Функция нескольких переменных

Основные понятия

Пусть имеется $n+1$ переменная $x_1, x_2, ..., x_n, y$, которые связаны между собой так, что каждому набору числовых значений переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ соответствует единственное значение переменной y.

Тогда говорят, что задана функция ***f*** от ***n*** переменных. Число ***y***, поставленное в соответствие набору $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется значением функции ***f*** в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, что записывается в виде формулы

$$y=f(x_1,x_2,\ldots, x_n) \quad \text{или}$$

$$y=y(x_1,x_2,\ldots, x_n).$$

Будем говорить, что задана функция двух переменных, если любой паре чисел (***x;y***) из некоторого множества ***D*** поставлено в соответствие единственное число, которое обозначается ***f***(***x;y***) и называется значением функции ***f*** в точке (***x;y***).

Множество ***D*** называется **областью определения** функции.

График функции двух переменных есть множество точек $(x;y;f(x;y))$, где $(x;y)\in D$.

График представляет собой некоторую поверхность. Пример такой поверхности приводится на рисунке 1.

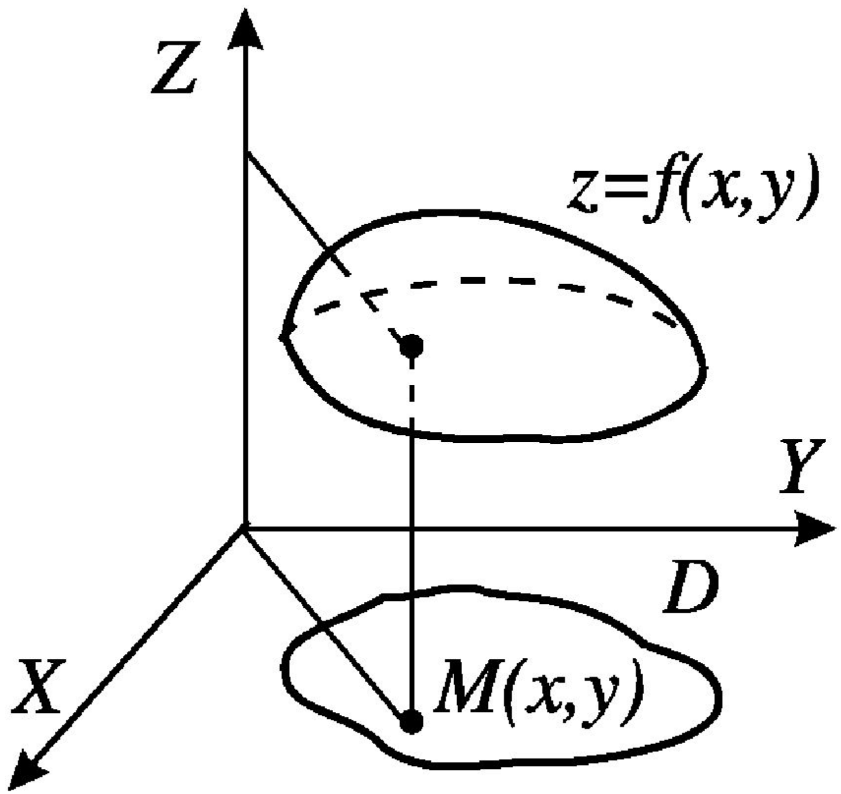


Рис. 1

Пусть δ - некоторое положительное число.

***δ*-окрестностью** *Vδ* точки $\boldsymbol{M_0(x_0;y_0)}$ называется множество всех точек, координаты $\boldsymbol{(x\ ;\ y)}$ которых удовлетворяют Неравенствам:

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

Точка $\boldsymbol{M_0(x_0;y_0)}$ называется ***точкой минимума*** функции $\boldsymbol{z = f(x;y)}$, если существует такое положительное число $\boldsymbol{\delta}$, что из условия $\boldsymbol{M(x;y) \in V\delta\,(x_0;y_0)}$ следует $\boldsymbol{f(x;y) > f(x_0;y_0)}$.

Точка $M_0(x_0;y_0)$ называется ***точкой максимума*** функции $z = f(x;y)$, если существует такое положительное число δ, что из условия $M(x;y) \in V\delta\,(x_0;y_0)$ следует: $f(x;y) < f(x_0;y_0)$.

Точки минимума и максимума называются ***точками экстремума***.

Число *A* называется ***пределом функции*** $z = f(x;y)$ в точке $M_0(x_0;y_0)$:

$$A = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x;y) \Leftrightarrow A = \lim_{M \to M_0} f(M)$$

если для произвольного числа $\boldsymbol{\varepsilon > 0}$ найдется такое число $\boldsymbol{\delta > 0}$, что для всех точек $\boldsymbol{M(x;y)}$ из δ-окрестности точки $\boldsymbol{M_0(x_0;y_0)}$ выполняется неравенство

$$\boldsymbol{|f(x;y) - A| < \varepsilon} \, .$$

Функция $z = f(x;y)$ называется ***непрерывной*** в точке $M_0(x_0;y_0)$, если

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$$

Частные производные

Частной производной по x функции $z = f(x;y)$ в точке $M_0(x_0;y_0)$ называется предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x_0 + \Delta x; y_0\right) - f\left(x_0; y_0\right)}{\Delta x}$$

если этот предел существует.

Совершенно аналогично можно определить ***частную производную по у функции z = f(x;y) в точке $M_0(x_0;y_0)$:***

$$\frac{\partial f\left(x_0;y_0\right)}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f\left(x_0;y_0+\Delta y\right)-f\left(x_0;y_0\right)}{\Delta y}$$

Сами частные производные могут являться функциями от нескольких переменных на некотором множестве. У этих функций тоже могут существовать частные производные по ***x*** и по ***y***. Они называются ***вторыми частными производными или частными производными второго порядка*** и обозначаются z_{xx}'', z_{yy}'', z_{xy}''

или

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2};\frac{\partial^2 f}{\partial y^2};\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Если смешанные частные производные второго порядка непрерывны, то они не зависят от того, в какой последовательности вычислялись частные производные по x и по y.

Дифференциал функции двух переменных

Дифференциал представляет собой главную часть приращения функции, линейную относительно приращений её аргументов.

Дифференцируемая в точке функция обязательно ***непрерывна*** в этой точке.

Функция ***дифференцируема*** в точке, если обе частные производные этой функции непрерывны в этой точке.

На рисунке 1 график функции $z = f(x;y)$ представляет собой поверхность F. Длина отрезка P_0P равна значению функции z в точке P_0, то есть $|P_0P| = f(x_0;y_0)$.

Дифференциал функции в точке **P_0 равен** $|R_2R_1|$.

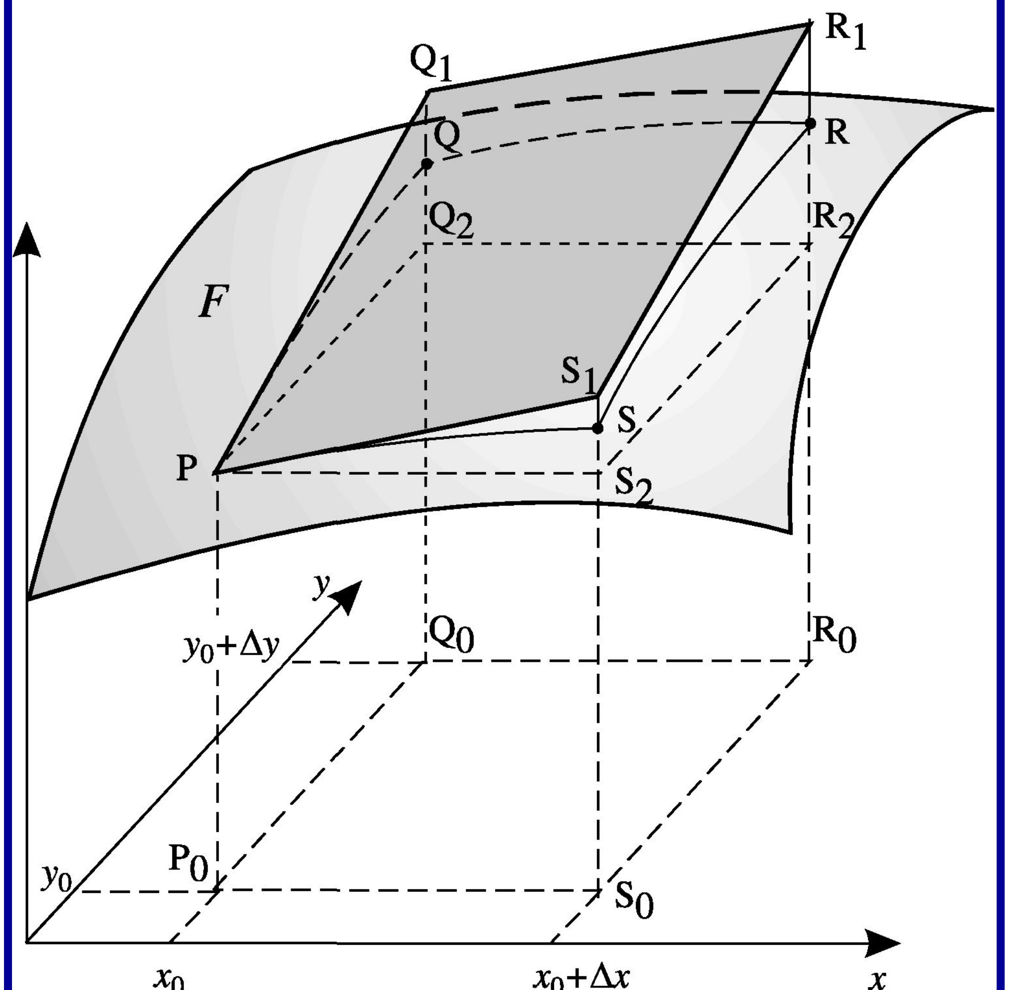


Рис. 1

Так как $df(x_0;y_0) \approx \Delta f(x_0;y_0)$, дифференциал df даёт приближенное значение приращения функции при малых значениях приращений аргументов.

Производная по направлению

Производной функции $z = f(x;y)$ в точке $M_0(x_0;y_0)$ по направлению называется число

$$\frac{\partial f\left(x_0, y_0\right)}{\partial l} = \frac{\partial f\left(x_0, y_0\right)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f\left(x_0, y_0\right)}{\partial y}\sin\alpha$$

Градиентом или вектором-градиентом функции *f*(*x;y*) в точке (*x;y*) $\in$ *G* называется вектор, который задается формулой

$$\overline{grad}\, f(x;y) = \left\{ \frac{\partial f(x;y)}{\partial x}; \frac{\partial f(x;y)}{\partial y} \right\}$$

Производная по направлению от функции $z = f(x;y)$ в точке $M_0(x_0;y_0)$ достигает наибольшего значения, если это направление совпадает с направлением вектора-градиента функции в рассматриваемой точке, так как $\boldsymbol{\cos\beta \le 1}$, и равенство достигается только если $\boldsymbol{\beta = 0}$.

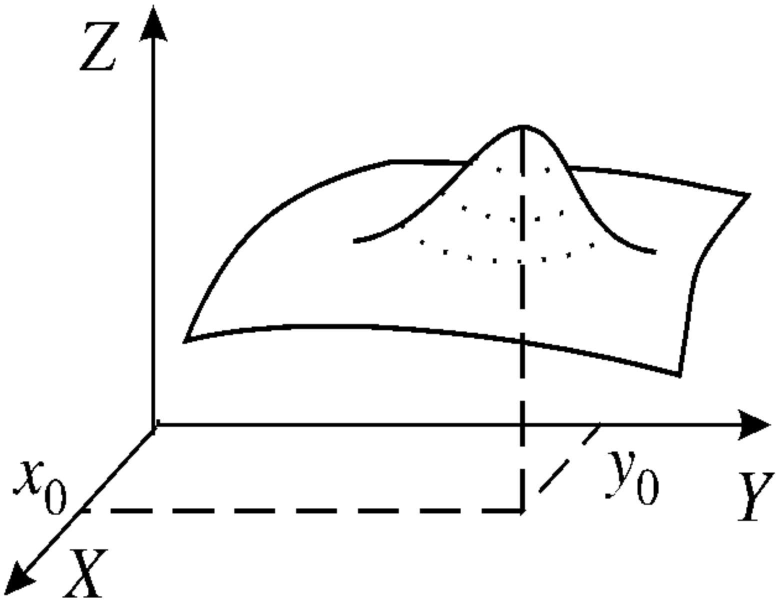
Вектор-градиент функции в точке направлен в сторону наискорейшего возрастания функции в этой точке.

Экстремум функции двух переменных

Точка $M_0(x_0;y_0)$ является ***точкой максимума (минимума)*** функции $z = f(x;y)$, если найдется такая окрестность точки M_0, что для всех точек $M(x;y)$ из этой окрестности выполняется неравенство

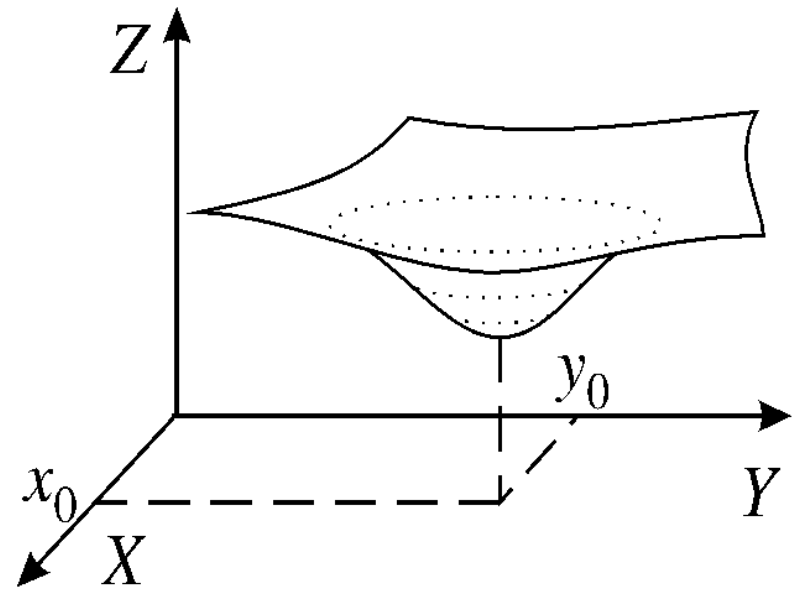
$$f(x;y) < f(x_0;y_0) \quad (f(x;y) > f(x_0;y_0)).$$

Точки максимума и минимума называются ***точками экстремума***.



$M_0(x_0,y_0)$ - точка максимума.

Рис.1



$M_0(x_0,y_0)$ - точка минимума.

Рис. 2

Пусть $z_x'(x_0,y_0)=0$ и $z_y'(x_0,y_0) = 0$, а вторые частные производные функции z непрерывны в некоторой окрестности точки $(x_0;y_0)$.

Введем обозначения:

$$A = z_{xx}''(x_0;y_0);$$

$$B = z_{xy}''(x_0;y_0);$$

$$C = z_{yy}''(x_0;y_0);$$

$$D = AC - B^2.$$

Тогда, если ***D < 0***, то в точке $(x_0;y_0)$ ***экстремума нет.***

Если ***D > 0***, причем если ***A > 0***, то в точке $(x_0;y_0)$ функции z имеет ***минимум***, а если ***A < 0***, то ***максимум.***

Если ***D = 0***, то экстремум может быть, а может и не быть.

Метод наименьших квадратов

Пусть проводится n однородных испытаний или экспериментов, и результатом каждого испытания является пара чисел – значений некоторых переменных x и y. Испытание с номером i приводит к числам x_i, y_i.

Итогом этих испытаний является таблица:

x	x_1	x_2	…	x_n
y	y_1	y_2	…	y_n

где каждому числу x_i (величину X рассматриваем как независимый показатель или фактор) поставлено в соответствие число y_i (величину Y рассматриваем как зависимый показатель – результат).

В качестве значений x_i часто рассматриваются моменты времени: t_1, t_2, ..., t_n, взятые через равные промежутки. Тогда таблица

t	t_1	t_2	…	t_n
y	y_1	y_2	…	y_n

называется **временным рядом**.

Пусть точки с координатами (x_i, y_i) группируются на плоскости вдоль некоторой прямой. Задача заключается в том, чтобы найти параметры a_0 и a_1 этой прямой:

$$y = a_0 + a_1 x, \qquad (1)$$

причем это нужно сделать так, чтобы она лучше любой другой прямой соответствовала расположению на плоскости экспериментальных точек (x_i, y_i).

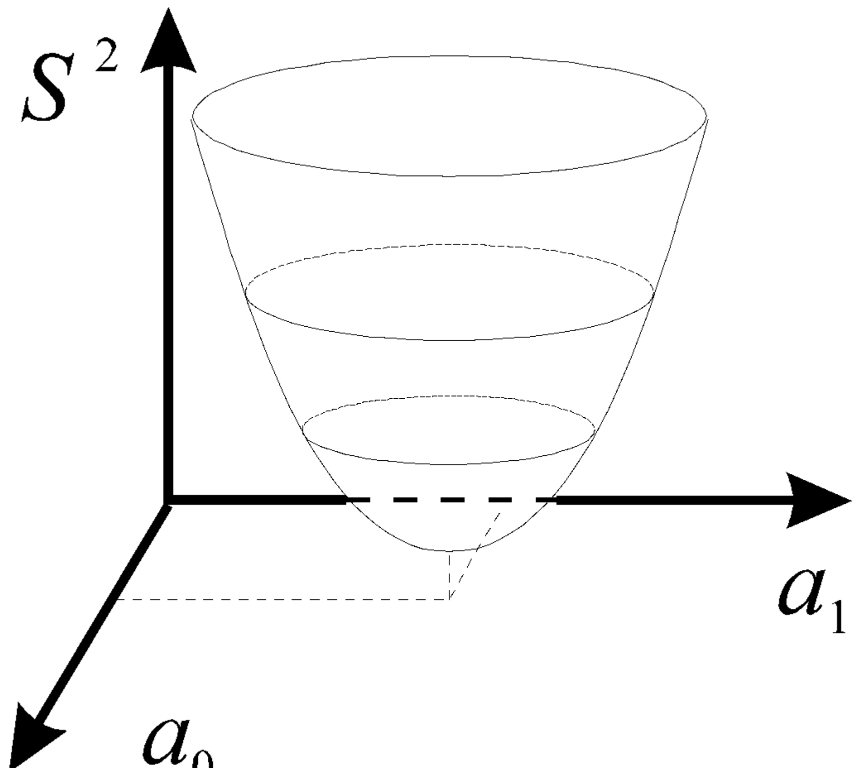
Признаком наилучшей прямой считается минимум суммы квадратов отклонений фактических значений *y*, полученных из таблицы, от вычисленных по формуле (1). Эта сумма квадратов рассчитывается по формуле

$$\boldsymbol{S^2=(y_1-(a_0+a_1x_1))^2+(y_2-(a_0+a_1x_2))^2+\ldots}$$

$$\boldsymbol{+(y_n-(a_0+a_1x_n))^2=}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\left(a_0+a_1x_i\right)\right)^2.$$

Можно показать, что график функции S^2 выглядит примерно так, как изображено на рисунке:



Точку минимума можно искать, используя лишь необходимые условия экстремума:

$$S_{a_0}^{2\,\prime} = \sum_{i=1}^{n} \left(-2\left(y_i - a_0 - a_1 x_i \right) \right) = 0 \tag{2}$$

$$S_{a_1}^{2\,\prime} = \sum_{i=1}^{n} \left(-2x_i \left(y_i - a_0 - a_1 x_i \right) \right) = 0 \tag{3}$$

Уравнения **(2)** и **(3)** можно преобразовать:

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum x_i = \sum y_i; \\ a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 = \sum x_i y_i. \end{cases} \quad \mathbf{(4)}$$

Получилась так называемая ***система нормальных уравнений*** относительно неизвестных величин $\boldsymbol{a_0}$ и $\boldsymbol{a_1}$.

Формула **(1)** с параметрами a_0, a_1 определенными из системы **(4)**, называется ***уравнением регрессии***.

Прямая линия, описываемая этим уравнением, называется ***линией регрессии***.

Для временных рядов обычно вместо слова “регрессия” употребляется слово ***тренд***.