Системы счисления

Система счисления — это знаковая система, в которой числа записываются по определенным правилам с помощью символов некоторого алфавита, называемых цифрами.

- Системы счисления
  - Непозиционные

  - Позиционные

Непозиционные системы счисления

В непозиционн … я количественный эквивалент ка … т от ее положения в записи чис …

1	I	100	C
5	V	500	D
10	X	1000	M
50	L	2000	Z

- Едини…
- Древн… ная систем…
- Римска…

Позиционные системы счисления

В позиционных системах счисления количественный эквивалент цифры зависит от ее положения в записи числа.

Позиция цифры в числе называется разрядом.

Основанием позиционной системы счисления называется целое число, которое равно количеству цифр, используемых для изображения чисел в данной системе счисления.

Основание показывает, во сколько раз изменяется количественное значение цифры при перемещении ее в младший или старший разряд.

Запись чисел в каждой из систем счисления с основанием q означает сокращенную запись выражения

$$a_{n-1}q^{n-1} + a_{n-2}q^{n-2} + \dots +$$

$$+ a_1q^1 + a_0q^0 + a_{-1}q^{-1} + \dots + a_{-m}q^{-m} ,$$

где a_i – цифры системы счисления, n и m – число целых и дробных разрядов соответственно.

Система счисления	Основание	Алфавит цифр
Десятичная	10	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
Двоичная	2	0, 1
Восьмеричная	8	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
Шестнадцатеричная	16	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

Соответствие систем счисления

Десятичная	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Двоичная	**0**	**1**	**10**	**11**	**100**	**101**	**110**	**111**
Восьмеричная	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Шестнадцатеричная	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**

Десятичная	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
Двоичная	**1000**	**1001**	**1010**	**1011**	**1100**	**1101**	**1110**	**1111**	**10000**
Восьмеричная	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**20**
Шестнадцатеричная	**8**	**9**	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**10**

Назад

Перевод целых чисел из десятичной системы счисления

Алгоритм перевода:

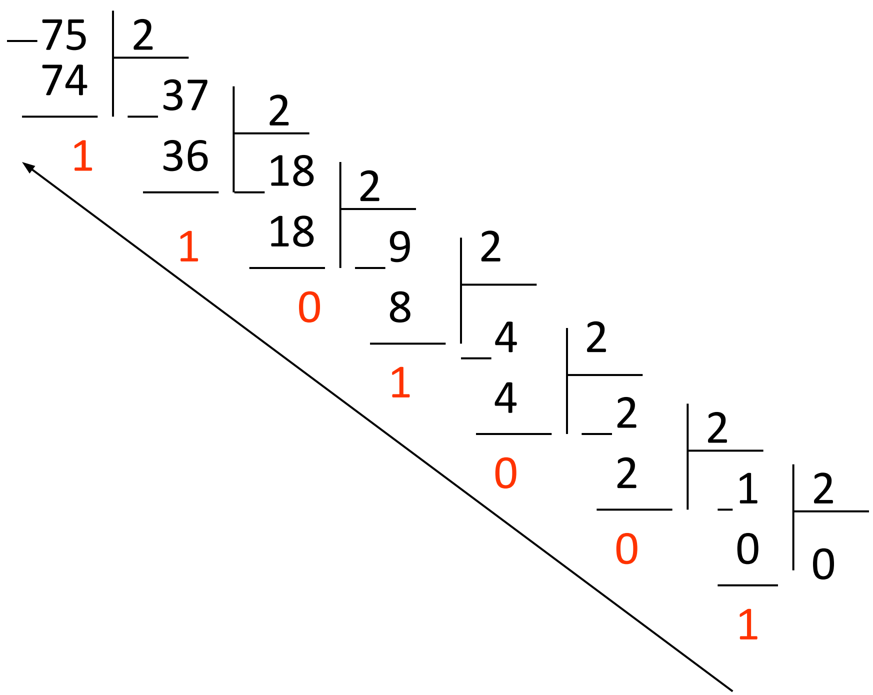
1. Последовательно делить с остатком данное число и получаемые целые частные на основание новой системы счисления до тех пор, пока частное не станет равно нулю.

2. Полученные остатки выразить цифрами алфавита новой системы счисления.

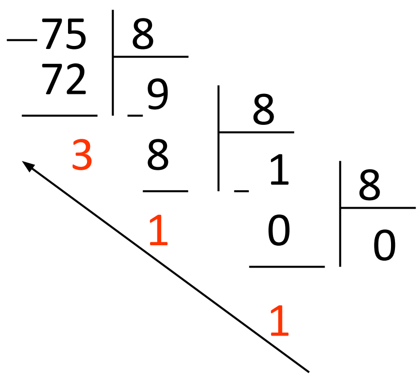
3. Записать число в новой системе счисления из полученных остатков, начиная с последнего.

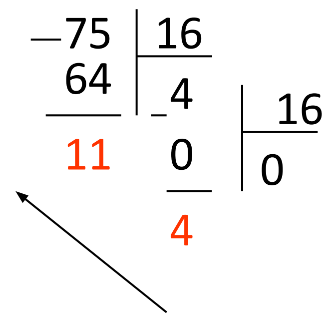
Перевод целых чисел из десятичной системы счисления

Пример. Перевести число 75 из десятичной системы счисления в двоичную, восьмеричную и шестнадцатеричную.



$75_{10} = 1001011_2$





$75_{10} = 113_8$

$75_{10} = 4B_{16}$

Перевод десятичной дроби из десятичной системы счисления

Алгоритм перевода:

1. Последовательно умножать десятичную дробь и получаемые дробные части произведений на основание новой системы счисления до тех пор, пока дробная часть не станет равна нулю или не будет достигнута необходимая точность перевода.
2. Полученные целые части произведений выразить цифрами алфавита новой системы счисления.
3. Записать дробную часть числа в новой системе счисления, начиная с целой части первого произведения.

Пример. Перевести число 0,35 из десятичной системы в счисления в двоичную, восьмеричную и шестнадцатеричную.

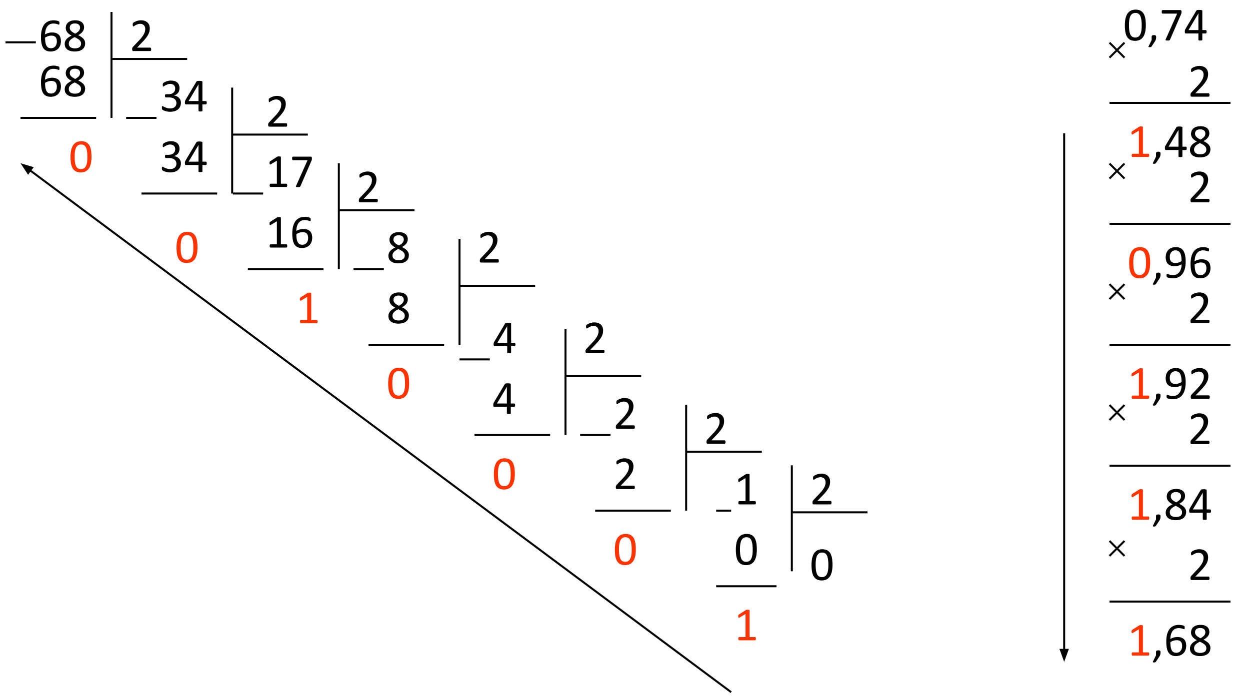
$$\begin{array}{r} 0{,}35 \\ \times\quad 2 \\ \hline 0{,}70 \\ \times\quad 2 \\ \hline 1{,}40 \\ \times\quad 2 \\ \hline 0{,}80 \\ \times\quad 2 \\ \hline 1{,}60 \\ \times\quad 2 \\ \hline 1{,}20 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0{,}35 \\ \times\quad 8 \\ \hline 2{,}80 \\ \times\quad 8 \\ \hline 6{,}40 \\ \times\quad 8 \\ \hline 3{,}20 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0{,}35 \\ \times\quad 16 \\ \hline 5{,}60 \\ \times\quad 16 \\ \hline 9{,}60 \end{array}$$

$0{,}35_{10} = 0{,}01011_2$

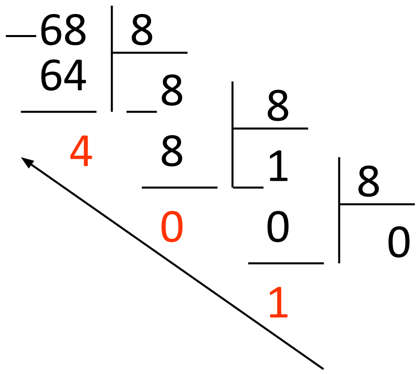
$0{,}35_{10} = 0{,}263_8$

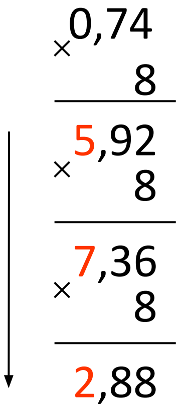
$0{,}35_{10} = 0{,}59_{16}$

Пример. Перевести число 68,74 из десятичной системы в счисления в двоичную, восьмеричную и шестнадцатеричную

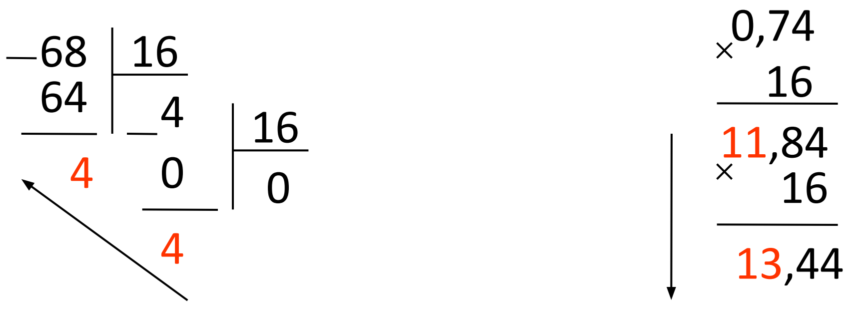


$$68{,}74_{10} = 1000100{,}10111_2$$





$$\mathbf{68{,}74_{10} = 104{,}572_8}$$



$$\mathbf{68{,}74_{10} = 44{,}BD_{16}}$$

Перевод чисел в десятичную систему счисления

При переводе числа из системы счисления с основанием q в десятичную надо представить это число в виде суммы произведений степеней основания его системы счисления q на соответствующие цифры числа

$$a_{n-1}q^{n-1} + a_{n-2}q^{n-2} + \ldots + a_1q^1 + a_0q^0 + a_{-1}q^{-1} + \ldots + a_{-m}q^{-m}$$

и выполнить арифметические вычисления.

Перевод чисел в десятичную систему счисления

Пример. Перевести число 1011,1 из двоичной системы счисления в десятичную.

разряды $3\ \ 2\ \ 1\ \ 0\ \ {-1}$

число $1\ 0\ 1\ 1,1_2 = 1\cdot2^3 + 0\cdot2^2 + 1\cdot2^1 + 1\cdot2^0 + 1\cdot2^{-1} = 11{,}5_{10}$

Пример. Перевести число 276,8 из восьмеричной системы счисления в десятичную.

разряды $2\ \ 1\ \ 0\ \ {-1}$

число $2\ 7\ 6,5_8 = 2\cdot8^2 + 7\cdot8^1 + 6\cdot8^0 + 5\cdot8^{-1} = 190{,}625_{10}$

Пример. Перевести число 1F3 из шестнадцатеричной системы счисления в десятичную.

разряды $2\ \ 1\ \ 0$

число $1\ F\ 3_{16} = 1\cdot16^2 + 15\cdot16^1 + 3\cdot16^0 = 499_{10}$

Перевод из восьмеричной и шестнадцатеричной системы счисления в двоичную

Необходимо заменить каждую цифру восьмеричного/шестнадцатеричного числа соответствующим трехразрядным/четырехразрядным двоичным кодом.

Пример. Перевести число $527{,}1_8$ в двоичную систему счисления.

$$527{,}1_8 = \underbrace{101}_{5}\ \underbrace{010}_{2}\ \underbrace{111}_{7},\ \underbrace{001}_{1}\ {}_2$$

Пример. Перевести число $1A3{,}F_{16}$ в двоичную систему счисления.

$$1A3{,}F_{16} = \underbrace{0001}_{1}\ \underbrace{1010}_{A}\ \underbrace{0011}_{3},\ \underbrace{1111}_{F}\ {}_2$$

Таблица соответствия

Перевод из двоичной системы счисления в восьмеричную и шестнадцатеричную

Для перехода от двоичной к восьмеричной/шестнадцатеричной системе счисления поступают следующим образом: двигаясь от запятой влево и вправо, разбивают двоичное число на группы по 3/4 разряда, дополняя при необходимости нулями крайние левую и правую группы.

Затем каждую группу из 3/4 разрядов заменяют соответствующей восьмеричной/шестнадцатеричной цифрой.

Пример

$0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,0\,1,1\,0\,1\,1\,1\,0\,0_2 = 251,65_8$

2 5 1 5 6

$1\,0\,1\,0\,1\,0\,0\,1,1\,0\,1\,1\,1\,0\,0\,0_2 = A9,B8_{16}$

A 9 B 8

Перевод из восьмеричной системы счисления в шестнадцатеричную и обратно

При переходе из восьмеричной системы счисления в шестнадцатеричную и обратно вначале производится перевод чисел из исходной системы счисления в двоичную, а затем – в конечную систему .

Пример. Перевести число $527{,}1_8$ в шестнадцатеричную систему счисления.

$527{,}1_8 = 000101010111{,}0110_2 = 157{,}6_{16}$

1 5 7 6

Пример. Перевести число $1A3{,}F_{16}$ в восьмеричную систему счисления.

$1A3{,}F_{16} = 110100011{,}111100_2 = 643{,}74_8$

6 4 3 7 4

Арифметические операции в позиционных системах счисления

Правила выполнения основных арифметических операций в любой позиционной системе счисления подчиняются тем же законам, что и в десятичной системе.

При сложении цифры суммируются по разрядам, и если при этом возникает переполнение разряда, то производится перенос в старший разряд. Переполнение разряда наступает тогда, когда величина числа в нем становится равной или большей основания системы счисления.

При вычитании из меньшей цифры большей в старшем разряде занимается единица, которая при переходе в младший разряд будет равна основанию системы счисления.

Если при умножении однозначных чисел возникает переполнение разряда, то в старший разряд переносится число кратное основанию системы счисления. При умножении многозначных чисел в различных позиционных системах применяется алгоритм перемножения чисел в столбик, но при этом результаты умножения и сложения записываются с учетом основания системы счисления.

Деление в любой позиционной системе производится по тем же правилам, как и деление углом в десятичной системе, то есть сводится к операциям умножения и вычитания.

Сложение
в позиционных системах счисления

Цифры суммируются по разрядам, и если при этом возникает избыток, то он переносится влево

двоичная система

$$\begin{array}{r}
\scriptstyle 1\;\;1\;\;\;\;\;1\;\; \\
10101 \\
+\;\;1101 \\
\hline
100010
\end{array}$$

1+1=2=2+0

1+0+0=**1**

1+1=2=2+**0**

1+1+0=2=2+**0**

1+1=2=2+**0**

Ответ: 100010_2

восьмеричная система

$$\begin{array}{r}
\scriptstyle 1\;\;1\;\;1\;\; \\
2154 \\
+\;\;736 \\
\hline
3112
\end{array}$$

4+6=10=8+**2**

5+3+1=9=8+**1**

1+7+1=9=8+**1**

1+2=3

Ответ: 3112_8

шестнадцатеричная система

$$\begin{array}{r}
\scriptstyle 1\;\;\;\;1\;\;\;\; \\
8D8 \\
+\;3BC \\
\hline
C94
\end{array}$$

8+12=20=16+4

13+11+1=25=16+**9**

8+3+1=12=$\mathbf{C}_{16}$

Ответ: $C94_{16}$

Вычитание
в позиционных системах счисления

При вычитании чисел, если цифра уменьшаемого меньше цифры вычитаемого, то из старшего разряда занимается единица основания

двоичная система

```
 1   1
 1 0 1 0 1
-  1 0 1 1
----------
 0 1 0 1 0
```

1-1=**0**

2-1=**1**

0-0=**0**

2-1=**1**

Ответ: 1010_2

восьмеричная система

```
 1   1
 4 3 5 0 6
-  5 0 4 2
----------
 3 6 4 4 4
```

6-2=**4**

8-4=**4**

4-0=**4**

8+3-5=11-5=**6**

Ответ: 36444_8

шестнадцатеричная система

```
 1  1
 C  9  4
-3  B  C
--------
 8  4  8
```

16+4-12=20-12=**8**

16+8-11=24-11=**13=D**$_{16}$

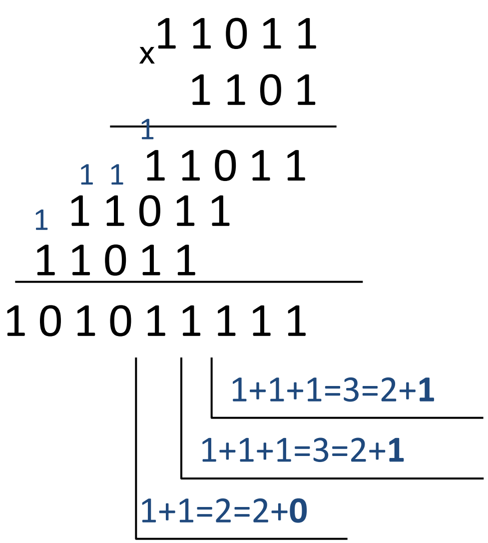
11-3=**8**

Ответ: 848_{16}

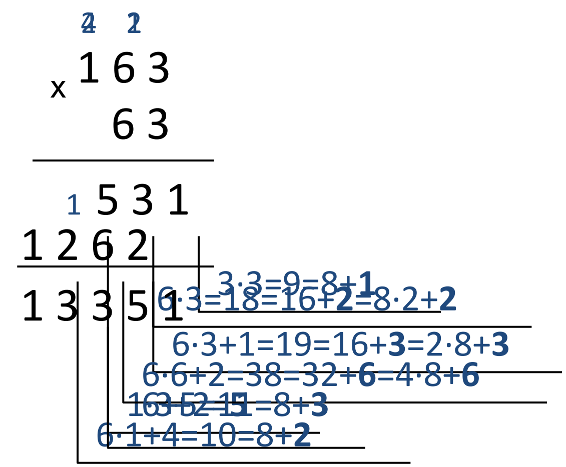
Умножение в позиционных системах счисления

При умножении многозначных чисел в различных позиционных системах применяется алгоритм перемножения чисел в столбик, но при этом результаты умножения и сложения записываются с учетом основания системы счисления

двоичная система



восьмеричная система



Ответ: 101011111_2

Ответ: 13351_8

Деление
в позиционных системах счисления

Деление в любой позиционной системе производится по тем же правилам, как и деление углом в десятичной системе. При этом необходимо учитывать основание системы счисления.

двоичная система

```
 100011 | 1110
-1110   |------
 ----   | 10,1
  _1110
   1110
   ----
      0
```

Ответ: $10{,}1_2$

восьмеричная система

```
 13351 | 163
-1262  |-----
 ----  | 6 3
  _531
   531
   ---
     0
```

Ответ: 63_8

Представление чисел в компьютере

Числа в компьютере могут храниться в формате с фиксированной запятой – целые числа и в формате с плавающей запятой – вещественные числа.

Вещественные числа хранятся и обрабатываются в компьютере в формате с плавающей запятой. Этот формат базируется на экспоненциальной форме записи, в которой может быть представлено любое число

Целые числа без знака занимают в памяти один или два байта.

Целые числа со знаком занимают в памяти компьютера один, два или четыре байта, при этом самый левый (старший) разряд содержит информацию о знаке числа

Применяются три формы записи (кодирования) целых чисел со знаком: прямой код, обратный код и дополнительный код.

Представление целых чисел в компьютере

Целые числа в компьютере могут представляться со знаком или без знака.

Целые числа без знака занимают в памяти один или два байта.

Формат числа в байтах	Запись с порядком	Обычная запись
1 2	$0 \ldots 2^8 - 1$ $0 \ldots 2^{16} - 1$	0 …255 0 …65535

Пример. Число $72_{10} = 1001000_2$ в однобайтовом формате

0	1	0	0	1	0	0	0

Целые числа со знаком занимают в памяти компьютера один, два или четыре байта, при этом самый левый (старший) разряд содержит информацию о знаке числа. Знак «плюс» кодируется нулем, а «минус» - единицей

Формат числа в байтах	Запись с порядком	Обычная запись
1	$-2^{7} \dots 2^{7}-1$	-128 …127
2	$-2^{15} \dots 2^{15}-1$	-32 768 …32 767
4	$-2^{31} \dots 2^{31}-1$	- 2 147 483 648 …2 147 483 647

В компьютерной технике применяются три формы записи (кодирования) целых чисел со знаком: **прямой** код, **обратный** код и **дополнительный** код.

Положительные числа в прямом, обратном и дополнительных кодах изображаются одинаково – двоичными кодами с цифрой 0 в знаковом разряде.

Пример. Число $62_{10} = 111110_2$ в однобайтовом формате

0	0	1	1	1	1	1	0

Знак числа

Отрицательные числа в прямом, обратном и дополнительных кодах имеют разное изображение.

Прямой код. В знаковый разряд помещается цифра 1, а в разряды цифровой части числа – двоичный код его абсолютной величины.

Пример. Число $-57_{10} = -111001_2$ в однобайтовом формате

прямой код

1	0	1	1	1	0	0	1

Знак числа

Обратный код. Для образования обратного кода отрицательного двоичного числа необходимо в знаковом разряде поставить 1, а в цифровых разрядах единицы заменить нулями, а нули — единицами.

Пример. Число $-57_{10} = -111001_2$ в однобайтовом формате

обратный код

1	1	0	0	0	1	1	0

Знак числа

Дополнительный код отрицательного числа получается образованием обратного кода с последующим прибавлением единицы к его младшему разряду.

Пример. Число $-57_{10} = -111001_2$ в однобайтовом формате

дополнительный код

1	1	0	0	0	1	1	1

Знак числа

Отрицательные десятичные числа при вводе в компьютер автоматически преобразуются в обратный или дополнительный код и в таком виде хранятся, перемещаются и участвуют в операциях.
При выводе таких чисел из компьютера происходит обратное преобразование в отрицательные десятичные числа

Представление вещественных чисел в компьютере

Любое число N в системе счисления с основанием *q* можно записать в виде $N = m \cdot q^{p}$, где М называется **мантиссой** числа, а *p* – **порядком**.

Такой способ записи чисел называется **представлением числа с плавающей точкой**

Мантисса должна быть правильной дробью, первая цифра которой отлична от нуля.

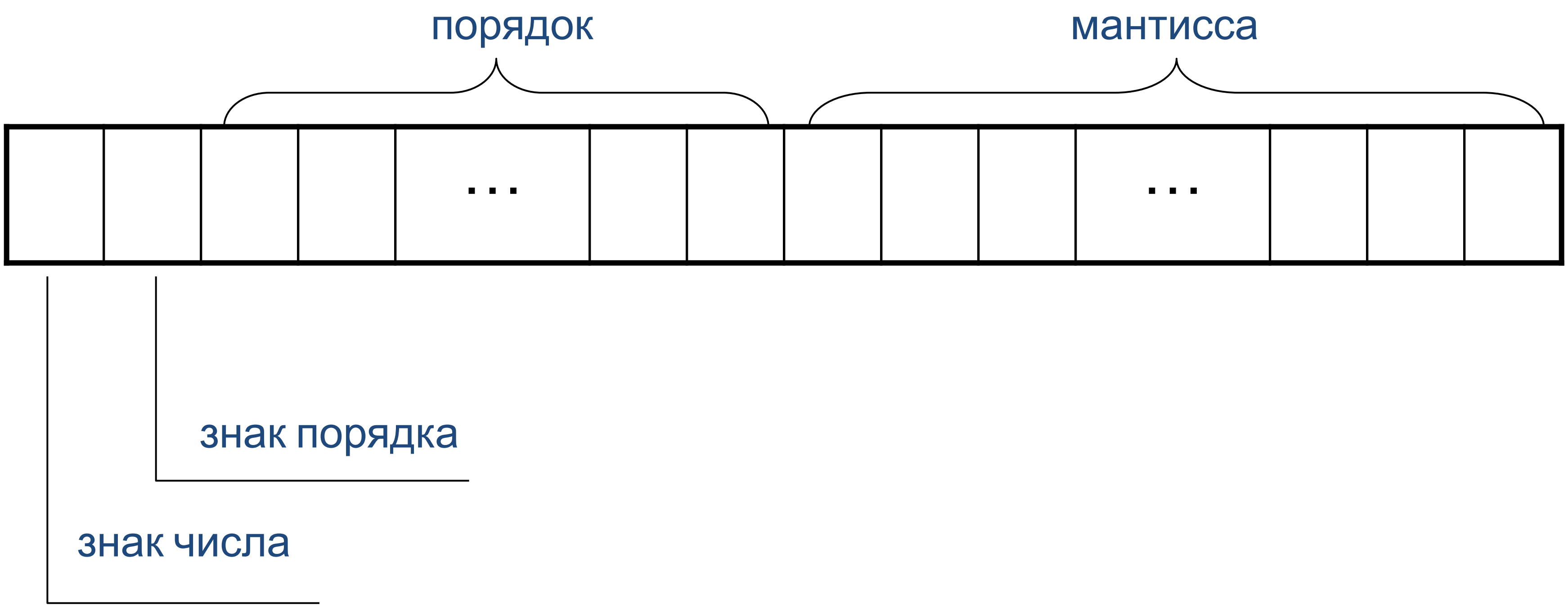
Данное представление вещественных чисел называется нормализованным.

Мантиссу и порядок *q*-ичного числа записывают в системе счисления с основанием *q*, а само основание – в десятичной системе.

Форматы вещественных чисел

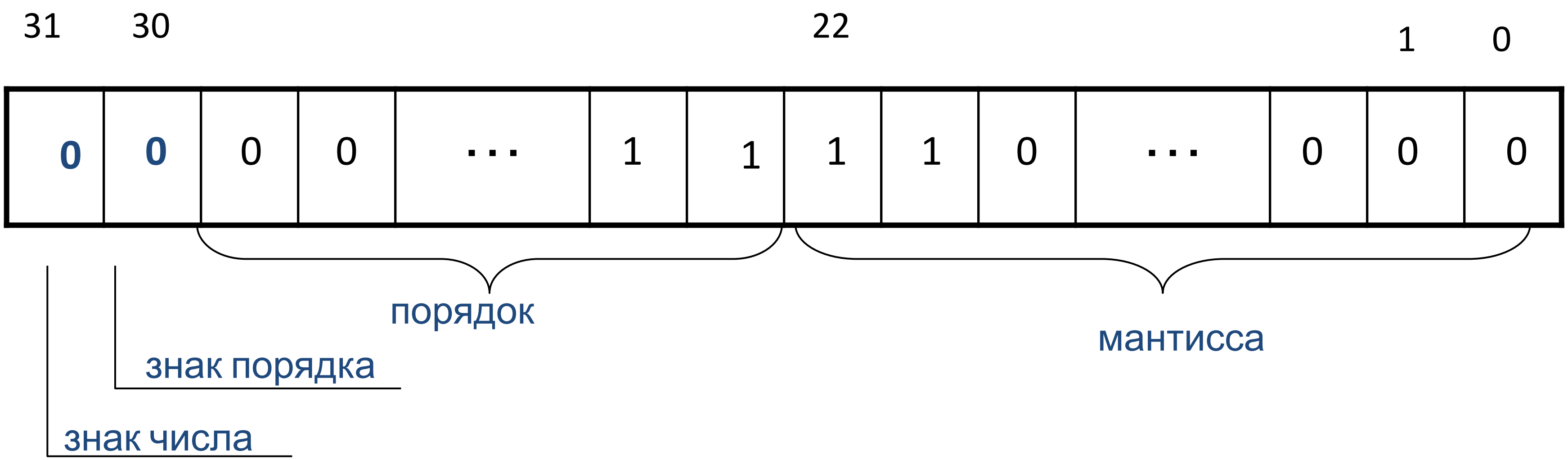
Формат числа	Диапазон абсолютных значений	Размер в байтах
одинарный	$10^{-45} \ldots 10^{38}$	4
вещественный	$10^{-39} \ldots 2^{38}$	6
двойной	$10^{-324} \ldots 10^{308}$	8
расширенный	$10^{-4932} \ldots 10^{4932}$	10

При хранении числа с плавающей точкой отводятся разряды для мантиссы, порядка, знака числа и знака порядка



Пример. Число $6{,}25_{10}$ записать в нормализованном виде в четырехбайтовом формате с семью разрядами для записи порядка

$6{,}25_{10} = 110{,}01_2 = 0{,}11001 \cdot 2^{11}$



Пример. Число $-0{,}125_{10}$ записать в нормализованном виде в четырехбайтовом формате с семью разрядами для записи порядка

$-0{,}125_{10} = -0{,}001_2 = 0{,}1 \cdot 2^{10}$ (отрицательный порядок записан в дополнительном коде)