



# Механика сплошных сред

---

Введение в гидродинамику

Преподаватель:

**Черняк Владимир Григорьевич**

Объем курса – **34 часа**

Лекции – **17 часов**

Практика – **17 часов**

Отчетность – **дифференцированный зачет**

## **Цель:**

- Изучить основы гидродинамики.
- Получить навыки постановки и решения простейших задач гидродинамики.

## **Задачи:**

- Вывод основных уравнений гидродинамики.
- Закономерности изотермических движений жидкости.
- Решение задач гидродинамики.

# Введение

Гидродинамика – раздел механики сплошных сред, в котором изучается движение несжимаемой жидкости с дозвуковыми скоростями и ее взаимодействие с твердыми телами.

Термин «жидкость» относится как к капельной жидкости, так и к газу.

Жидкость называют несжимаемой, если ее плотность одинакова по всему объему жидкости и в любой точке не изменяется с течением времени:

$$\rho = \text{const}$$

Это приближение выполняется с высокой точностью для капельных жидкостей ввиду малых изменений плотности при значительных увеличениях давления.

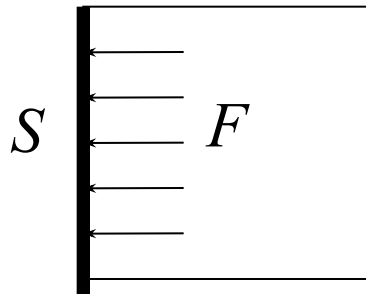
Так, например, если воду поместить в цилиндр с подвижным поршнем и увеличить давление от одной до двух атмосфер, то это уменьшит объем воды только в отношении 1 : 20000.

Такое повышение давления в случае воздуха при неизменной температуре уменьшает объем в отношении 1 : 2 в соответствии с законом Бойля – Мариотта.

Многочисленные экспериментальные и теоретические исследования показывают, что изменение плотности газа не существенно при дозвуковых скоростях его движения. Если бы это было не так, то в газе возник бы волновой процесс, выравнивающий плотность газа по всему объему со скоростью звука. Поэтому при движении газа со скоростью много меньшей скорости звука плотность не успевает изменяться.

# Свойства жидкости

**Давление** жидкости – скалярная физическая величина, характеризующая силу, с которой жидкость действует на единицу поверхности стенки сосуда перпендикулярно к этой поверхности.



$$p = \frac{F}{S}$$



Здесь  $F$  – сила, с которой жидкость действует на стенку сосуда площадью  $S$  по нормали к ней.

Если сила распределена вдоль поверхности равномерно, то  $p$  – давление жидкости.

В противном случае  $p$  – среднее давление жидкости на площадку  $S$ , а в пределе при стремлении величины  $S$  к нулю, - давление в данной точке.

## Закон Паскаля:

В любой точке покоящейся жидкости давление изотропно, т.е. по всем направлениям одинаково.

Единица измерения давления в СИ - *Паскаль*:

$$[p] = 1 \frac{H}{M^2} = 1 \text{ Па}$$

Внесистемные единицы:

$$1 \text{ мм рт. ст. (торр)} = 133,3 \text{ Па}$$

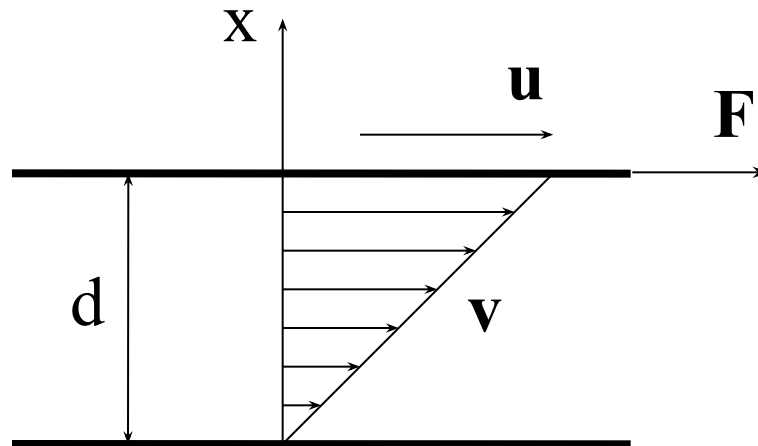
Физическая атмосфера

$$1 \text{ атм} = 760 \text{ мм рт. ст.} = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

Техническая атмосфера

$$1 \text{ ат} = 9,81 \cdot 10^4 \text{ Па}$$

**Вязкость жидкости** – свойство жидкости оказывать сопротивление перемещению одной ее части относительно другой (внутреннее трение).



Основной закон вязкого движения жидкости был установлен И. Ньютоном (1687):

$$F = \eta \frac{\partial v}{\partial x} S$$

$F$  – тангенциальная сила, вызывающая сдвиг слоев жидкости относительно друг друга;  $S$  – площадь слоя, по которому происходит сдвиг;  $\eta$  - **коэфф. динамической вязкости** (вязкость).

Кинематическая вязкость:

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}$$

где  $\rho$  - плотность жидкости.

Единица измерения в СИ:

$$[\eta] = 1 \text{ Па} \cdot \text{с}, \quad [\nu] = 1 \frac{\text{М}^2}{\text{с}}$$

# Вязкость некоторых жидкостей при температуре 300 K:

Жидкость	$\eta \times 10^3, \text{Па} \cdot \text{с}$	$\nu \times 10^6, \text{м}^2/\text{с}$
Вода	1,0	1,0
Воздух	$1,8 \cdot 10^{-2}$	14,0
Спирт этиловый	1,18	1,5
Глицерин	830	659
Бензин	0,65	0,93

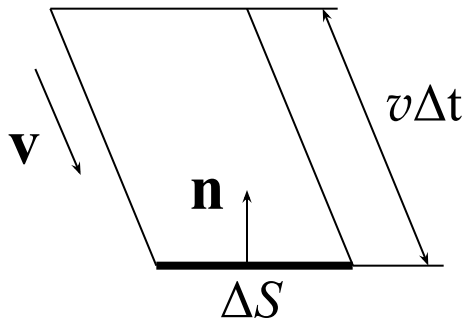
Коэффициент динамической вязкости  
плотных газов и жидкостей слабо зависит  
от давления и сильно – от температуры.

Динамическая вязкость газов при увеличении  
температуры увеличивается, а жидкостей  
уменьшается.



# Уравнение неразрывности

**Плотность потока массы** – масса жидкости, протекающей за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную потоку.



Объем:  $\Delta S(\mathbf{v}\mathbf{n})\Delta t$

Масса:  $\Delta S\Delta t(\mathbf{v}\mathbf{n})\rho$

Плотность потока

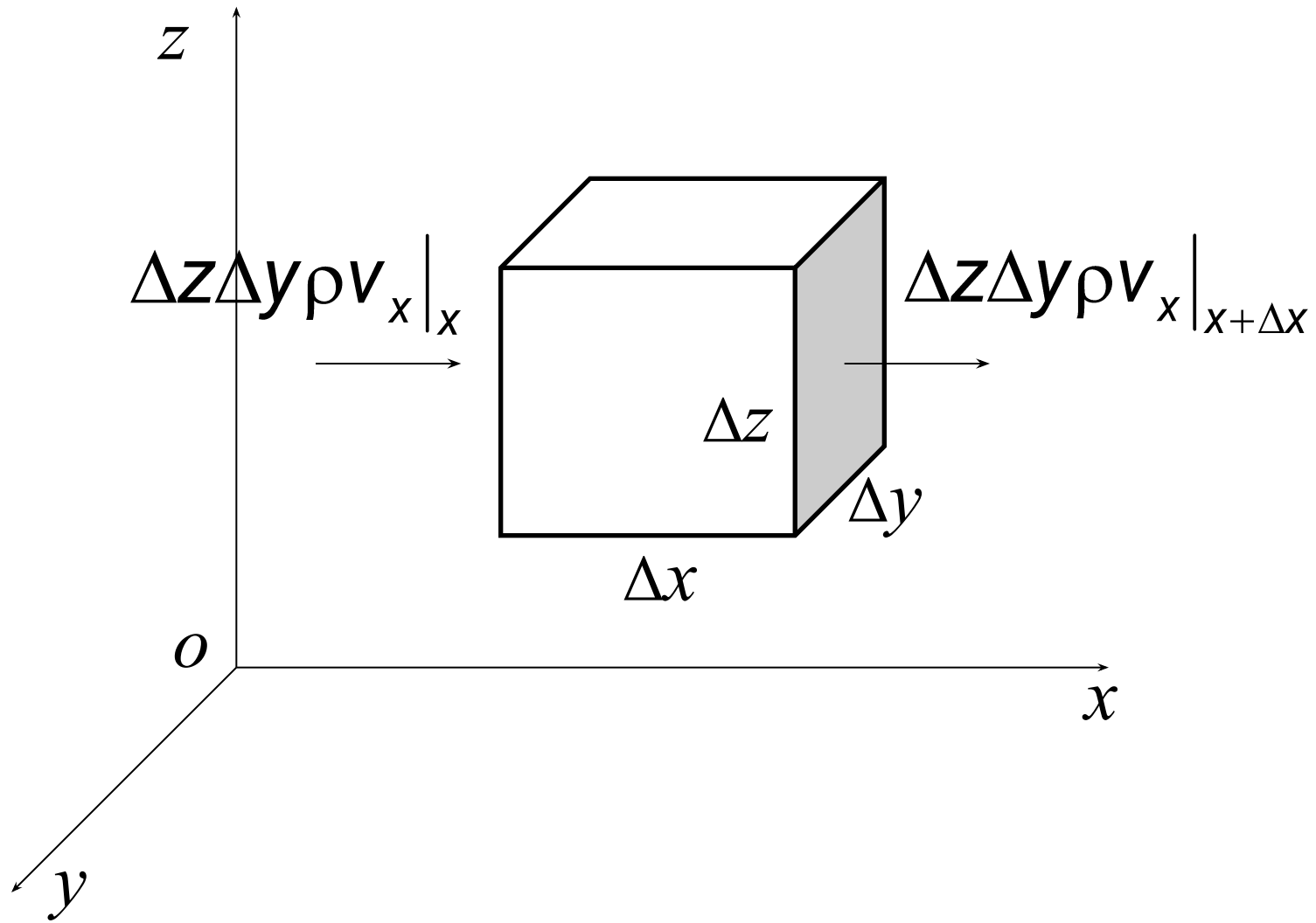
массы:  $\rho\mathbf{v}$

## Баланс массы

Мысленно выделим в жидкости

фиксированный элемент объема в форме прямоугольного параллелепипеда, длины ребер которого равны  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  и  $\Delta z$ .

Вычислим скорость изменения массы жидкости в этом объеме.



Скорость изменения массы жидкости в объеме за счет потока вдоль оси  $x$

$$\Delta z \Delta y \left( \rho v_x \Big|_x - \rho v_x \Big|_{x+\Delta x} \right)$$

Аналогично по координатным осям  $y$  и  $z$

$$\Delta z \Delta x \left( \rho v_y \Big|_y - \rho v_y \Big|_{y+\Delta y} \right)$$

$$\Delta y \Delta x \left( \rho v_z \Big|_z - \rho v_z \Big|_{z+\Delta z} \right)$$

Скорость накопления массы в выделенном элементе объема равна

$$\Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial \rho}{\partial t} = \Delta z \Delta y (\rho v_x|_x - \rho v_x|_{x+\Delta x}) + \\ + \Delta z \Delta x (\rho v_y|_y - \rho v_y|_{y+\Delta y}) + \Delta x \Delta y (\rho v_z|_z - \rho v_z|_{z+\Delta z})$$

Разделим это уравнение на  $\Delta x \Delta y \Delta z$  и устремим величину элемента объема к нулю.

В результате получим

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \left( \frac{\partial}{\partial x} \rho v_x + \frac{\partial}{\partial y} \rho v_y + \frac{\partial}{\partial z} \rho v_z \right)$$

или

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathit{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

Это **уравнение неразрывности**. Определяет скорость изменения массы единичного объема жидкости.

Таким образом, **уравнение неразрывности – уравнение баланса массы жидкости в единичном объеме за единицу времени.** Это следует из самого вывода этого уравнения.

$$\begin{array}{|c|} \hline \text{Скорость} \\ \text{накопления} \\ \text{массы} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \text{Скорость} \\ \text{поступления} \\ \text{массы} \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|} \hline \text{Скорость} \\ \text{отвода} \\ \text{массы} \\ \hline \end{array}$$

В стационарном случае уравнение неразрывности имеет вид:

$$\mathit{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

Если жидкость несжимаема, то

$$\mathit{div} \mathbf{v} = 0$$