ТЕОРИЯ АБСТРАКТНЫХ АВТОМАТОВ

Преподаватель: Солодухин Андрей Геннадьевич

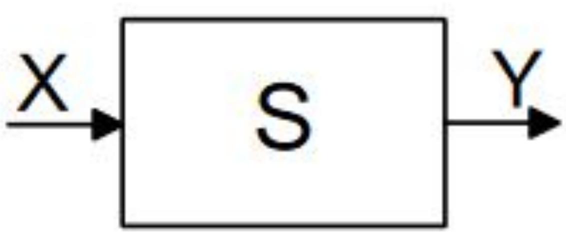
Автомат

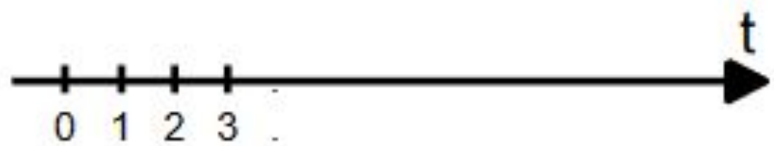
- устройство (реальное или абстрактное) осуществляющее прием, хранение и преобразование дискретной информации по некоторому правилу (алгоритму).
- Примером автомата могут служить ЭВМ, математические абстрактные машины, аксиоматические теории и т.п.

Общие сведения

- Абстрактный автомат (АА)–дискретный преобразователь информации; представ-ляет собой множество, состоящее из шести элементов:
- S = {X, Q, Y, δ, λ, q1}S–абстрактный автомат;
- X–множество входных символов (входной алфавит автомата): X= {x1, ... , xm};
- Q–множество состояний автомата: Q= {q1, ... , qn};Y–множество выходных символов (выходной алфавит автомата):Y= {y1, ... , yp};
- δ–функция переходов автомата из одного состояния в другое: qj= δ(qi, xk), где: qj–следующее (новое) состояние автомата;
- qi–текущее состояние автомата;xk–текущий входной символ; λ–функция выходов:yl= λ (qi, xk);
- q1 –начальное состояние автомата (применяется также обозначение q0).
- Автомат называется конечным, если множества X, Q, Y–конечны

Представление абстрактного автомата



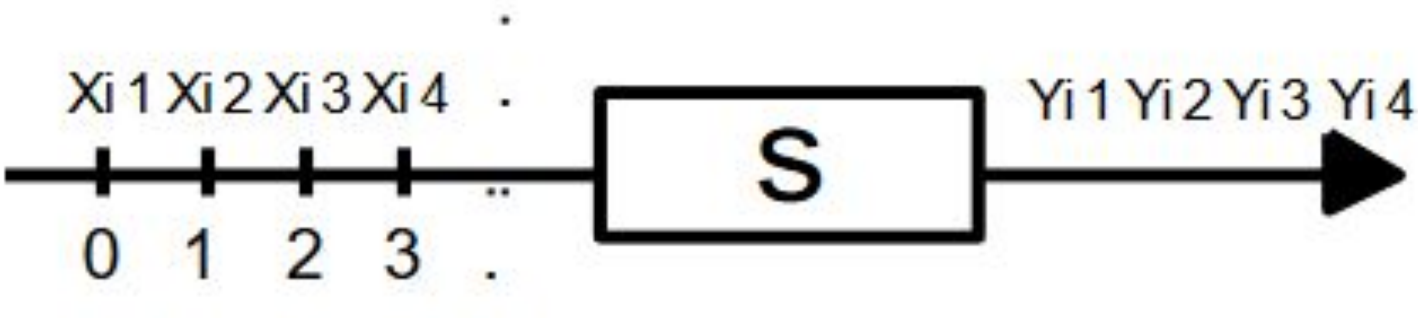


На рис. 1 t–дискретное время: t= nT, где T–интервал (такт), разделяющий дис-кретные моменты времени; если T= 1, то t= n, т. е. дискретное время сопоставляется упорядоченному ряду натуральных чисел.

Общие сведения

- Абстрактный автомат (АА) можно рассматривать как "черный ящик" с одним входом и одним выходом, с которым можно экспериментировать, не зная, что находится внутри.
- Выходной символ (yl $\in$ Y) зависит не только от входного символа (x $\in$ X), но и от того, в каком состоянии (qi $\in$ Q) находится автомат.
- Автомат функционирует в дискретном времени; это означает, что элементы описания автомата заданы только в упомянутые выше дискретные моменты.
- Представим, что с некоторого начального, например, нулевого момента времени на вход автомата подаются входные символы, образующие входное слово некоторой длины (длина любого i-го слова измеряется числом символов).
- На выходе получаем выходное слово той же длины

Преобразование входных слов в выходные



Общие сведения

- Сказанное означает, что автомат может рассматриваться как преобразователь входных слов в выходные с сохранением длины слов.
- Символы алфавитов, присутствующие на входе и выходе автомата, будем также называть входными и выходными сигналами.
- На практике широкое распространение получили две основные модели, описывающие функционирование АА:
- 1. Модель Мили;
- 2. Модель Мура

Модель Мили

- Законы функционирования автомата Мили представлены следующим образом:
- $q(t+1) = \delta(q(t), x(t))$ $y(t) = \lambda(q(t), x(t))$
- t–текущий момент времени;$t+1$–следующий момент времени;
- $q(t+1)$–состояние автомата в следующий момент времени;
- $q(t)$, $x(t)$, $y(t)$ –элементы описания автомата в текущий момент времени

Модель Мура

- Законы функционирования автомата Мура представлены следующим образом:
- $q(t+1) = \delta(q(t), x(t)) \quad y(t) = \lambda(q(t))$
- В модели Мура выходной сигнал явно зависит только от состояния, а косвенно – и от входного сигнала.
- Любой автомат можно спроектировать по той или иной модели

Способы задания автоматов

- Два основных способов задания автоматов:
- 1.Табличный способ
- Автомат Мили
- Для автомата Мили табличный способ заключается в построении двух таблиц:
- таблицы переходов (ТП) и таблицы выходов (ТВ).

Табличный способ

$x \backslash q$	$\ldots$	q_i	$\ldots$
$\vdots$			
x_k		$\delta(q_i, x_k)$	
$\vdots$			

а

$x \backslash q$	$\ldots$	q_i	$\ldots$
$\vdots$			
x_k		$\lambda(q_i, x_k)$	
$\vdots$			

б

Табличный способ: а–таблица переходов, б–таблица выходов

Пример: а) Таблица переходов

x\q	q_1	q_2	q_3
x_1	q_3	q_1	q_1
x_2	q_2	q_3	q_2

Пример: б) Таблица выходов

$x \backslash q$	q_1	q_2	q_3
x_1	y_1	y_1	y_2
x_2	y_1	y_2	y_1

Автомат Мура

- Таблица переходов и таблица выходов объединяются, и добавляется строка выходных сигналов, соответствующих состояниям автомата.
- На рисунке показана таблица переходов и выходов для автомата Мура.

Таблица переходов и выходов

	…	$\lambda(q_i,x_k)$	…
$\mathbf{x \backslash q}$	…	$\mathbf{q_i}$	…
⋮			
$\mathbf{x_k}$		$\delta(q_i,x_k)$	
⋮			

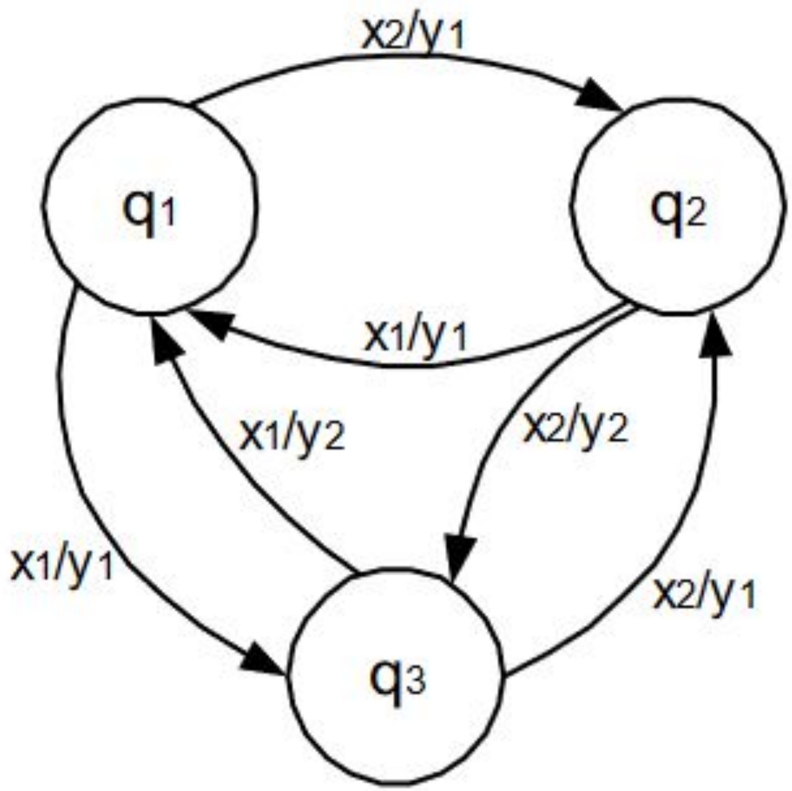
Пример. Таблица переходов и выходов

	y_1	y_1	y_3	y_2	y_3
x\q	$\mathbf{q_1}$	$\mathbf{q_2}$	$\mathbf{q_3}$	$\mathbf{q_4}$	$\mathbf{q_5}$
$\mathbf{x_1}$	q_2	q_5	q_5	q_3	q_3
$\mathbf{x_2}$	q_4	q_2	q_2	q_1	q_1

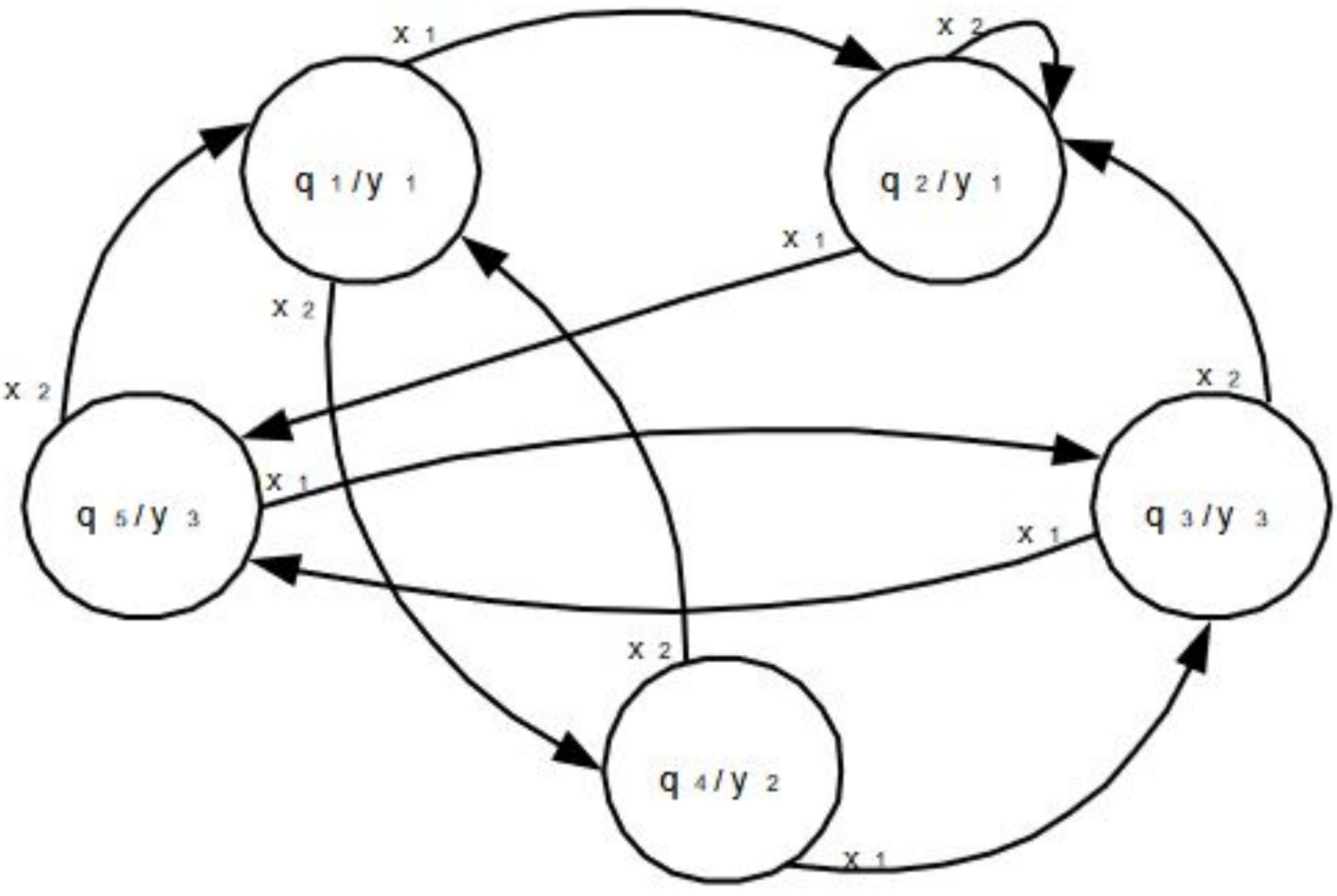
Графовый способ

- Автомат представляется ориентированным связным графом (орграфом), вершины которого соответствуют состояниям автомата, а дуги – переходам из состояния в состояние.
- Обозначения входных и выходных сигналов распределяются в автоматах Мили и Мура по-разному.

Построим графы для автоматов Мили и Мура по вышеприведенным таблицам



Представление автомата Мили в виде графа



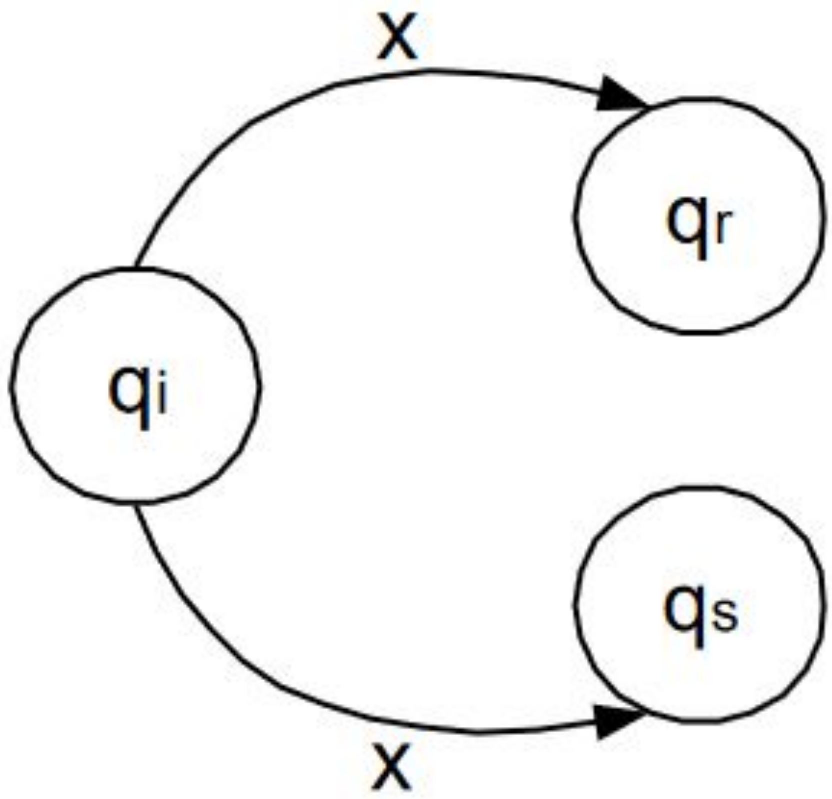
Представление автомата Мура в виде графа

- Замечание:
- В автомате Мили выходной сигнал вырабатывается при переходе, а в автомате Мура присутствует в течение всего периода дискретного времени, пока автомат находится в данном состоянии.

Детерминированный автомат

- – Автомат, в котором имеется полная определенность переходов из всех состояний в зависимости от входных сигналов (под действием одного и того же сигнала автомат не может переходить из любого рассматриваемого состояния в различные состояния).
- Фрагмент графа, изображенный на рисунке 7, не может относиться к детерминированному автомату

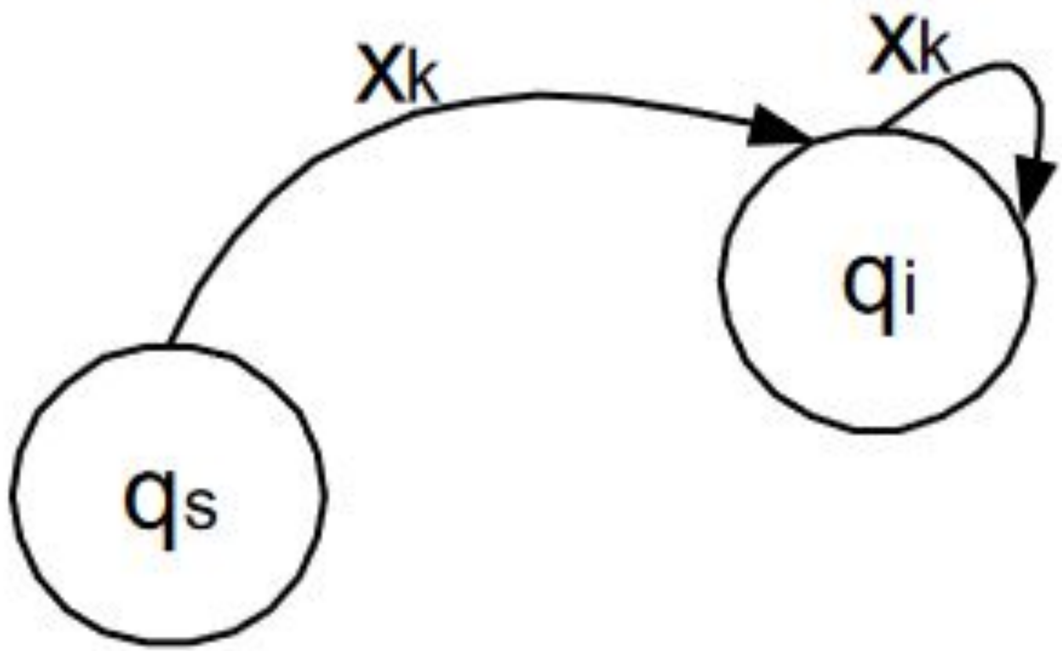
Фрагмент графа, иллюстрирующий неопределенность переходов



Состояние автомата q_i

- называется устойчивым, если для любого входного сигнала x_k, такого, что $\delta(q_s, x_k) = q_i$, справедливо соотношение:
- $\delta(q_i, x_k) = q_i$. (здесь q_s–состояние, предшествующее q_i).
- Это означает, что, автомат не изменяет своего состояния при повторении на следующем такте сигнала, приведшего его в состояние q_i.
- Фрагмент графа, иллюстрирующий устойчивость состояния, приведен на рисунке.

Устойчивое состояние автомата



Автомат называется асинхронным,

- если каждое его состояние $q_i \in Q$ ($i = 1, \ldots, n$) устойчиво;
- в противном случае автомат называется синхронным.
- Синхронные автоматы важны для теории, а на практике чаще используются асинхронные; устойчивость состояний в асинхронных автоматах достигается введением специальных сигналов синхронизации.

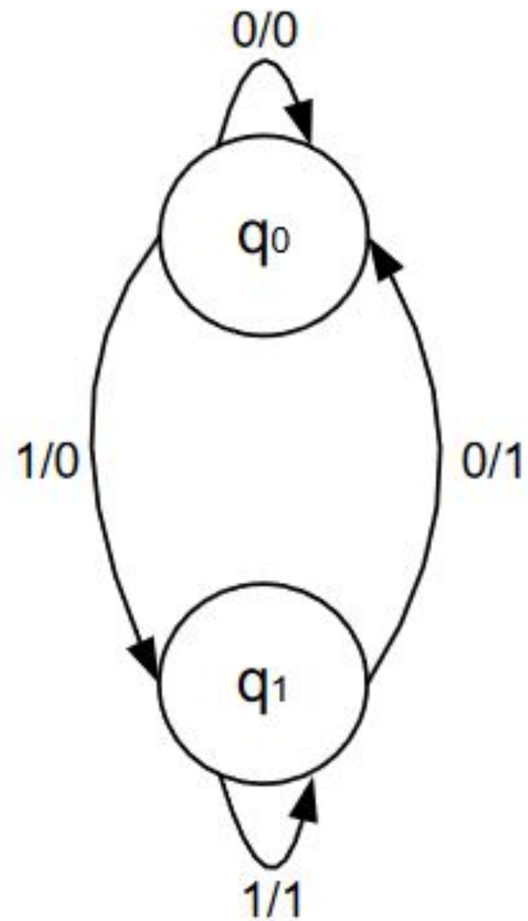
Примеры абстрактных автоматов, выполняющих полезные действия

- Автомат для задержки сигнала на один такт (для запоминания на один такт)
- Таблица переходов и таблица выходов:

$x \backslash q$	q_0	q_1
x_0	q_0	q_0
x_1	q_1	q_1

$x \backslash q$	q_0	q_1
x_0	y_0	y_1
x_1	y_0	y_1

- Поскольку автомат является двоичным, введем обозначения: x0= y0= 0; x1= y1= 1



Граф автомата для задержки сигнала на один такт

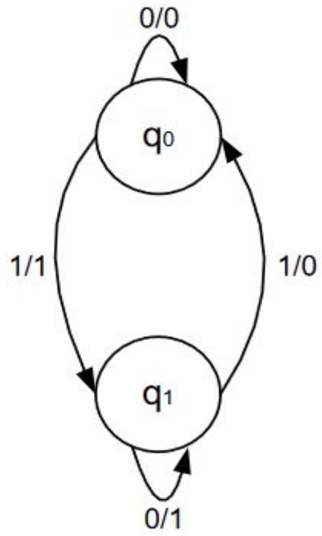
Простой анализ показывает,

- что выходной сигнал в текущем такте повторяет входной, который был на такт раньше.
- Автомат для проверки двоичной последовательности на четность

Таблица переходов и таблица выходов:

x\q	q_0	q_1
x_0	q_0	q_1
x_1	q_1	q_0

x\q	q_0	q_1
0	0	1
1	1	0



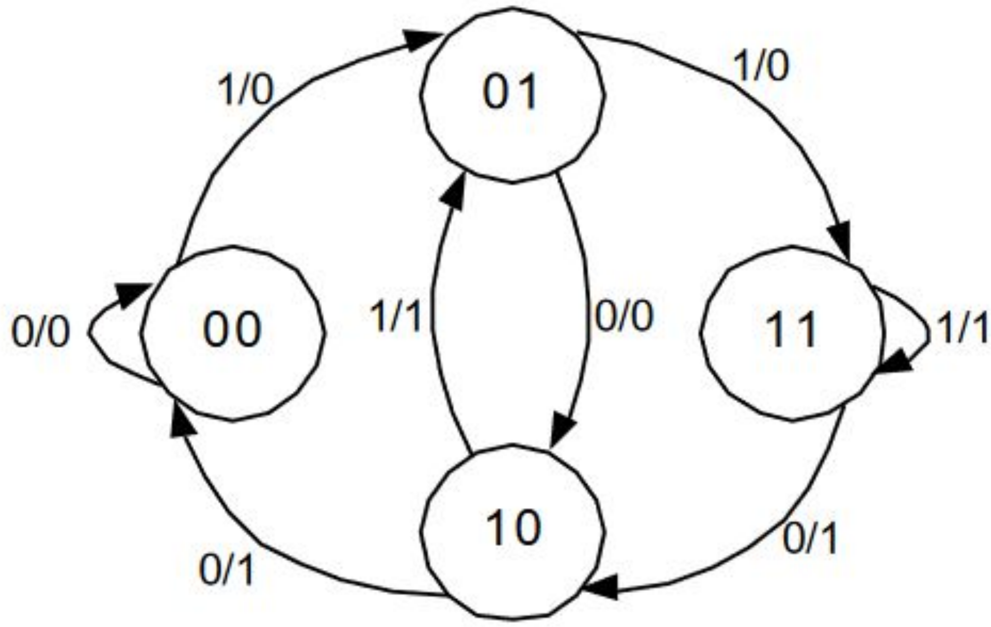
Граф автомата для проверки двоичной последовательности на четность

Анализ показывает,

- что «0» на выходе автоматически вырабатывается при четном числе единиц на входе, а «1» на выходе вырабатывается при нечетном числе единиц на входе.
- Оба рассмотренных автомата имеют "слабую" память, но слабую в разном смысле.
- У первого автомата "короткая" память во времени (помнит только один сигнал).
- У второго автомата память "длинная" (длина входной последовательности может быть любой), но он различает (распознает) лишь два класса последовательностей.

Автомат для задержки сигнала на два такта

- Автомат имеет четыре состояния, закодированных двумя двоичными разрядами: q_0 = 00; q1 = 01; q2 = 10; q3 = 11



Граф автомата для задержки сигнала на два такта

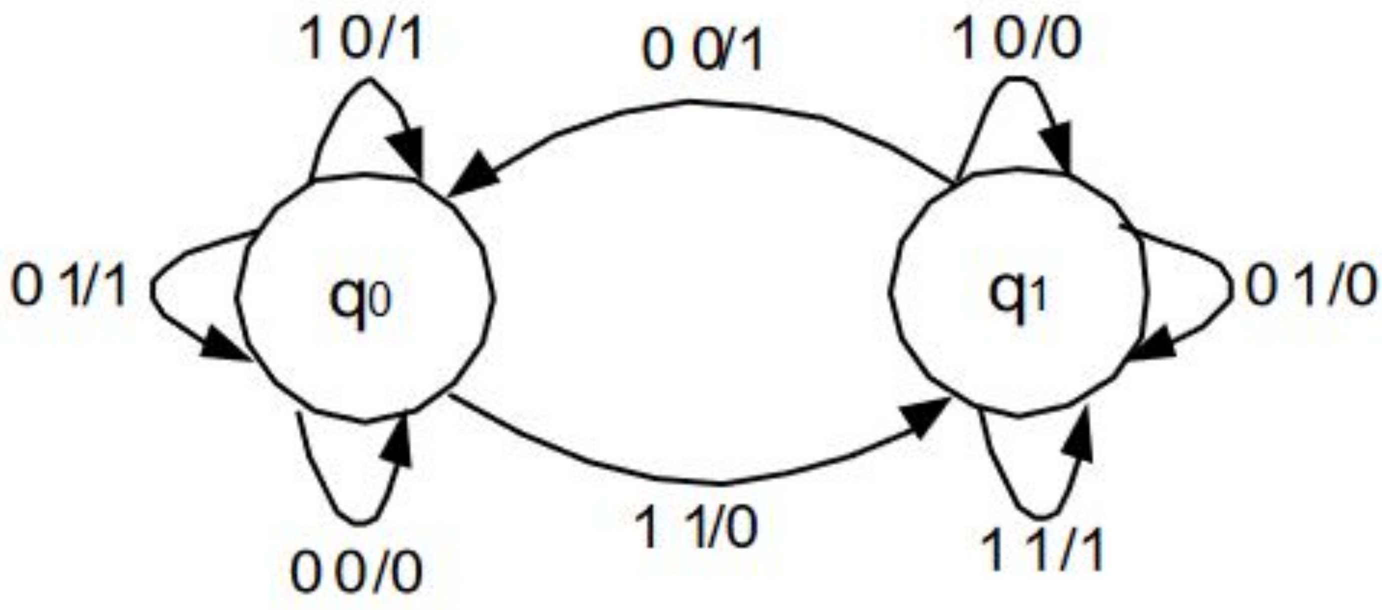
Достоинства примененного кодирования:

- первая цифра кода состояния показывает, какой сигнал выдает автомат (он легко преобразуется в автомат Мура);
- вторая цифра кода показывает, под действием какого сигнала автомат приходит в данное состояние.
- легко проверить, что выходной сигнал повторяет входной через два такта.

Двоичный последовательный сумматор, реализованный для одного разряда входного кода

- Автомат имеет два состояния:
- q0 – нет переноса (сложение цифр операндов не требует учета единицы переноса из предыдущего разряда кода);
- q1 –есть перенос (единица переноса должна быть учтена)

Граф одноразрядного двоичного последовательного сумматора

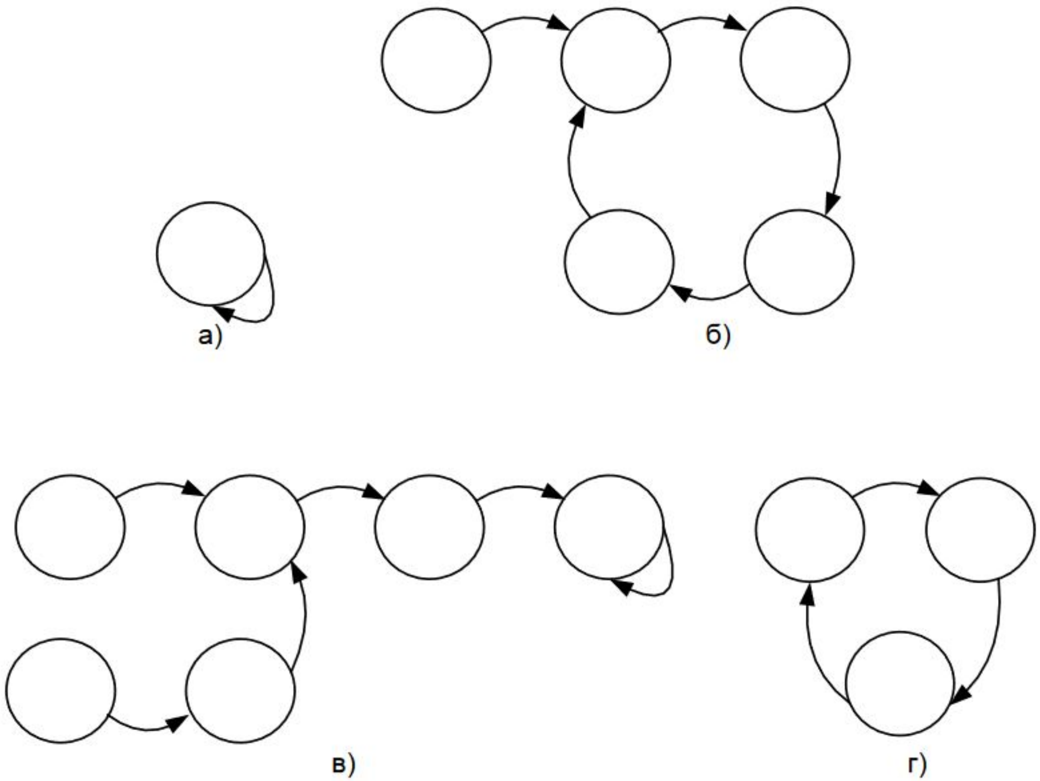


В числителе "дроби", записанной при каждой из дуггрдфа, указаны цифры слагаемых; в знаменателе –результат суммирования в текущем разряде. Сумматор позволяет суммировать двоичные последовательности произвольной длины.

Поведение изолированного синхронного автомата

- Изолированный автомат–автомат, на входе которого присутствует сигнал, имеющий постоянное значение, что эквивалентно "отключению" входа.
- Если изолированный автомат является синхронным, переходы из одного состояния в другое возможны, но при этом исключены разветвления путей, отображающих последовательности переходов (автомат является детерминированным).
- Следовательно, автомат с конечным числом состояний (конечный автомат) неизбежно должен попасть в состояние, в котором уже находился ранее, и на диаграммах переходов обязательно будет присутствовать поглощающее со-стояние или цикл.

Примеры диаграмм, иллюстрирующих поведение рассматриваемого автомата при разных начальных состояниях



Поведение изолированного синхронного автомата

Проблема умножения

- Теорема

Никакой конечный автомат не может перемножать пары чисел с произвольно большим числом разрядов.

Причина заключается в том, что с возрастанием числа разрядов сомножителей при умножении необходимо накапливать неограниченно большие (по объему занимаемой памяти) промежуточные результаты.

Проблема умножения

- Для математического доказательства используем метод "от противного": предположим, что существует автомат S, перемножающий пары двоичных чисел с произвольно большим числом разрядов (система счисления может быть любой без ограничения общности).

Проблема умножения

- Используем для опровержения последнего утверждения частный случай: оба со-множителя равны 2n.
- В этом случае каждый из сомножителей содержит единицу, за кото-рой следуют n нулей; результат умножения (2n×2n= 22n) содержит единицу и 2n нулей. Применим экономный способ использования памяти: пары разрядов сомножителей подаются последовательно, начиная с младших разрядов (аналогично тому, как это делалось в рассмотренном выше сумматоре).

Проблема умножения

- Чтобы автомат правильно работал, он должен после прекращения подачи сомножителей добавить к уже выработанным n+ 1 нулям еще n–1 нулей, а затем в заключение единицу.
- Но после прекращения подачи сомножителей автомат будет работать как изолированный.
- **Если изолированный автомат S** имеет k состояний и способен выработать на выходе подряд n нулей, где n > k, то это означает, что он находится в поглощающем состоянии или вошел в цикл.
- Следовательно, он уже не сможет выработать единицу.
- Так как всегда возможно сделать значение n таким, что n–1 > k, правильный результат при выполнении указанного неравенства не будет получен и, следовательно, предположение о существовании автомата S приводит к противоречию.
- **Теорема доказана.**