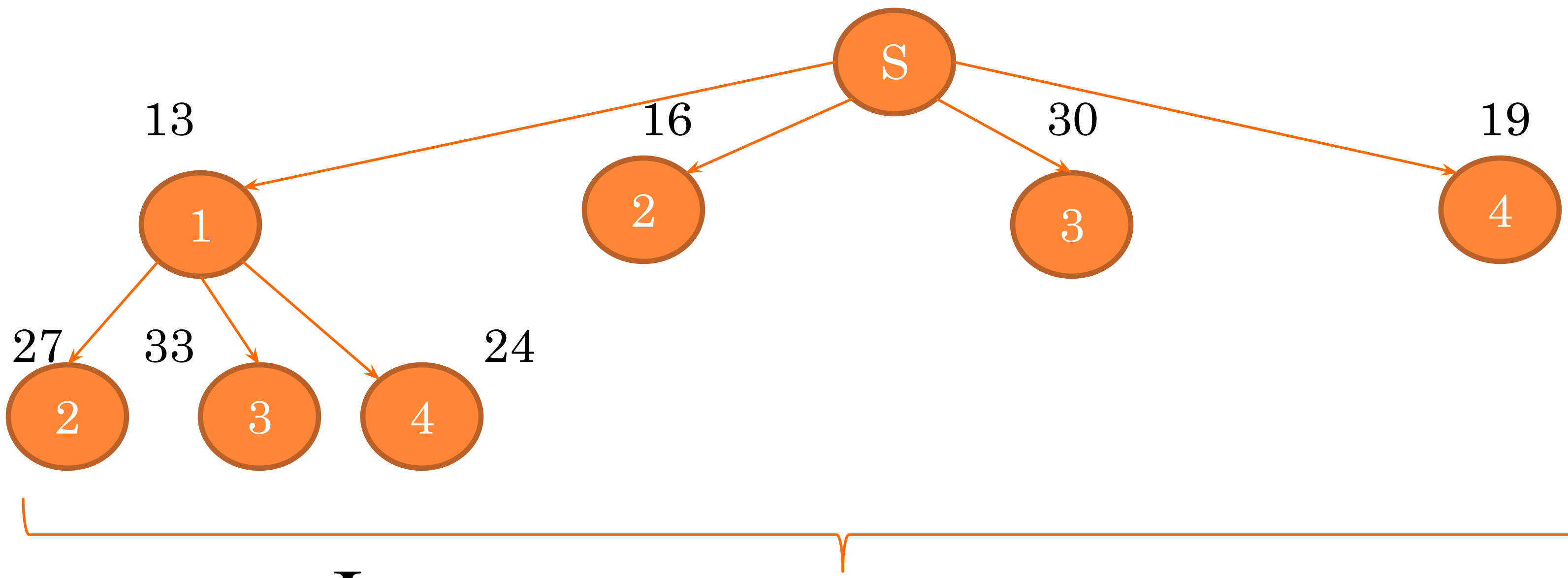


Итерация № 1



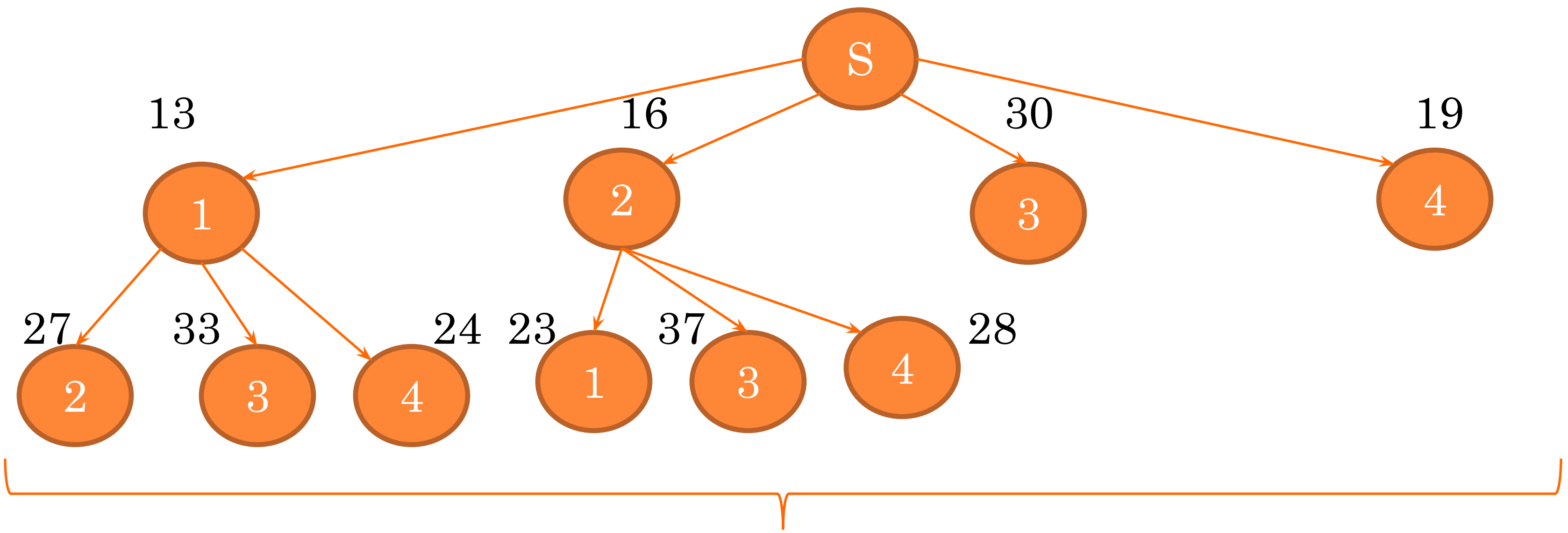
Фронт висячих вершин

Итерация № 2



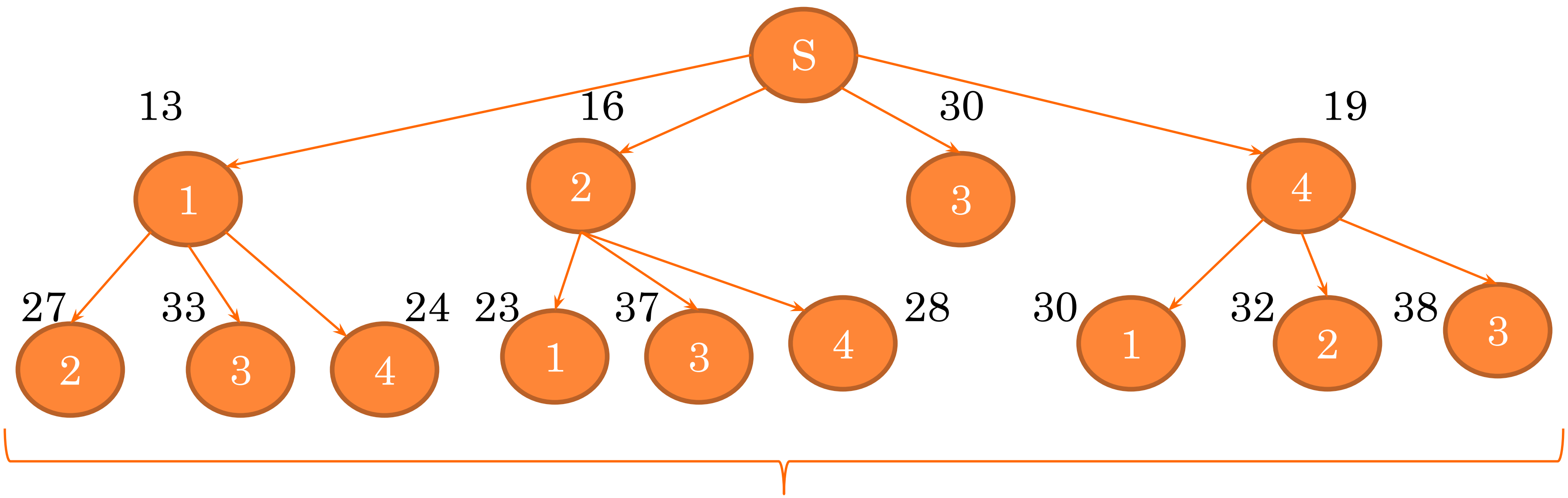
Фронт висячих вершин

Итерация № 3



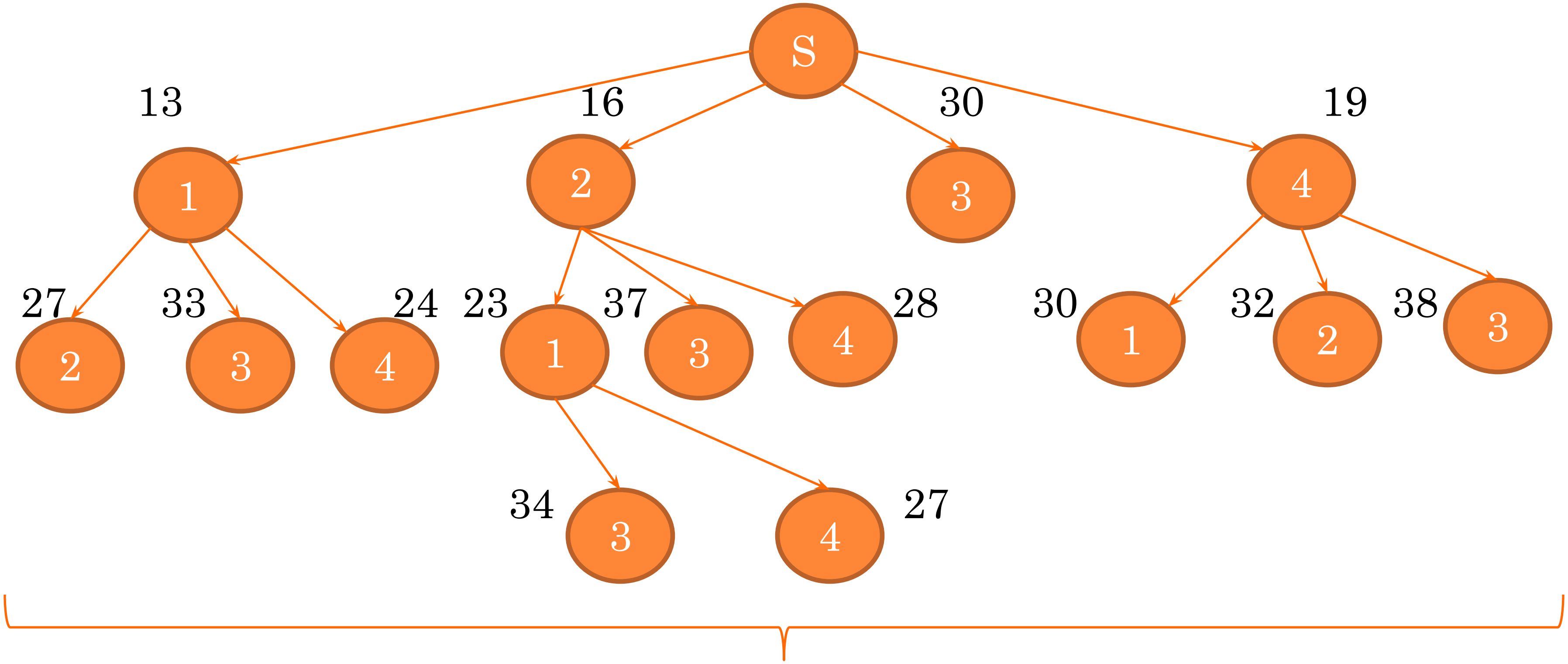
Фронт висячих вершин

Итерация № 4



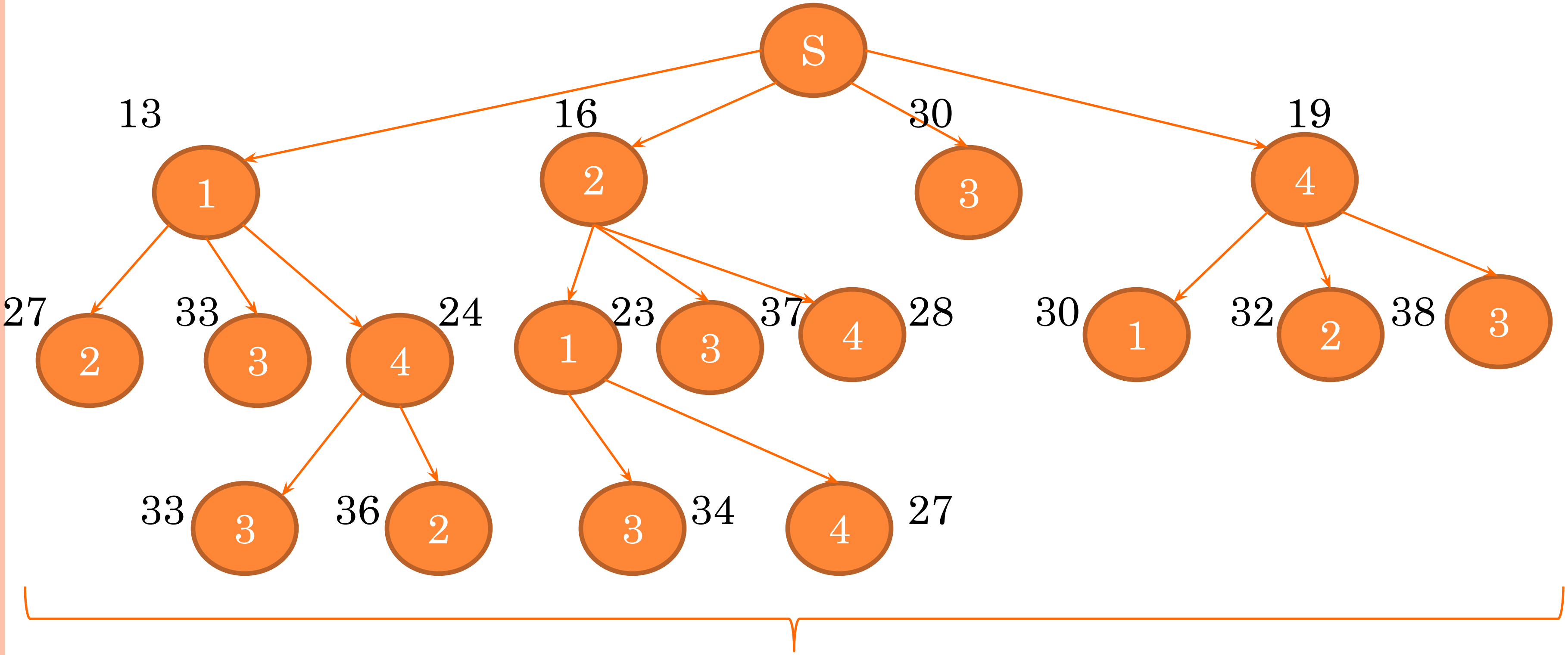
Фронт висячих вершин

Итерация № 5



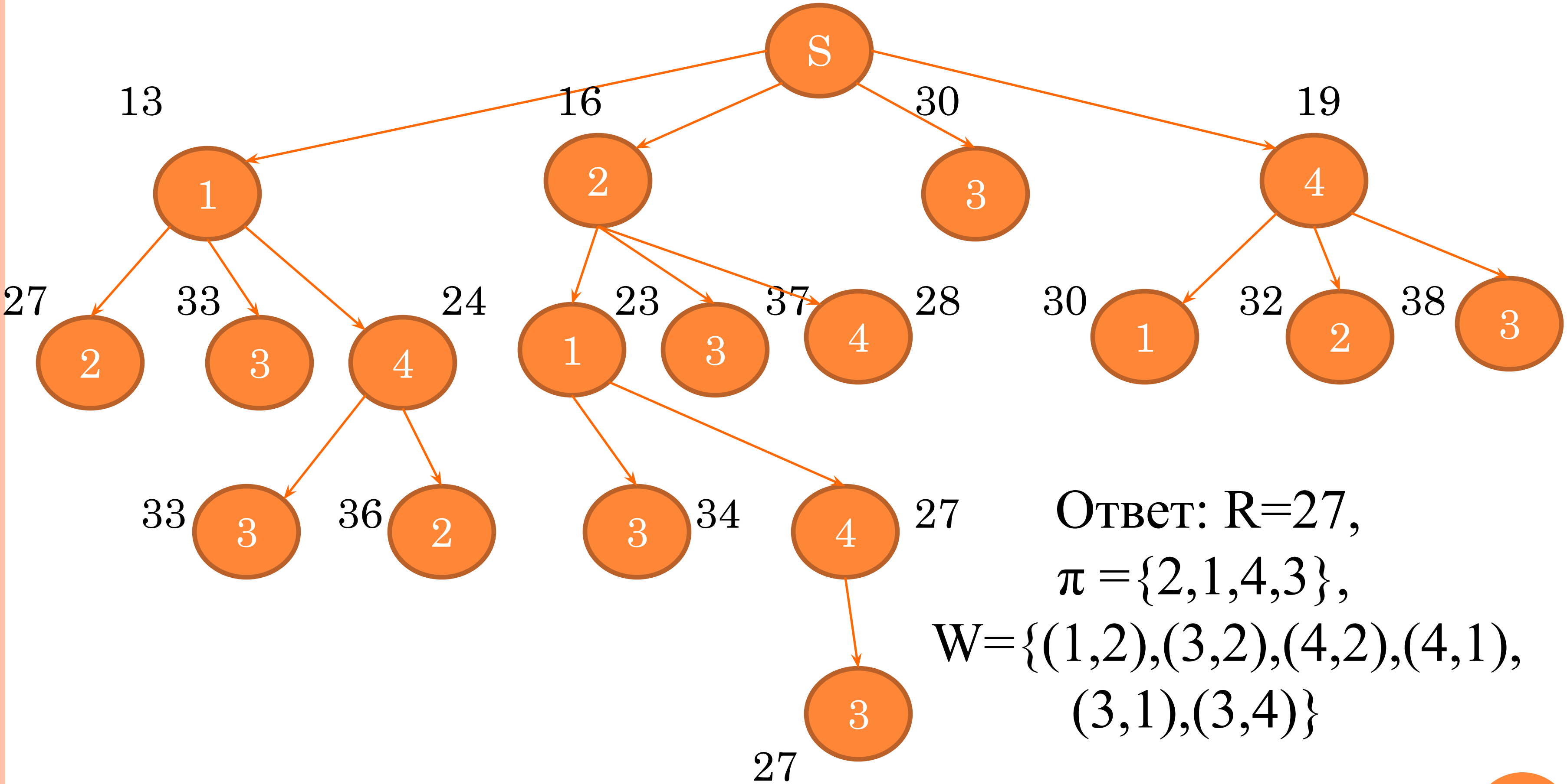
Фронт висячих вершин

Итерация № 6



Фронт висячих вершин

Итерация № 7



Ответ: R=27,
π ={2,1,4,3},
W={(1,2),(3,2),(4,2),(4,1),
(3,1),(3,4)}

Фронт висячих вершин

Вопрос

Задача была решена за 7 итераций, сколько бы потребовалось итераций для ее решения полным перебором всех перестановок?

САМОСТОЯТЕЛЬНО

- Решить задачу о минимальном разрезе в сильносвязном графе G(X,U) методом типа ветвей и границ, как задачу оптимального упорядочения вершин, если граф задан матрицей M:

- M =

0	3	7	12
8	0	9	4
1	2	0	11
8	6	5	0