ПРЕДИКАТИ ТА ЇХ РІЗНОВИДИ

Предикат на множині D – це часткова неоднозначна, взагалі кажучи, функція
$P : D \to \{T, F\}$

Часткові неоднозначні предикати трактуємо як відношення між D та $\{T, F\}$, назвемо їх предикатами реляційного типу. $P(d)$ – множина значень, які предикат P може прийняти на $d \in D$. $P(d) \subseteq \{T, F\} \Rightarrow P(d)$ – одне із $\{\varnothing\}$, $\{T\}$, $\{F\}$, $\{T, F\}$.

Предикат $P : D \to \{T, F\}$ задається областю істинності та областю хибності

$$T(P) = \{d \in {}^{V}A \mid T \in P(d)\}$$

$$F(P) = \{d \in {}^{V}A \mid F \in P(d)\}.$$

Предикат P однозначний, якщо $T(P) \cap F(P) = \varnothing$

Предикат P тотальний, якщо $T(P) \cup F(P) = D$

Предикат $P : D \to \{T, F\}$ назвемо:

– неспростовним, або частково істинним, якщо $F(P) = \varnothing$

– виконуваним, якщо $T(P) \neq \varnothing$

– всюди невизначеним, якщо $T(P) = F(P) = \varnothing$

– тотально істинним, якщо $T(P) = D$

– тотально хибним, якщо $F(P) = D$

– тотожно істинним, якщо $T(P) = D$ і $F(P) = \varnothing$

– тотожно хибним, якщо $T(P) = \varnothing$ і $F(P) = D$

– тотально насиченим, якщо $T(P) = F(P) = D$

Для *однозначних* предикатів області істинності й хибності:

$$T(P) = \{d \in D \mid P(d)\downarrow = T\} \qquad F(P) = \{d \in D \mid P(d)\downarrow = F\}$$

Нехай на D можна ввести відношення порядку за включенням даних

Предикат P *монотонний:* $d \subseteq d' \Rightarrow P(d) \subseteq P(d')$.

Предикат P *антитонний:* $d \subseteq d' \Rightarrow P(d) \supseteq P(d')$.

Для однозначних предикатів монотонність стає еквітонністю.

Однозначний предикат P *еквітонний*: $d' \supseteq d$ та $P(d)\downarrow \Rightarrow P(d')\downarrow = P(d)$.

Для *однозначного часткового* P монотонність означає: його інформативність не зменшується при збільшенні інформативності вхідних даних.

Для *монотонних тотальних* предикатів при розширенні вхідних даних інформативність може тільки зменшуватися, для них поняття монотонності малозмістовне, а змістовним є дуальне поняття антитонності.

Якщо P антитонний, то $P(\varnothing)$ складається з усіх значень, які P може приймати на D, тобто $P(\varnothing) = E_P$. Тому для *тотальних* предикатів антитонність означає: "інформативність" предиката не зменшується при збільшенні "інформативності" вхідних даних.

Водночас для *однозначних* предикатів поняття антитонності малозмістовне, адже для них антитонними можуть бути лише майже константні предикати:

$$P(d) \cong T \text{ для всіх } d \in D \text{ або } P(d) \cong F \text{ для всіх } d \in D$$

Іменні множини

V-A-ІМ – це довільна часткова однозначна функція $d : V \to A$

V-A-ІМ подаємо як $[v_1 \square a_1, \ldots, v_n \square a_n, \ldots]$, де $v_i \in V$, $a_i \in A$, $v_i \neq v_j$ при $i \neq j$.

Введемо функцію $asn : {}^{V}\!A \to 2^V$: $asn(d) = \{v \in V \mid v \square a \in d$ для деякого $a \in A\}$.

Множину всіх V-A-ІМ будемо позначати ${}^{V}\!A$.

V-A-ІМ δ *повна* (максимальна), якщо $asn(\delta) = V$

повна V-A-ІМ – це тотальна однозначна функція $V \to A$.

Множину всіх повних V-A-ІМ будемо позначати A^V.

Для V-A-ІМ вводимо теоретико-множинні операції $\cap$ та \.

Параметрична операція $\|X$ звуження V-A-ІМ за множиною $X \subseteq V$:

$$d\|X = \{v \square a \in d \mid v \in X\}.$$

Операція $\|_{-X}$ видалення компонент з іменами із $X \subseteq V$: $d\|_{-X} = d\|(V \setminus X)$

Замість $d\|_{-\{x\}}$ пишемо $d\|_{-x}$

Введемо відношення $=_{-x}$ рівності з точністю до компоненти з іменем x:

$$d_1 =_{-x} d_2, \text{ якщо } d_1\|_{-x} = d_2\|_{-x}$$

Операція ∇ *накладки* ІМ δ_2 на ІМ δ_1: $\delta_1 \nabla \delta_2 = \delta_2 \cup (\delta_1\|(V \setminus asn(\delta_2)))$

Операцію *реномінації* $r^{v_1,\dots,v_n}_{x_1,\dots,x_n} : {}^V A \to {}^V A$ задамо так:

Скорочено пишемо $\bar{y}$ замість $y_1,\dots, y_n$

Операцію реномінації ІМ продовжимо на множини ІМ

$$r^{\bar v}_{\bar x}(L) = \{ r^{\bar v}_{\bar x}(d) \mid d \in L \}, \qquad L \subseteq {}^V A$$

Монотонність операції реномінації: якщо $d_1 \subseteq d_2$, то $r^{\bar v}_{\bar x}(d_1) \subseteq r^{\bar v}_{\bar x}(d_2)$

Елімінація тотожних перейменувань: $r^{\bar z,\bar v}_{\bar z,\bar x}(d) = r^{\bar v}_{\bar x}(d)$

Маємо $r^{z,\bar v}_{y,\bar x}(d) =_{-z} r^{z,\bar v}_{u,\bar x}(d)$ та $r^{z,\bar v}_{y,\bar x}(d) =_{-z} r^{\bar v}_{\bar x}(d)$

Тотожна реномінація r діє як тотожне відображення: r(d) = d.

Послідовне застосування двох операцій реномінації $r^{\bar u}_{\bar y}$ (внутрішня) та $r^{\bar v}_{\bar x}$ (зовнішня) можна подати у вигляді однієї операції реномінації, яку назвемо *згорткою* цих операцій і позначимо $r^{\bar v}_{\bar x} \circ {}^{\bar u}_{\bar y}$

$$r^{\bar v}_{\bar x}(r^{\bar u}_{\bar y}(d)) = r^{\bar v}_{\bar x} \circ {}^{\bar u}_{\bar y}(d)$$

Нехай маємо послідовне застосування двох операцій реномінації

$$r^{v_1,\ldots,v_n,u_1,\ldots,u_k}_{s_1,\ldots,s_n,z_1,\ldots,z_k} \text{ та } r^{v_1,\ldots,v_n,w_1,\ldots,w_m}_{x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m},$$

де $\{w_1,\ldots,w_m\} \cap \{u_1,\ldots,u_k\} = \varnothing$. Тоді для всіх $d \in {}^V A$

$$r^{v_1,\ldots,v_n,w_1,\ldots,w_m}_{x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m}\left(r^{v_1,\ldots,v_n,u_1,\ldots,u_k}_{s_1,\ldots,s_n,z_1,\ldots,z_k}(d)\right) = r^{v_1,\ldots,v_n,w_1,\ldots,w_m,u_1,\ldots,u_k}_{a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_m,z_1,\ldots,z_k}(d)$$

де кожні a_i та b_j задаються так:

$$a_i = \begin{cases} x_i, \text{ якщо } x_i \notin \{v_1,\ldots,v_n, u_1,\ldots,u_k\}, \\ s_l, \text{ якщо } x_i = v_l \text{ для деякого } v_l \\ z_l, \text{ якщо } x_i = u_l \text{ для деякого } u_l \end{cases}$$

$$b_j = \begin{cases} y_j, \text{ якщо } y_j \notin \{v_1,\ldots,v_n, u_1,\ldots,u_k\}, \\ s_l, \text{ якщо } y_j = v_l \text{ для деякого } v_l \\ z_l, \text{ якщо } y_j = u_l \text{ для деякого } u_l \end{cases}$$

Згортка операцій реномінації асоціативна та некомутативна

Квазіарні функції та предикати

Функції (зокрема, предикати), задані на ІМ, називають квазіарними

V-квазіарна функція – функція вигляду $f : {}^{V}\!A \to R$

V-A-квазіарна функція – функція вигляду $f : {}^{V}\!A \to A$

V-A-квазіарний предикат – функція вигляду $P : {}^{V}\!A \to \{T, F\}$

Ім’я $z \in V$ *строго неістотне* для V-A-квазіарної функції (предиката) g, якщо для всіх $d_1, d_2 \in {}^{V}\!A$ таких, що $d_1 =_{-z} d_2$, маємо $g(d_1) = g(d_2)$.

Ім'я z *неістотне* для однозначної V-A-квазіарної функції (предиката) g, якщо для всіх $d_1, d_2 \in {}^{V}\!A$ таких, що $d_1 =_{-z} d_2$, маємо $g(d_1) \cong g(d_2)$.

Для *однозначних еквітонних* функцій маємо еквівалентне визначення.

Ім'я x *неістотне* для однозначної еквітонної функції (предиката) g, якщо

для кожних $d \in {}^{V}\!A$ та $a, b \in A$ маємо $g(d \nabla x \square a) \cong g(d \nabla x \square b)$.

Для однозначних функцій (зокрема, предикатів) маємо:

1) $x \in V$ *неістотне для еквітонної* g $\Leftrightarrow$ $g(d) \cong g(d \nabla x \square a)$ $\forall$ $d \in {}^{V}\!A$, $a \in A$

2) $x \in V$ *неістотне для еквітонної повнототальної* g $\Leftrightarrow$

$g(d) = g(d \nabla x \square a)$ $\forall$ $d \in A^{V}$, $a \in A$

V-A-квазіарний предикат P:

– неспростовний (частково істинний), якщо $F(P) = \varnothing$

– виконуваний, якщо $T(P) \neq \varnothing$

– тотально істинний, якщо $T(P) = {}^V\!A$

– тотально хибний, якщо $F(P) = {}^V\!A$

– тотожно істинний, якщо $T(P) = {}^V\!A$ та $F(P) = \varnothing$ (позначаємо T)

– тотожно хибний, якщо $T(P) = \varnothing$ та $F(P) = {}^V\!A$ (позначаємо F)

– всюди невизначений, якщо $T(P) = \varnothing$ та $F(P) = \varnothing$ (позначаємо $\perp$)

– тотально насичений, якщо $T(P) = {}^V\!A$ та $F(P) = {}^V\!A$ (позначаємо $\square$).

Часткові неоднозначні квазіарні предикати назвемо R-предикатами

часткові однозначні – P-предикатами

тотальні – T-предикатами

тотальні однозначні – TS-предикатами.

Класи *R*-предикатів, *P*-предикатів, *T*-предикатів, *TS*-предикатів відповідно позначаємо

$$PrR_A^V, PrP_A^V, PrT_A^V, PrTS_A^V$$

Монотонні *R*-предикати назвемо *RM*-предикатами

антитонні *R*-предикати назвемо *RA*-предикатами

антитонні *T*-предикати назвемо *TA*-предикатами

еквітонні *P*-предикати назвемо *PE*-предикатами

Класи *RM*-предикатів, *RA*-предикатів, *TA*-предикатів, *PE*-предикатів позначаємо .

$$PrRM_A^V,\ PrRA_A^V,\ PrPE_A^V,\ PrTA_A^V$$

Константні предикати $\perp$, T, F, □ є монотонними й антитонними.

В класі *TS*-предикатів монотонними й антитонними є лише константні предикати T та F.

Приклад 1. Розглянемо наступні предикати.

$$P_1(d)=\begin{cases}\{F\}, \text{ якщо } x\in asn(d)\\ \{T\}, \text{ якщо } x\notin asn(d)\end{cases} \qquad P_2(d)=\begin{cases}\{T\}, \text{ якщо } x\in asn(d)\\ \{F\}, \text{ якщо } x\notin asn(d)\end{cases}$$

$$P_3(d)=\begin{cases}\{F\}, \text{ якщо } x\in asn(d)\\ \varnothing, \text{ якщо } x\notin asn(d).\end{cases} \qquad P_4(d)=\begin{cases}\{T,F\}, \text{ якщо } x\in asn(d)\\ \{T\}, \text{ якщо } x\notin asn(d)\end{cases}$$

$$P_5(d)=\begin{cases}\{T\}, \text{ якщо } x\in asn(d)\\ \varnothing, \text{ якщо } x\notin asn(d).\end{cases} \qquad P_6(d)=\begin{cases}\{T,F\}, \text{ якщо } x\in asn(d)\\ \{F\}, \text{ якщо } x\notin asn(d)\end{cases}$$

$$P_7(d)=\begin{cases}F, \text{ якщо } x\notin asn(d),\\ \varnothing, \text{ якщо } x\in asn(d).\end{cases} \qquad P_8(d)=\begin{cases}\{T,F\}, \text{ якщо } x\notin asn(d)\\ \{T\}, \text{ якщо } x\in asn(d)\end{cases}$$

$$P_9(d)=\begin{cases}\{T\}, \text{ якщо } x\notin asn(d)\\ \varnothing, \text{ якщо } x\in asn(d).\end{cases} \qquad P_{10}(d)=\begin{cases}\{T,F\}, \text{ якщо } x\notin asn(d)\\ \{F\}, \text{ якщо } x\in asn(d)\end{cases}$$

P_1 та P_2 тотальні однозначні немонотонні (нееквітонні) й неантитонні,
P_3 та P_5 монотонні (еквітонні) однозначні,
P_4 та P_6 монотонні тотальні неоднозначні,
P_7 та P_9 антитонні часткові однозначні,
P_8 та P_{10} антитонні тотальні неоднозначні.

Приклад 2. Спеціальні 0-арні композиції – параметризовані за предметними іменами *предикати-індикатори* εz, які визначають наявність в $d\in{}^{V}\!A$ компоненти з відповідним $z\in V$. Предикати εz визначаємо так:

$$\varepsilon z(d)=\begin{cases}T, \text{якщо } d(z)\uparrow,\\ F, \text{якщо } d(z)\downarrow\end{cases}$$

Через області істинності й хибності предикати εz визначаємо так:

$T(\varepsilon z) = \{d \mid d(z)\uparrow\} = \{d\in{}^{V}\!A \mid z\notin asn(d)\}$;

$F(\varepsilon z) = \{d \mid d(z)\downarrow\} = \{d\in{}^{V}\!A \mid z\in asn(d)\}$.

Предикати εz не є монотонними та не є антитонними.

Кожне $x\in V$ таке, що $x \neq z$, неістотне для εz

Використовують також дуальні до εz *предикати-індикатори Ez.*

Предикати Ez визначаються так:

$T(Ez) = \{d \mid d(z)\downarrow\} = \{d\in{}^{V}\!A \mid z\in asn(d)\}$;

$F(Ez) = \{d \mid d(z)\uparrow\} = \{d\in{}^{V}\!A \mid z\notin asn(d)\}$.

Предикати-індикатори Ez та εz пов'язані так: $Ez = \neg\varepsilon z$.

Предикат $\tilde{P}$ *дуальний* до предиката P, якщо $T(\tilde{P}) = \overline{F(P)}$ та $F(\tilde{P}) = \overline{T(P)}$

Доповнення до V-A-квазіарного предиката P як реляції $P \subseteq {}^{V}A \times Bool$ – це

$\bar{P}$: $T(\bar{P}) = \overline{T(P)}$ та $F(\bar{P}) = \overline{F(P)}$

Маємо $T(\tilde{P}) = F(\bar{P})$, $F(\tilde{P}) = T(\bar{P})$

Приклад пари взаємно дуальних та взаємно доповнених предикатів: $\perp$ та □

Твердження 1. Q монотонний $\Rightarrow$ $\bar{Q}$ та $\tilde{Q}$ антитонні;

Q антитонний $\Rightarrow$ $\bar{Q}$ та $\tilde{Q}$ монотонні.

Твердження 2.

$$Q \in PrP_A^V \Leftrightarrow \tilde{Q} \in PrT_A^V \Leftrightarrow \bar{Q} \in PrT_A^V;$$

$$Q \in PrT_A^V \Leftrightarrow \tilde{Q} \in PrP_A^V \Leftrightarrow \bar{Q} \in PrP_A^V;$$

$$Q \in PrTS_A^V \Leftrightarrow \bar{Q} \in PrTS_A^V;$$

$$Q \in PrTS_A^V \Rightarrow \tilde{Q} = Q$$

ПРЕДИКАТНІ КОМПОЗИЦІЙНІ СИСТЕМИ

Семантична основа КНЛ – *композиційні предикатні системи*.

Це трійки вигляду (D, PF, $\boldsymbol{C}$), де

D – множина даних

PF – множина предикатів (та функцій) на D

$\boldsymbol{C}$ – множина композицій над PF.

Композиційна система (D, PF, $\boldsymbol{C}$) задає дві алгебри:

алгебру (алгебраїчну систему) *даних* (D, PF)

композиційну алгебру предикатів (та функцій) (PF, $\boldsymbol{C}$).

Побудова композиційної алгебри визначає мову логіки відповідного рівня. Терми такої алгебри будуть формулами мови.

Для логік квазіарних предикатів D – це множина ${}^{V}A$ всіх V-A-ІМ над певною множиною базових даних A (вважаємо $A \neq \varnothing$).

Для логік реномінативного і кванторних рівнів PF конкретизуємо як Pr^A

C конкретизується як множина композицій на Pr^A.

Тоді КС набувають вигляду $({}^VA, Pr^A, \boldsymbol{C})$.

Це *композиційні системи V-A-квазіарних предикатів.*

$(Pr^A, \boldsymbol{C})$ – це *композиційні алгебри V-A-квазіарних предикатів*.

Для логік функціональних рівнів PF конкретизується як $Fn^A \cup Pr^A$,

C – як множина композицій на $Fn^A \cup Pr^A$.

Тоді КС набувають вигляду $({}^VA, Fn^A \cup Pr^A, \boldsymbol{C})$

Це *композиційні системи V-A-квазіарних функцій та предикатів.*

Алгебри $(Fn^A \cup Pr^A, \boldsymbol{C})$ – *композиційні алгебри V-A-квазіарних функцій та предикатів*

Композиції пропозиційного рівня

На пропозиційному рівні композиції називають *логічними зв'язками*, вони працюють лише з виробленими предикатами істиннісними значеннями

Визначення логічних зв'язок ¬, ⋁, &, →, ↔. через області істинності та хибності відповідних предикатів $\neg P$, $P \vee Q$, $P \to Q$, $P \& Q$, $P \leftrightarrow Q$:

$T(\neg P) = F(P)$

$F(\neg P) = T(P)$;

$T(P \vee Q) = T(P) \cup T(Q)$;

$F(P \vee Q) = F(P) \cap F(Q)$;

$T(P \& Q) = T(P) \cap T(Q)$;

$F(P \& Q) = F(P) \cup F(Q)$;

$T(P \to Q) = F(P) \cup T(Q)$;

$F(P \to Q) = T(P) \cap F(Q)$;

$T(P \leftrightarrow Q) = (F(P) \cup T(Q)) \cap (F(Q) \cup T(P))$

$F(P \leftrightarrow Q) = (T(P) \cap F(Q)) \cup (F(P) \cap T(Q))$

Основні властивості пропозиційних композицій:

$P \vee Q = Q \vee P$

$P \& Q = Q \& P$

$(P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R)$

$(P \& Q) \& R = P \& (Q \& R)$

$(P \vee Q) \& R = (P \& R) \vee (Q \& R)$

$(P \& Q) \vee R = (P \vee R) \& (Q \vee R)$

$\neg\neg P = P$

$P = P \vee P$ та $P = P \& P$

$\neg(P \vee Q) = (\neg P) \& (\neg Q)$

$\neg(P \& Q) = (\neg P) \vee (\neg Q)$

Композиції $\neg$ та $\vee$ – *базові* пропозиційні композиції.

Композиції $\rightarrow$, $\&$, $\leftrightarrow$ є похідними, вони виражаються через $\neg$ та $\vee$:

$P \rightarrow Q = \neg P \vee Q$;

$P \& Q = \neg(\neg P \vee \neg Q)$;

$P \leftrightarrow Q = (P \rightarrow Q) \& (Q \rightarrow P)$.

Безкванторні композиційно-номінативні логіки

Безкванторні логіки квазіарних предикатів займають проміжне становище між пропозиційною логікою і першопорядковими КНЛ.

В безкванторних логіках не використовуємо композиції квантифікації, характерні для першопорядкових логік.

Безкванторний рівень розпадається на низку підрівнів (в дужках назва):

– реномінативний (РНЛ);

– реномінативний з рівністю (РНЛР);

– реномінативний з строгою рівністю (РНЛРС);

– безкванторно-функціональний (БКНЛ);

– безкванторно-функціональний з рівністю (БКНЛР);

– безкванторно-функціональний з строгою рівністю (БКНЛРС).

На **реномінативному рівні** до логічних зв'язок додамо параметризовану за множиною пар імен композицію *реномінації* $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}} : Pr^{A} \to Pr^{A}$

Композиція реномінації задається так. Для кожного $d \in {}^{V}A$ маємо

$$\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)(d) = P(\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d))$$

Композицію реномінації можна визначити через області істинності та хибності відповідного предиката:

$$T(\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)) = \{d \in {}^{V}A \mid \mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d) \in T(P)\} = (\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}})^{-1}(T(P))$$

$$F(\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)) = \{d \in {}^{V}A \mid \mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d) \in F(P)\} = (\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}})^{-1}(F(P))$$

Композиція R без параметрів діє як тотожне відображення: $\mathrm{R}(P) = P$

Результатом послідовного виконання двох композицій реномінації є їх *згортка*, яка визначається так. Для кожного $d \in {}^{V}A$ маємо

$$\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ \mathrm{R}_{\bar{y}}^{\bar{w}}(P)(d) = \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\mathrm{R}_{\bar{y}}^{\bar{w}}(P))(d) = P(\mathrm{r}_{\bar{y}}^{\bar{w}} \circ \mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d))$$

Згортка композицій реномінації асоціативна та некомутативна

Основні властивості композицій реномінації:

$$\mathrm{R}(\mathrm{P}) = \mathrm{P}$$

$$\mathrm{R}_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(P) = \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$$

$$\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg P) = \neg \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$$

$$\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P \vee Q) = \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P) \vee \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(Q)$$

$$\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P \,\&\, Q) = \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P) \,\&\, \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(Q)$$

$$\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P \to Q) = \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P) \to \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(Q)$$

$$\mathrm{R}_{y,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(P) = \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$$ за умови: $z \in V$ строго неістотне для *P*.

$$\mathrm{R}_{y,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(P) \cong \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$$ за умови: $z \in V$ неістотне для *P*.

Композиція реномінації зберігає монотонність (еквітонність) і антитонність квазіарних функцій та предикатів.

На **реномінативному рівні з рівністю** додатково можна ототожнювати й розрізняти значення предметних імен за допомогою спеціальних 0-арних композицій – параметризованих за іменами предикатів рівності.

Розглядаємо два різновиди таких предикатів:

– слабкої (з точністю до визначеності) рівності $=_{xy}$ (рівень РНЛР)

– строгої (точної) рівності $\equiv_{xy}$ (рівень РНЛРС)

Предикати рівності $=_{xy}$ та $\equiv_{xy}$ задамо через області істинності й хибності:

$$T(=_{xy}) = \{d \in {}^{V}\!A \mid d(x)\!\downarrow\, = d(y)\!\downarrow\};$$

$$F(=_{xy}) = \{d \in {}^{V}\!A \mid d(x)\!\downarrow\, \neq d(y)\!\downarrow\};$$

$$T(\equiv_{xy}) = \{d \in {}^{V}\!A \mid d(x)\!\downarrow\, = d(y)\!\downarrow\} \cup \{d \in {}^{V}\!A \mid d(x)\!\uparrow \text{ та } d(y)\!\uparrow\};$$

$$F(\equiv_{xy}) = \{d \in {}^{V}\!A \mid d(x)\!\downarrow\, \neq d(y)\!\downarrow\} \cup \{d \in {}^{V}\!A \mid d(x)\!\downarrow, d(y)\!\uparrow \text{ або } d(x)\!\uparrow, d(y)\!\downarrow\}.$$

Множиною строго неістотних для $=_{xy}$ та $\equiv_{xy}$ предметних імен є $V \setminus \{x, y\}$.

Предикати $=_{xy}$ часткові однозначні, вони монотонні й еквітонні.

Водночас предикати $\equiv_{xy}$ тотальні однозначні, немонотонні й неееквітонні.

Приклад. $\equiv_{xy}([z\square a]) = T,\ \equiv_{xy}([z\square a, x\square a]) = F,\ \equiv_{xy}([z\square a, x\square a, y\square a]) = T.$

Тому на рівні РНЛРС логіки еквітонних предикатів розглядати не можна.

Предикати $\equiv_{xy}$ подаються через $=_{xy}$ і спеціальні предикати-індикатори εz:

Теорема. Маємо $\equiv_{xy} = (=_{xy} \,\&\, \neg\varepsilon x \,\&\, \neg\varepsilon y) \vee (\varepsilon x \,\&\, \varepsilon y)$.

Маємо співвідношення:

$T(=_{xy}) \subset F(\varepsilon x) \cap F(\varepsilon y)$;

$F(=_{xy}) \subset F(\varepsilon x) \cap F(\varepsilon y)$.

Предикати рівності $=_{xy}$ та $\equiv_{xy}$ також позначаємо $x = y$ та $x \equiv y$.

Властивості предикатів $=_{xy}$ *та* $\equiv_{xy}$.

– кожний предикат $=_{xx}$ є неспростовним

– кожний предикат $\equiv_{xx}$ є тотожно істинним

– для предикатів $=_{xy}$ та $\equiv_{xy}$ маємо рефлексивність та симетричність:

$=_{xy}(d) = =_{xy}(d)$ та $\equiv_{xy}(d) = \equiv_{xy}(d)$ кожного $d \in {}^V\!A$

– для предикатів $=_{xy}$ та $\equiv_{xy}$ маємо транзитивність: для кожного $d \in {}^V\!A$

$\equiv_{xy}(d) = T$ т а $\equiv_{yz}(d) = T \;\Rightarrow\; \equiv_{xz}(d) = T$.

Водночас для предикатів $=_{xy}$ транзитивності по окремих даних немає.

Приклад 1. Для $d = [x□a, z□b]$, де $a \neq b$, маємо $=_{xy}(d)\uparrow$, $=_{yz}(d)\uparrow$, $=_{xz}(d) = F$.

Це означає: $=_{xy}$ та $=_{yz}$ на такому d неспростовні, $=_{xz}$ на такому d хибний.

Для предикатів $=_{xy}$ маємо властивість заміни рівних:

для кожних $P \in Pr^A$ та $d \in {}^V\!A$ $\quad \equiv_{xy}(d) = T \Rightarrow R^{\bar{u},v}_{\bar{z},x}(P)(d) = R^{\bar{u},v}_{\bar{z},y}(P)(d)$

Для предикатів $=_{xy}$ заміни рівних по окремих даних вже немає.

Приклад 2. Для $d = [x□a, z□b]$ маємо $=_{xy}(d)\uparrow$ – $=_{xy}$ на d неспростовний.

Задамо $P([z□b, v□a,]) = T$, $P([z□b]) = F$, тоді $\quad R^{v}_{x}(P)(d) = T,\; R^{v}_{y}(P)(d) = F$

На **безкванторно-функціональному рівні** можна формувати нові аргументи для функцій і предикатів. Це дозволяє ввести параметризовану за іменами композицію суперпозиції.

$(n+1)$-арна композиція ***суперпозиції*** $S^{v_1,\ldots v_n}$ V-квазіарним функціям $f, g_1, \ldots, g_n$ зіставляє V-квазіарну функцію $S^{v_1,\ldots v_n}(f, g_1, \ldots, g_n)$, значення якої $\forall d \in {}^V\!A$ обчислюється так:

$$S^{v_1,\ldots v_n}(f, g_1, \ldots, g_n)(d) = f([v_1 \square g_1(d), \ldots, v_n \square g_n(d)] \cup (d \,\|\, (V \setminus \{v_1, \ldots, v_n\}))).$$

Зрозуміло, що в інших позначеннях

$$S^{v_1,\ldots v_n}(f, g_1, \ldots, g_n)(d) = f(d \nabla [v_1 \square g_1(d), \ldots, v_n \square g_n(d)]).$$

Виділення квазіарних функцій на A та квазіарних предикатів на A індукує виділення суперпозицій двох типів:

– $(Fn^A)^{n+1} \to Fn^A$ функцій у функції (результатом є функція);

– $Pr^A \times (Fn^A)^n \to Pr^A$ функцій у предикати (результатом є предикат).

Суперпозицію без параметрів S трактуємо як тотожне відображення

Виділимо множину *функцій деномінації* $Nf^A = \{{}'v \mid v \in V\}$: ${}'v(d) = d(v)$

Тоді реномінації можна промоделювати за допомогою суперпозицій:

$$R^{v_1,\ldots,v_n}_{x_1,\ldots,x_n}(f) = S^{v_1,\ldots v_n}(f, {}'x_1, \ldots, {}'x_n)$$

На **безкванторно-функціональних рівнях з рівністю** додатково можна ототожнювати й розрізняти предметні значення, що дає змогу ввести спеціальну композицію рівності вигляду $Fn^A \times Fn^A \rightarrow Pr^A$.

Розглядаємо дві її різновидності:

– слабкої (з точністю до визначеності) рівності $=$

– строгої (точної) рівності $\equiv$.

Композиції $=$ та $\equiv$ задаються так:

$$=(f,g)(d)=\begin{cases} T, \text{ якщо } f(d)\downarrow \text{ та } g(d)\downarrow \text{ та } f(d)=g(d), \\ F, \text{ якщо } f(d)\downarrow \text{ та } g(d)\downarrow \text{ та } f(d)\neq g(d), \\ \text{невизначене, якщо } f(d)\uparrow \text{ або } g(d)\uparrow. \end{cases}$$

$$\equiv(f,g)(d)=\begin{cases} T, \text{ якщо } (f(d)\downarrow, g(d)\downarrow \text{ та } f(d)=g(d)) \text{ або } (f(d)\uparrow \text{ та } g(d)\uparrow), \\ F, \text{ якщо } (f(d)\downarrow, g(d)\downarrow, f(d)\neq g(d)) \text{ або } (f(d)\downarrow, g(d)\uparrow) \text{ або } (f(d)\uparrow, g(d)\downarrow) \end{cases}$$

Композиції суперпозиції та $=$ *зберігають еквітонність* квазіарних функцій та предикатів.

Композиція $\equiv$ *еквітонність не зберігає*. Тому на рівні БКНЛРС логіки еквітонних предикатів розглядати не можна

Властивості композицій суперпозиції

S¬) Дистрибутивність суперпозиції щодо ¬:

$$S^{\bar{v}}(\neg P, \bar{f}) = \neg S^{\bar{v}}(P, \bar{f})$$

S$\vee$) Дистрибутивність суперпозиції щодо $\vee$:

$$S^{\bar{v}}(P \vee Q, \bar{f}) = S^{\bar{v}}(P, \bar{f}) \vee S^{\bar{v}}(Q, \bar{f})$$

Аналогічно – властивості дистрибутивності суперпозиції щодо →, &, ↔:

S&) $S^{\bar{v}}(P \,\&\, Q, \bar{f}) = S^{\bar{v}}(P, \bar{f}) \,\&\, S^{\bar{v}}(Q, \bar{f})$

S→) $S^{\bar{v}}(P \to Q, \bar{f}) = S^{\bar{v}}(P, \bar{f}) \to S^{\bar{v}}(Q, \bar{f})$

S↔) $S^{\bar{v}}(P \leftrightarrow Q, \bar{f}) = S^{\bar{v}}(P, \bar{f}) \leftrightarrow S^{\bar{v}}(Q, \bar{f})$

SI) Елімінація суперпозиції без параметрів (тут $\phi \in Fn^A \cup Pr^A$): S(ϕ) = ϕ

SS) Згортка суперпозицій (тут $\phi \in Fn^A \cup Pr^A$, позначення $\bar{u}, \bar{t}, \bar{x}, \bar{r}, \bar{w}, \bar{v}, \bar{s}$ відповідно для $u_1,..., u_n$; $t_1,..., t_n$; $x_1,..., x_k$; $r_1,..., r_k$; $w_1,..., w_k$; $v_1,...,v_m$; $s_1,..., s_m$):

$$S^{\bar{u},\bar{x}}(S^{\bar{x},\bar{v}}(\varphi, \bar{r}, \bar{s}), \bar{t}, \bar{w}) =$$

$$= S^{\bar{u},\bar{x},\bar{v}}(\varphi, \bar{t}, S^{\bar{u},\bar{x}}(r_1, \bar{t}, \bar{w}),..., S^{\bar{u},\bar{x}}(r_k, \bar{t}, \bar{w}), S^{\bar{u},\bar{x}}(s_1, \bar{t}, \bar{w}),..., S^{\bar{u},\bar{x}}(s_m, \bar{t}, \bar{w}))$$

CN) Згортка імен (тут $\phi \in Fn^A \cup Pr^A$):

$$S^{x_1,...,x_m,v_1,..., v_n}(\varphi, 'x_1,...,'x_m, g_1,..., g_n) = S^{v_1,..., v_n}(\varphi, g_1,..., g_n)$$

Зокрема, маємо $S^{x_1,...,x_m}(\varphi, 'x_1,...,'x_m) = \varphi$

SD) Згортка неістотних імен для функцій розіменування:

$$S^{v_1,..., v_n}('x, g_1,...,g_n) = 'x$$ за умови $x \notin \bar{v}$

DF) Спрощення для функцій розіменування:

$$S^{x,v_1,..., v_n}('x, f, g_1,..., g_n) = f$$

Зокрема, маємо $S^{x}('x, f) = f$

CU) Згортка за неістотним іменем (тут $\phi \in Fn^A \cup Pr^A$)

$$S^{x,v_1,..., v_n}(\varphi, f, g_1,..., g_n) = S^{v_1,..., v_n}(\varphi, g_1,..., g_n)$$ якщо x строго неістотне для ϕ

Зокрема, маємо $S^{x}(\varphi, f) = \varphi$

$$S^{x,v_1,..., v_n}(\varphi, f, g_1,..., g_n) \square S^{v_1,..., v_n}(\varphi, g_1,..., g_n)$$ якщо x неістотне для ϕ.

Зокрема, маємо $S^{x}(\varphi, f) \square \varphi$

Властивості слабкої рівності

Тут $P \in Pr^A$ та $h, f, f_1,..., f_n, g, g_1,..., g_n \in Fn^A$.

Rf) рефлексивність:

кожний предикат вигляду $f = f$ неспростовний

Sm) симетричність: $T(f = g) = T(g = f)$ та $F(f = g) = F(g = f)$

це означає: предикати $f = g$ та $g = f$ збігаються

Tr) транзитивність: $T(f = g) \cap T(g = h) \subseteq T(f = h)$

EF) неспростовним є кожний предикат вигляду

$$=(f, g) \to =(S^{z,\overline{v}}(h, f, \overline{r}),\ S^{z,\overline{v}}(h, g, \overline{r}))$$

EP) неспростовним є кожний предикат вигляду

$$=(f, g) \to (S^{z,\overline{v}}(P, f, \overline{r}) \leftrightarrow S^{z,\overline{v}}(P, g, \overline{r}))$$

SE) дистрибутивність суперпозиції щодо рівності:

$$S^{v_1,...v_n}(=(f, h), f_1,..., f_n) \;=\; =(S^{v_1,...v_n}(f, f_1,..., f_n), S^{v_1,...v_n}(h, f_1,..., f_n))$$

Із Tr: кожний предикат вигляду $=(f, g)\ \&\ =(g, h) \to =(f, h)$ неспростовний

Композиція еквіваленції $\leftrightarrow$ для предикатів – аналог відношення слабкої рівності для функцій.

Введемо композицію $\leftrightarrow_{\mathbf{s}}$ *строгої еквіваленції*, яка є аналогом відношення звичайної (строгої) рівності для функцій. Для кожного $d \in D$ задамо:

$$(P \leftrightarrow_{\mathbf{s}} Q)(d) = T \Leftrightarrow P(d) = Q(d),$$
$$(P \leftrightarrow_{\mathbf{s}} Q)(d) = F \Leftrightarrow P(d) \neq Q(d).$$

Тут $P(d) = Q(d)$ означає строгу рівність: значення $P(d)$ та $Q(d)$ збігаються

Для логік часткових чи неоднозначних предикатів $\leftrightarrow_{\mathbf{s}}$ незалежна від $\neg$ і $\vee$.

Властивості строгої рівності

Rfs) кожний предикат вигляду $f \equiv f$ тотожно істинний;

Sms) предикати $f \equiv g$ та $g \equiv f$ збігаються;

Trs) $f \equiv g$ та $g \equiv h$ тотожно істинні $\Rightarrow$ $f \equiv h$ тотожно істинний;

EsF) $f_1 \equiv g_1, \ldots, f_n \equiv g_n$ тотожно істинні $\Rightarrow$

$$S^{v_1,\ldots,v_n}(h, f_1,\ldots, f_n) \equiv S^{v_1,\ldots,v_n}(h, g_1,\ldots, g_n) \quad \text{тотожно істинний;}$$

EsP) $f_1 \equiv g_1, \ldots, f_n \equiv g_n$ тотожно істинні $\Rightarrow$

$$S^{v_1,\ldots,v_n}(P, f_1,\ldots, f_n) \leftrightarrow_s S^{v_1,\ldots,v_n}(P, g_1,\ldots, g_n)$$

SsE) $S^{v_1,\ldots,v_n}(\equiv(g,h), f_1,\ldots, f_n) = \equiv (S^{v_1,\ldots,v_n}(g, f_1,\ldots, f_n),\ S^{v_1,\ldots,v_n}(h, f_1,\ldots, f_n))$

Із Trs: кожний предикат $\equiv(f, g) \ \&\ \equiv(g, h) \rightarrow \equiv(f, h)$ тотожно істинний

Твердження. $\equiv(f, g)$ та $\equiv(g, h)$ тотож. істинні $\Rightarrow \equiv(f, h)$ тотож. істинний

Першопорядкові композиційно-номінативні логіки

Композиції **квантифікації** є ***визначальними*** для першопорядкових логік

Дамо визначення 1-арних композицій $\exists \boldsymbol{x}$ та $\forall \boldsymbol{x}$ для однозначних предикатів. Предикати $\exists \boldsymbol{x}(P)$ та $\forall \boldsymbol{x}(P)$ позначаємо $\exists \boldsymbol{x}P$ та $\forall \boldsymbol{x}P$.

Для кожного $d \in {}^{V}\!A$ задамо:

$$\exists xP(d) = \begin{cases} T, & \text{якщо існує } b \in A: P(d \nabla x \mapsto b) = T, \\ F, & \text{якщо } P(d \nabla x \mapsto a) = F \text{ для всіх } a \in A, \\ \text{невизначене} & \text{в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

$$\forall xP(d) = \begin{cases} F, & \text{якщо існує } b \in A: P(d \nabla x \mapsto b) = F, \\ T, & \text{якщо } P(d \nabla x \mapsto a) = T \text{ для всіх } a \in A, \\ \text{невизначене} & \text{в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Визначення предикатів $\exists \boldsymbol{x}P$ та $\forall \boldsymbol{x}P$ через їх області істинності й хибності

$T(\exists \boldsymbol{x}P) = \{d \in {}^{V}\!A \mid T \in P(d \nabla x \mapsto a)$ для деякого $a \in A\}$

$F(\exists \boldsymbol{x}P) = \{d \in {}^{V}\!A \mid F \in P(d \nabla x \mapsto a)$ для всіх $a \in A\}$

$T(\forall \boldsymbol{x}P) = \{d \in {}^{V}\!A \mid T \in P(d \nabla x \mapsto a)$ для всіх $a \in A\}$

$F(\forall \boldsymbol{x}P) = \{d \in {}^{V}\!A \mid F \in P(d \nabla x \mapsto a)$ для деякого $a \in A\}$.

Композиція $\forall \boldsymbol{x}$ є похідною, вона подається так: $\forall \boldsymbol{x}P \equiv \neg \exists \boldsymbol{x} \neg P$.

Властивості композицій квантифікації

1) Комутативність однотипних кванторів:

$\exists \boldsymbol{x} \exists \boldsymbol{y} P = \exists \boldsymbol{y} \exists \boldsymbol{x} P;$

$\forall \boldsymbol{x} \forall \boldsymbol{y} P = \forall \boldsymbol{y} \forall \boldsymbol{x} P.$

2) Закони де Моргана для кванторів:

$\neg \exists \boldsymbol{x} P = \forall \boldsymbol{x} \neg P;$

$\neg \forall \boldsymbol{x} P = \exists \boldsymbol{x} \neg P.$

3) Неістотність квантифікованих імен:

$\exists \boldsymbol{x} \exists \boldsymbol{x} P = \exists \boldsymbol{x} P;$

$\exists \boldsymbol{x} \forall \boldsymbol{x} P = \forall \boldsymbol{x} P;$

$\forall \boldsymbol{x} \exists \boldsymbol{x} P = \exists \boldsymbol{x} P;$

$\forall \boldsymbol{x} \forall \boldsymbol{x} P = \forall \boldsymbol{x} P.$

4) Закони дистрибутивності кванторів щодо $\vee$ та &:

$\exists \boldsymbol{x} P \vee \exists \boldsymbol{x} Q = \exists \boldsymbol{x} (P \vee Q);$

$\forall \boldsymbol{x} P \,\&\, \forall \boldsymbol{x} Q = \forall \boldsymbol{x} (P \& Q).$

Властивості кванторів, пов'язані з неістотністю імен

– ім'я $x \in V$ строго неістотне для предикатів $\exists xP$ та $\forall xP$;

– ім'я $x \in V$ строго неістотне для $P \Leftrightarrow P = \forall xP \Leftrightarrow P = \exists xP$;

– ім'я $x \in V$ неістотне для $P \Leftrightarrow P \cong \forall xP \Leftrightarrow P \cong \exists xP$.

Залучаючи до розгляду *реномінації та суперпозиції*, маємо:

Ren) $\exists yP = \exists z\mathrm{R}^{y}_{z}(P)$, якщо z строго неістотне для P

R∃) $\mathrm{R}^{\bar v}_{\bar x}(\exists yP) = \exists y\mathrm{R}^{\bar v}_{\bar x}(P)$, якщо $y \notin \{\bar v, \bar x\}$

R∃∃) $\mathrm{R}^{\bar v}_{\bar x}(\exists yP) = \exists z\mathrm{R}^{\bar v, y}_{\bar x, z}(P)$, якщо z строго неістотне для P та $z \notin \{\bar v, \bar x\}$

R∃R) $\mathrm{R}^{\bar u, x}_{\bar v, y}(\exists xP) = \mathrm{R}^{\bar u}_{\bar v}(\exists xP)$

зокрема, $\mathrm{R}^{x}_{y}(\exists xP) = \exists xP$

Ці властивості можна переформулювати для $\forall x$.

За умови неістотності імені z в Ren та R∃∃ маємо *слабку* рівність

Неістотність верхніх імен в реномінаціях:

$\exists y\mathrm{R}^{y,\bar v}_{z,\bar x}(P) = \mathrm{R}^{y,\bar v}_{z,\bar x}(\exists yP)$ та $(\forall y)\mathrm{R}^{y,\bar v}_{z,\bar x}(P) = \mathrm{R}^{y,\bar v}_{z,\bar x}(\forall yP)$ при $y \notin \{\bar v, \bar x\}$

S$\exists$b) Обмежена дистрибутивність суперпозиції щодо $\exists x$:

$$S^{\bar{v}}(\exists xP, \bar{f}) \cong \exists x S^{\bar{v}}(P, \bar{f})$$

S$\forall$b) Обмежена дистрибутивність суперпозиції щодо $\forall x$:

$$S^{\bar{v}}(\forall xP, \bar{f}) \cong \forall x S^{\bar{v}}(P, \bar{f})$$

Для S$\exists$b та S$\forall$b умови: $x \notin \{v_1, ..., v_n\}$ та x неістотне для $f_1, ..., f_n$.

S$\exists$) Спеціальна дистрибутивність суперпозиції щодо $\exists x$ ($x \notin \{v_1, ..., v_n\}$):

$$S^{v_1,...v_n}(\exists xP, S^x(f_1, v_1), ..., S^x(f_n, v_n)) = \exists x S^{v_1,...v_n}(P, S^x(f_1, v_1), ..., S^x(f_n, v_n))$$

S$\forall$) Спеціальна дистрибутивність суперпозиції щодо $\forall x$ ($x \notin \{v_1, ..., v_n\}$):

$$S^{v_1,...v_n}(\forall xP, S^x(f_1, v_1), ..., S^x(f_n, v_n)) = \forall x S^{v_1,...v_n}(P, S^x(f_1, v_1), ..., S^x(f_n, v_n))$$

Rm1. Обмежувальні умови дистрибутивності та спеціальної дистрибутивності суперпозиції щодо кванторів є істотними.

Rm2. Рівність з точністю до визначеності $\cong$ для S$\exists$b та S$\forall$b.

Задамо еквітонні f та P: $P(d)\uparrow$ при $v \notin asn(d)$ та $P([x\Box 0, y\Box 0, v\Box 0]) = T$; $f(d)\uparrow$ при $x \notin asn(d)$ та $f(d) = 0$ при $x \in asn(d)$.

Тоді x неістотне для f, $\exists x S^v(P, f)([y\Box 0]) = T$ та $S^v(\exists xP, f)([y\Box 0])\uparrow$.

Rm3. Для аналогічних властивостей R$\exists$s та R$\forall$s рівність строга !

Теорема 1. *Композиції* $\neg$, $\vee$, $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}$, $\exists x$ *зберігають*:

– *монотонність та антитонність квазіарних предикатів*

– *еквітонність однозначних квазіарних предикатів*

– *повнототальність і фінарність квазіарних предикатів*

Наслідок 1. *Класи монотонних та антитонних квазіарних предикатів замкнені відносно композицій* $\neg$, $\vee$, $\rightarrow$, $\&$, $\leftrightarrow$, $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}$, $\exists x$, $\forall x$.

Класи еквітонних і повнототальних однозначних квазіарних предикатів замкнені відносно композицій $\neg$, $\vee$, $\rightarrow$, $\&$, $\leftrightarrow$, $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}$, $\exists x$, $\forall x$.

Теорема 2. 1. *Композиції* $S^{\bar{v}}$, $=$ *зберігають*:

– *еквітонність однозначних квазіарних фукцій та предикатів*

– *повнототальність і фінарність квазіарних фукцій та предикатів*

2. *Композиції* $\equiv$ *зберігають повнототальність і фінарність квазіарних фукцій та предикатів*

Наслідок 2. *Класи еквітонних і повнототальних однозначних квазіарних фукцій та предикатів замкнені відносно композицій* $S^{\bar{v}}$, $=$

ЧИСТІ ПЕРШОПОРЯДКОВІ КОМПОЗИЦІЙНІ АЛГЕБРИ

Композиції $\neg, \vee, \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x$ зберігають:

1) однозначність та тотальність квазіарних предикатів;

2) монотонність та антитонність квазіарних предикатів

Твердження 1. $\overline{P} = \neg\tilde{P}$ та $\tilde{P} = \neg\overline{P}$

Твердження 2. 1) $\neg\perp = \perp,\ \perp \vee \perp = \perp;\ \neg□ = □,\ □ \vee □ = □;$

2) $\neg\mathrm{T} = \mathrm{F},\ \neg\mathrm{F} = \mathrm{T},\ \mathrm{T} \vee \mathrm{T} = \mathrm{T},\ \mathrm{T} \vee \mathrm{F} = \mathrm{F} \vee \mathrm{T} = \mathrm{T}, \mathrm{F} \vee \mathrm{F} = \mathrm{F};$

3) $\mathrm{T} \vee \perp = \perp \vee \mathrm{T} = \mathrm{T},\ \mathrm{F} \vee \perp = \perp \vee \mathrm{F} = \perp;$

$\mathrm{T} \vee □ = □ \vee \mathrm{T} = □,\ \mathrm{F} \vee □ = □ \vee \mathrm{F} = □;\ \perp \vee □ = □ \vee \perp = \mathrm{T}.$

Твердження 3. 1) $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\perp) = \perp,\ \exists x(\perp) = \perp,\ \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\bullet) = \bullet,\ \exists x(\bullet) = \bullet;$

2) $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\mathrm{T}) = \mathrm{T},\ \exists x(\mathrm{T}) = \mathrm{T};\ \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\mathrm{F}) = \mathrm{F},\ \exists x(\mathrm{F}) = \mathrm{F}$

Теорема. Наступні класи предикатів замкнені щодо композицій

$$\neg, \vee, \&, \to, \leftrightarrow, \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x, \forall x$$

1) класи *P*-предикатів, *T*-предикатів, *TS*-предикатів

2) класи монотонних, антитонних, еквітонних предикатів

3) множини $\{\perp\}, \{□\}, \{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}, \{\perp, \mathrm{T}, \mathrm{F}\}\ \}, \{□, \mathrm{T}, \mathrm{F}\}\ \}, \{\perp, □, \mathrm{T}, \mathrm{F}\}$

Композиційну алгебру $QR_A^V = (PrR_A^V, CQ)$, де $CQ = \{\neg, \vee, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x\}$ назвемо *чистою першопорядковою алгеброю квазіарних предикатів*.

Таким чином, можна виділити підалгебри алгебри QR_A^V

$QP_A^V = (PrP_A^V, CQ)$ – алгебра *P*-предикатів;

$QT_A^V = (PrT_A^V, CQ)$ – алгебра *T*-предикатів;

$QTS_A^V = (PrTS_A^V, CQ)$ – алгебра *TS*-предикатів;

маємо $QTS_A^V \subseteq QP_A^V$ та $QTS_A^V \subseteq QT_A^V$

$QRM_A^V = (PrRM_A^V, CQ)$ – алгебра монотонних *R*-предикатів;

$QRA_A^V = (PrRA_A^V, CQ)$ – алгебра антитонних *R*-предикатів;

$QPE_A^V = (PrPE_A^V, CQ)$ – алгебра еквітонних *P*-предикатів;

маємо $QPE_A^V \subseteq QP_A^V$ та $QPE_A^V \subseteq QRM_A^V$

$QTA_A^V = (PrTA_A^V, CQ)$ – алгебра антитонних *T*-предикатів;

маємо $QTA_A^V \subseteq QT_A^V$ та $QTA_A^V \subseteq QRA_A^V$

Сингулярні алгебри $\perp_{V-A} = (\{\perp_A^V\}, CQ)$ та $\bullet_{V-A} = (\{\bullet_A^V\}, CQ)$

для них маємо $\perp_{V-A} \in QPE_A^V$ та $\bullet_{V-A} \in QTA_A^V$

алгебра $\mathrm{B}_{V-A} = (\{\mathrm{T}_A^V, \mathrm{F}_A^V\}, CQ)$

маємо $\mathrm{B}_{V-A} \in QTS_A^V$, $\mathrm{B}_{V-A} \in QPE_A^V$, $\mathrm{B}_{V-A} \in QTA_A^V$

алгебри $\mathrm{BL}_{V-A} = (\{\perp_A^V, \bullet_A^V, \mathrm{T}_A^V, \mathrm{F}_A^V\}, CQ)$

$\mathrm{BP}_{V-A} = (\{\perp_A^V, \mathrm{T}_A^V, \mathrm{F}_A^V\}, CQ)$ та $\mathrm{BT}_{V-A} = (\{\bullet_A^V, \mathrm{T}_A^V, \mathrm{F}_A^V\}, CQ)$

маємо $\perp_{V\text{-}A}, \mathrm{B}_{V\text{-}A} \square \mathrm{BP}_{V\text{-}A} \square \mathrm{BL}_{V\text{-}A}$; $\square_{V\text{-}A}, \mathrm{B}_{V\text{-}A} \square \mathrm{BT}_{V\text{-}A} \square \mathrm{BL}_{V\text{-}A}$;

$\mathrm{BP}_{V-A} \in QPE_A^V$, $\mathrm{BT}_{V-A} \in QTA_A^V$, $\mathrm{BL}_{V-A} \in QRM_A^V$, $\mathrm{BL}_{V-A} \in QRA_A^V$

Тут $\aleph \square \Re$ позначає: $\aleph$ є підалгеброю алгебри $\Re$

Задамо відображення *дуалізації* так: $\delta : PrR_A^V \to PrR_A^V$ $\quad \delta(P) = \tilde{P}$

Відображення дуалізації інволютивне: $\delta(\delta(P)) = P$

Твердження 4. $\delta(\mathrm{T}) = \mathrm{T}$, $\delta(\mathrm{F}) = \mathrm{F}$, $\delta(\perp) = \square$, $\delta(\square) = \perp$;

$$\delta(PrP_A^V) = PrT_A^V,\ \ \delta(PrT_A^V) = PrP_A^V,\ \ \delta(PrTS_A^V) = PrTS_A^V;$$

$$\delta(PrPE_A^V) = PrTA_A^V,\ \ \delta(PrTA_A^V) = PrPE_A^V,$$

$$\delta(PrRA_A^V) = PrRM_A^V,\ \ \delta(PrRM_A^V) = PrRA_A^V$$

Алгебри Pr_1 та Pr_2 дуальні, якщо $\delta(\mathrm{Pr}_1) = \mathrm{Pr}_2$ та $\delta(\mathrm{Pr}_2) = \mathrm{Pr}_1$.

Маємо *пари дуальних алгебр*

QP_A^V та QT_A^V, QPE_A^V та QTA_A^V, QRM_A^V та QRA_A^V,
$\perp_{V\text{-}A}$ та $\square_{V\text{-}A}$, $\mathrm{BP}_{V\text{-}A}$ та $\mathrm{BT}_{V\text{-}A}$

Алгебри QR_A^V, QTS_A^V, $\mathrm{B}_{V\text{-}A}$, $\mathrm{BL}_{V\text{-}A}$ *автодуальні*

ОСОБЛИВОСТІ КВАЗІАРНИХ ПРЕДИКАТІВ

Неспростовними чи невиконуваними можуть бути лише однозначні предикати. При цьому властивості неспростовності й виконуваності природно пов'язані:

Твердження. Предикат P неспростовний $\Leftrightarrow \neg P$ невиконуваний.

P неспростовний $\Leftrightarrow F(P) = \varnothing \Leftrightarrow T(\neg P) = \varnothing \Leftrightarrow \neg P$ невиконуваний.

Для часткових предикатів невірні деякі важливі закони класичної логіки.

Приклад 1. modus ponens невірне для загального випадку квазіарних предикатів.

Задамо P як $\perp$, Q – як тотожно хибний предикат. Тоді $P \rightarrow Q$ теж $\perp$.

Отже, P та $P \rightarrow Q$ частково істинні, водночас Q – тотожно хибний.

Приклад 2. Задамо предикат P як тотожно істинний, Q – як $\perp$, S – як тотожно хибний. Тоді $P \leftrightarrow Q$ та $Q \leftrightarrow S$ частково істинні, водночас $P \leftrightarrow S$ тотожно хибний.

Приклад 3. Нехай для предикатів p, q, s маємо $p(d) = T$, $q(d)\uparrow$, $s(d) = F$;

тоді $p(d) \cong q(d)$ та $q(d) \cong s(d)$, але невірно, що $p(d) \cong s(d)$.

Приклади 2, 3 заперечують транзитивність еквіваленції та слабкої рівності. Саме ця нетранзитивність є причиною невиконання деяких законів класичної логіки для класів часткових предикатів, які використовують слабко рівні клінієві зв'язки.

Необхідною й достатньою умовою коректності modus ponens у таких класах часткових предикатів є *еквітранзитивність* – транзитивність відношення □ слабкої рівності предикатів, тобто транзитивність еквіваленції

Отже, відмінність логіки часткових предикатів і логіки класичної виявляється вже на пропозиційному рівні. Більш того, предикати прикладів 3 та 2 еквітонні.

Для класу еквітонних предикатів умова еквітранзитивності не виконується. Водночас вона справджується для класу повнототальних еквітонних предикатів.

Приклад 4. Для загального випадку квазіарних предикатів

традиційні закони $T(P) \subseteq T(\exists xP)$ та $T(\forall xP) \subseteq T(P)$ невірні

Задамо предикат P так:

$P(d) = T$ при $x \notin asn(d)$ та $P(d) = F$ при $x \in asn(d)$.

Тоді для таких d, що $x \notin asn(d)$, маємо $P(d) = T$ та $\exists xP(d) = F$.

Задамо тепер предикат P так:

$P(d) = F$ при $x \notin asn(d)$ та $P(d) = T$ при $x \in asn(d)$.

Тоді для таких d, що $x \notin asn(d)$, маємо $\forall xP(d) = T$ та $P(d) = F$.

Для еквітонних предикатів закони $T(P) \subseteq T(\exists xP)$ та $T(\forall xP) \subseteq T(P)$ вірні

Приклад 5. Існують квазіарні предикати: $P \Box \forall xP$ і невірно $P \Box \exists xP$.

Нехай $A = \{a, b\}$. Задамо предикат P так:

$P(d) = F$ при $x \notin asn(d)$, $P(d \nabla x \Box a) = T$ та $P(d \nabla x \Box b)\uparrow$.

Тоді для всіх $d \in {}^{V}A$ маємо $\forall xP(d)\uparrow$, тому $P \Box \forall xP$.

Водночас $P(d) = F$ при $x \notin asn(d)$, але $\exists xP(d) = T$ для всіх $d \in {}^{V}A$,

тому невірно $P \Box \exists xP$.

Приклад 6. Існують квазіарні предикати: $P \Box \exists xP$ і невірно $P \Box \forall xP$.

Нехай $A = \{a, b\}$. Задамо предикат P так:

$P(d) = T$ при $x \notin asn(d)$, $P(d \nabla x \Box a) = F$ та $P(d \nabla x \Box b)\uparrow$.

Тоді для всіх $d \in {}^{V}A$ маємо $\exists xP(d)\uparrow$, тому $P \Box \exists xP$.

Водночас $P(d) = T$ при $x \notin asn(d)$, але $\forall xP(d) = F$ для всіх $d \in {}^{V}A$,

тому невірно $P \Box \forall xP$

Наведені співвідношення, пов'язані з *елімінацією кванторів*, видаються цілком очевидними, хоча це не так.

$$T(\mathrm{R}_y^x(P)) \overset{(\mathrm{TR}\exists)}{\subseteq} T(\exists x(P))$$

$$F(\exists x(P)) \overset{(\mathrm{FR}\exists)}{\subseteq} F(\mathrm{R}_y^x(P))$$

$$T(\forall x(P)) \overset{(\mathrm{TR}\forall)}{\subseteq} T(\mathrm{R}_y^x(P))$$

$$F(\mathrm{R}_y^x(P)) \overset{(\mathrm{FR}\forall)}{\subseteq} F(\forall x(P))$$

Теорема 1. 1) *Для загального випадку квазіарних предикатів невірне кожне із співвідношень* $\mathrm{TR}\exists$, $\mathrm{FR}\exists$, $\mathrm{TR}\forall$, $\mathrm{FR}\forall$;

2) *для монотонних предикатів*:

– *вірні* $\mathrm{TR}\exists$ *та* $\mathrm{FR}\forall$,

– *невірні* $\mathrm{FR}\exists$ *та* $\mathrm{TR}\forall$;

3) *для антитонних предикатів*:

– *вірні* $\mathrm{FR}\exists$ *та* $\mathrm{TR}\forall$,

– *невірні* $\mathrm{TR}\exists$ *та* $\mathrm{FR}\forall$.

Окремий випадок співвідношень TR$\exists$, FR$\exists$, TR$\forall$, FR$\forall$:

$T(P) \subseteq T(\exists x(P))$ (T$\exists$)

$F(\exists x(P)) \subseteq F(P)$ (F$\exists$)

$T(\forall x(P)) \subseteq T(P)$ (T$\forall$)

$F(P) \subseteq F(\forall x(P))$ (F$\forall$)

Наслідок. 1) *Для загального випадку квазіарних предикатів невірне кожне із співвідношень* T$\exists$, F$\exists$, T$\forall$, F$\forall$ *невірні*;

2) *для монотонних предикатів*:

– *вірні* T$\exists$ *та* F$\forall$,

– *невірні* F$\exists$ *та* T$\forall$;

3) *для антитонних предикатів*:

– *вірні* F$\exists$ *та* T$\forall$,

– *невірні* T$\exists$ *та* F$\forall$.

Для адекватного опису властивостей елімінації кванторів використаємо спеціальні предикати-індикатори εz.

Теорема 2. Справджуються наступні співвідношення:

$$T(R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(P)) \cap F(\varepsilon y) \subseteq T(R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists xP))$$
$$F(R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists xP)) \cap F(\varepsilon y) \subseteq F(R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(P))$$
$$T(\mathrm{R}^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(P)) \subseteq T(\varepsilon y) \cup T(\mathrm{R}^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists xP))$$
$$F(\mathrm{R}^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists xP)) \subseteq T(\varepsilon y) \cup F(\mathrm{R}^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(P))$$

Використовуючи предикати-індикатори Ez, це можна переписати так:

$$T(\mathrm{R}^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(P)) \cap T(Ey) \subseteq T(\mathrm{R}^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists xP))$$
$$F(\mathrm{R}^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists xP)) \cap T(Ey) \subseteq F(\mathrm{R}^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(P))$$
$$T(\mathrm{R}^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(P)) \subseteq F(Ey) \cup T(\mathrm{R}^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists xP))$$
$$F(\mathrm{R}^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists xP)) \subseteq F(Ey) \cup F(\mathrm{R}^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(P))$$

Як окремі випадки, а також використовуючи $\forall x$, отримуємо:

$$T(R^{x}_{y}(P)) \cap F(\varepsilon y) \subseteq T(\exists xP) \qquad T(\forall xP) \cap F(\varepsilon y) \subseteq T(R^{x}_{y}(P))$$
$$F(\exists xP) \cap F(\varepsilon y) \subseteq F(R^{x}_{y}(P)) \qquad F(R^{x}_{y}(P)) \cap F(\varepsilon y) \subseteq F(\forall xP)$$