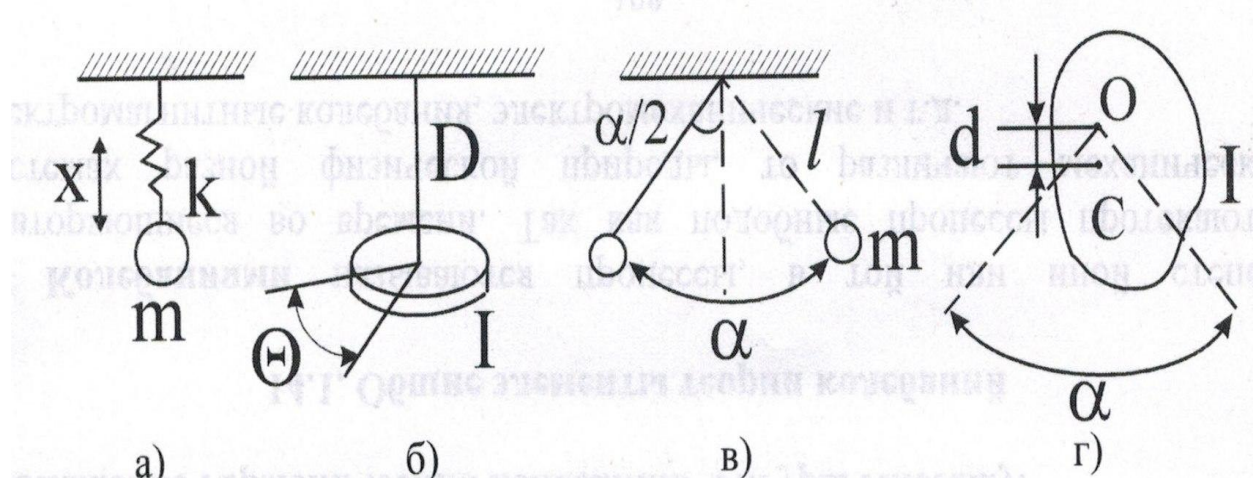


**ЛЕКЦИЯ №8**  
**КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ**

# Механические гармонические колебания (на примере маятников)

Если физическую систему, обладающую состоянием устойчивого равновесия, вывести из этого состояния каким-либо внешним воздействием и затем предоставить самой себе, то возникающие в системе **колебания** вблизи устойчивого равновесия называют **собственными** или **свободными**.

Способную совершать собственные колебания систему называют осциллятором. Примером линейных (одномерный случай) осцилляторов могут служить маятники (рис.): а) пружинный (груз на пружине); б) крутильный (диск на проволоке); в) математический (материальная точка на нерастяжимой нити); г) физический (С — центр масс твердого тела, О — точка прохождения оси колебаний, перпендикулярной плоскости чертежа).



Рассмотрим случай **а)– пружинный маятник.**

Второй закон Ньютона для колеблющегося тела для одномерного случая можно записать в виде:  **$m \cdot a_x = F_x = -k \cdot x$**  или

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + k \cdot x = 0 \qquad \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} \cdot x = \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 \cdot x = 0$$

$$x = X_{max} \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{m/k}$$

Система, совершающая колебания под действием квазиупругой силы, называется **линейным гармоническим осциллятором (ЛГО).**

Кинетическая энергия материальной точки (колеблющегося тела):

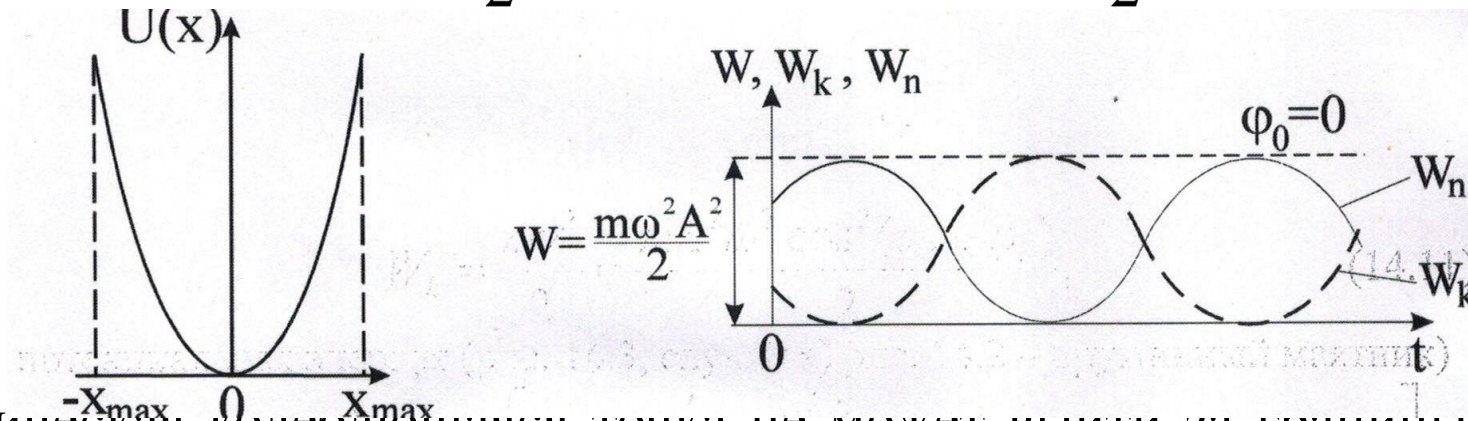
$$W_{\hat{e}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)}{2}$$

Потенциальная энергия ( пружинный маятник):

$$W_i = U = - \int_0^x F_x dx = - \int_0^x m a_x dx = - \int_0^x m (-\omega_0^2 x) dx = \frac{m \omega_0^2 x^2}{2}$$

Полная механическая энергия:

$$W = W_e + W_i = \frac{mA^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)}{2} + \frac{mA^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)}{2} = \frac{mA^2 \omega_0^2}{2}$$



Классическая колеблющаяся точка не может выйти за границы отрезка  $[-x_{\max}; +x_{\max}]$ , т.е. находится в потенциальной яме параболической формы.

Колебания  $W_k$  и  $W_n$  совершаются со сдвигом по фазе на  $\pi$  и, следовательно, **полная механическая энергия материальной точки при свободных незатухающих гармонических колебаниях не изменяется со временем (const).**

### г) физический маятник

**Физический маятник** – твердое тело, которое может совершать колебания под действием собственной силы тяжести  $mg$  вокруг неподвижной горизонтальной оси, не проходящей через центр масс тела и называемой осью качания. Центр тяжести маятника совпадает с его центром масс. Как правило, силой трения в подвесе маятника пренебрегают и момент относительно оси качания маятника создает только его сила тяжести  $mg$ .

При отклонении маятника на угол  $\alpha$  момент, создаваемый силой тяжести равен:

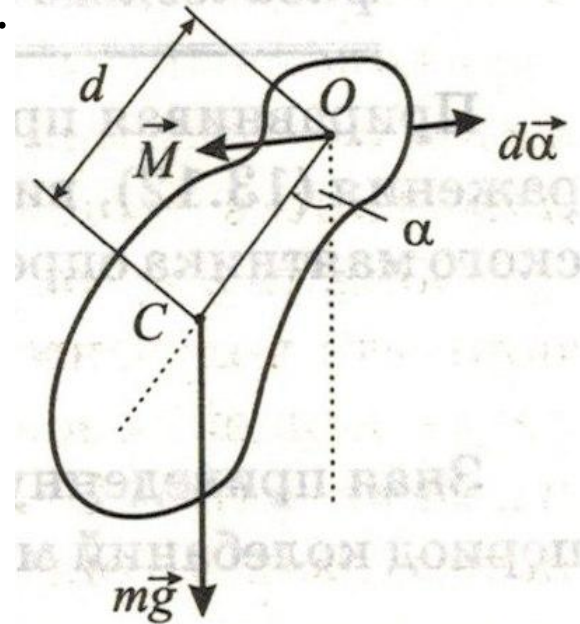
$$M = mgd \sin \alpha .$$

Согласно основному уравнению динамики вращательного движения (для тела с моментом инерции  $I$ , вращающегося вокруг неподвижной оси в отсутствие трения):

$$M = J \cdot \varepsilon = J \cdot \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = -mgd \cdot \sin \alpha .$$

При малых  $\alpha \rightarrow \sin \alpha \approx \alpha \rightarrow$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \frac{mgd}{J} \cdot \alpha = 0$$



Сравнивая с уравнением свободных незатухающих гармонических колебаний:  $d^2x/dt^2 + \omega^2x = 0$ , имеем для физического маятника:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{J}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgd}}.$$

Предельным случаем физического маятника является математический маятник - материальная точка, подвешенная на невесомой нерастяжимой нити и совершающая колебания в вертикальной плоскости под действием силы тяжести. Вся масса сосредоточена в центре масс тела. При этом  $d=l$  – длина маятника и момент инерции  $J = ml^2$ . Тогда

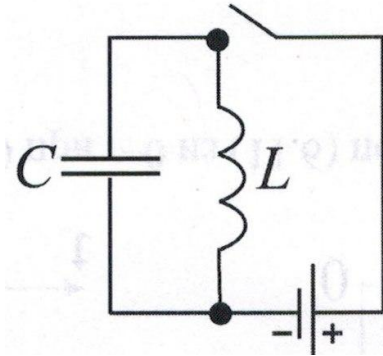
$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{ml^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Длина математического маятника, имеющего такой же период колебаний, что и данный физический маятник, называется приведенной длиной физического маятника. Точка  $O_1$ , находящаяся на расстоянии  $l_{пр}$  от точки подвеса  $O$  маятника, называется **центром качания** физического маятника. Точки  $O$  и  $O_1$  обладают свойством взаимности, т.е. при перемене их ролей длина и период маятника останутся прежними.

# Свободные гармонические колебания в электрическом колебательном контуре

Простейшим колебательным контуром является замкнутая цепь, состоящая из емкости  $C$  и катушки индуктивности  $L$ .

По закону Ома для замкнутой цепи: *сумма падений напряжений на проводниках сопротивлением  $R$  и на конденсаторе  $U_c$  равна ЭДС самоиндукции в контуре*



$$IR + U_c = IR + Q/C = \varepsilon_{si} = -L(dI/dt).$$

$$I = dQ/dt \rightarrow dI/dt = d^2Q/dt^2,$$

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{LC} Q = 0 \quad (R \rightarrow 0) \rightarrow d^2Q/dt^2 + \omega^2 Q = 0$$

$$\omega = 1/\sqrt{LC},$$

$$T = 2\pi / \omega = 2\pi \sqrt{LC}.$$

$$Q = Q_m \sin(\omega t + \varphi_0) \text{ и } I = dQ/dt = \omega Q_m \cos(\omega t + \varphi_0) = I_m \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$W = W_{эл} + W_{магн} = (1/2) \cdot (LI^2 + CU^2)$$

# Сложение гармонических колебаний.

## Фигуры Лиссажу

Сложение колебаний – нахождение значения результирующих колебаний системы при ее участии в нескольких колебательных процессах. Различают сложение **сонаправленных** и **взаимноперпендикулярных** колебаний.

Используем метод векторных диаграмм.

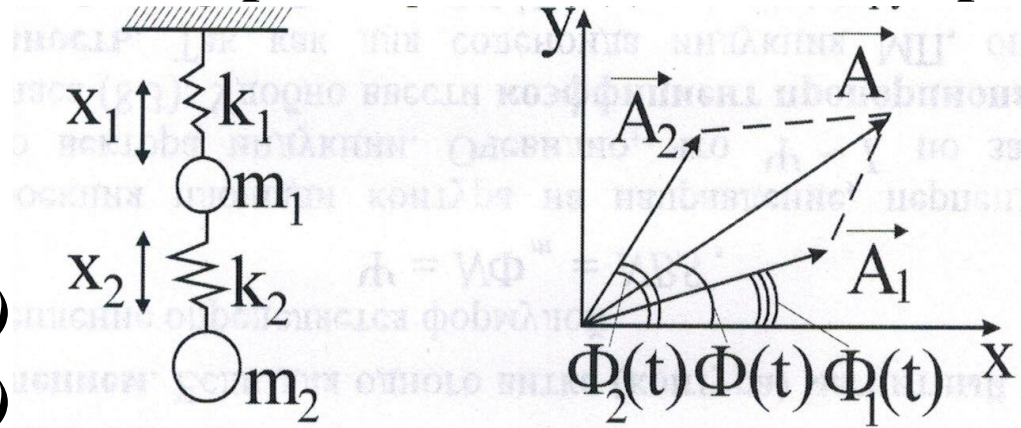
$$x_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) = A_1 \sin \Phi_1(t)$$

$$x_2 = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) = A_2 \sin \Phi_2(t)$$

Результирующее колебание:  $x = x_1 + x_2 = A \sin \Phi(t)$ , где амплитуда

$$A^2(t) = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\Phi_2 - \Phi_1)$$

$$\operatorname{tg} \hat{O}(t) = \frac{A_y}{A_x} = \frac{A_1 \sin \hat{O}_1(t) + A_2 \sin \hat{O}_2(t)}{A_1 \cos \hat{O}_1(t) + A_2 \cos \hat{O}_2(t)}.$$



**Когерентными** называются колебания, разность фаз которых во времени постоянна; т.к.  $\Phi(t) = (\omega_2 - \omega_1)t + (\phi_2 - \phi_1) = \text{const}$ , то это выполняется при  $\omega_2 = \omega_1 = \omega$ , тогда  $x = x_1 + x_2 = A \sin(\omega t + \phi_0)$ , где амплитуда  $A$  и фаза  $\Phi$  результирующего колебания. Тогда в зависимости от значения  $(\phi_2 - \phi_1)$  результирующая амплитуда  $A$  изменяется в пределах от  $A = |A_1 - A_2|$  при  $\phi_2 - \phi_1 = \pm(2m + 1)\pi$ , до  $A = |A_1 + A_2|$  при  $\phi_2 - \phi_1 = \pm 2\pi m$  ( $m \rightarrow$  целые числа).

При  $\phi_2 - \phi_1 = \pm 2\pi m$  колебания называются **синфазными** (в одной фазе), а при  $\phi_2 - \phi_1 = \pm(2m + 1)\pi$  — **противофазными**.

При  $\omega_1 \neq \omega_2$  результирующий вектор  $A$  будет изменяться по длине и вращаться с переменной скоростью. При сложении колебаний с близкими частотами  $(\Delta\omega = |\omega_2 - \omega_1| \ll \omega)$  возникают, так называемые, **биения**, тогда  $x_1 = x_m \cos \omega t$ ,  $x_2 = x_m \cos(\omega t + \Delta\omega t)$ .

$$\begin{aligned} x(t) = x_1 + x_2 &= 2x_m \cos \frac{\omega t + \omega t + \Delta\omega t}{2} \cos \frac{\omega t - \omega t - \Delta\omega t}{2} = \\ &= 2x_m \cos \omega t \cos \frac{\Delta\omega t}{2} = \bar{x}_m \cos \omega t \end{aligned}$$

$$[2\omega t \gg \Delta\omega; \cos(-\Delta\omega t) = \cos(\Delta\omega t)]$$

$$\bar{x}_m = 2x_m \left| \cos \frac{\Delta\omega t}{2} \right|$$

$$x(t) = \bar{x}_m \cos \omega t$$

Косинус берется по модулю, так как функция четная и поэтому частота биений  $\omega_b = \Delta\omega$ , а не  $\Delta\omega/2$ .

Период биений равен половине периода модуляции:

$$T_b = T_{\text{мод}}/2 = 2\pi/(\Delta\omega)$$

