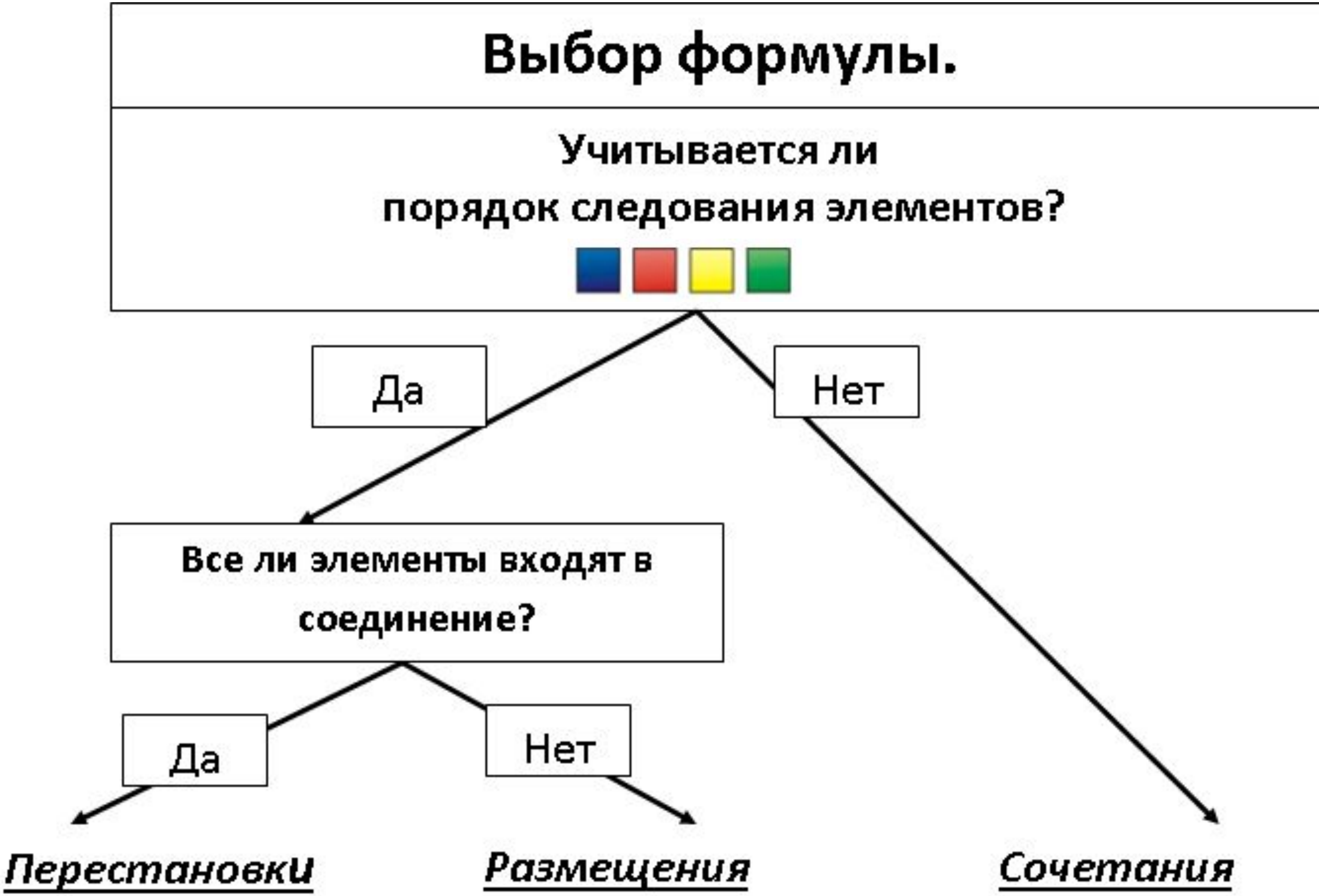
Математические основы доказательной медицины

Комбинаторика.

- ***это подсчёт различных комбинаций***, которые можно составить из некоторого *множества дискретных объектов*. Под *объектами* понимаются какие-либо обособленные предметы или живые существа .Принципиально важно, что эти объекты поддаются перечислению *(дискретность)* и существенно то, что среди них нет одинаковых.

Основные комбинаторные конфигурации:

Размещение, перестановка, сочетание

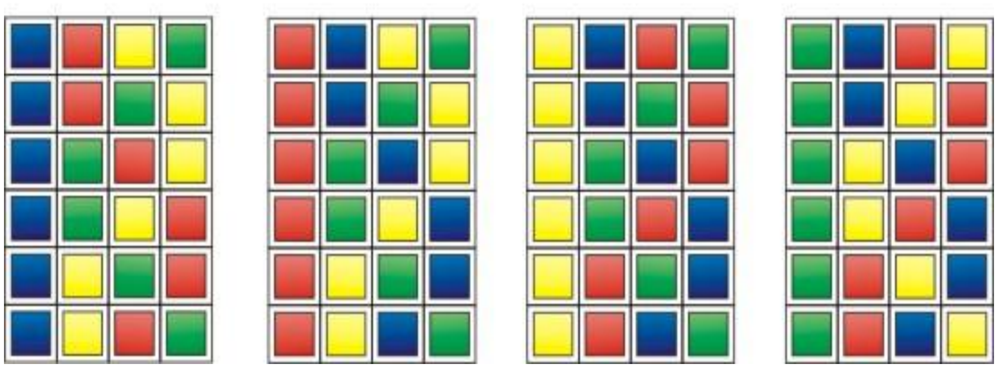

Выбор формулы.
Учитывается ли
порядок следования элементов?
Да
Нет
Все ли элементы входят в
соединение?
Да
Нет
Перестановки
Размещения
Сочетания

Перестановки.

- ***Перестановками без повторений*** из ***n*** различных элементов называются *все возможные последовательности этих **n** элементов*.
- Число перестановок без повторений из *n* элементов равняется

$$\boxed{P_n = n!}$$

$0! = 1$
$1! = 1$



$$P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

- **Сколько четырёхзначных чисел можно составить из четырёх карточек с цифрами 0, 5, 7, 9?**
- **Решение**: используем формулу количества перестановок: $P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$
- НО
- числа: 0579=579; 0597=597; 0759=759;
- 0795=795; 0957=957; 0975=975

четырёхзначными не являются. Таких чисел $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

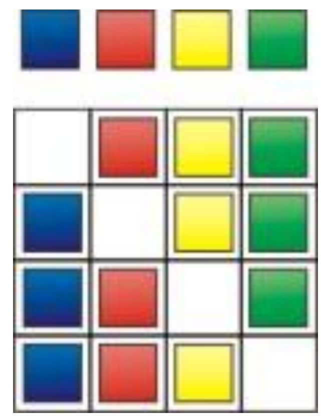
- Количество же четырёхзначных чисел равно

$N=P \quad P \; =4! \quad 3!=24 \; 6=18$

Сочетания

*Сочетаниями (без повторений)*из ***n*** различных элементов по ***k*** элементов (k<n) называются все такие последовательности *k* различных элементов, выбранных из исходных *n*, *которые отличаются друг от друга* *составом элементов.*

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$



$$C_4^3 = \frac{4}{3! \cdot (4-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4$$

Бином Ньютона:

$$(a \pm b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^{n-k} b^k$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

ЗАДАЧА

Сколько трехкнопочных комбинаций существует на кодовом замке (все три кнопки нажимаются одновременно), если на нем всего 10 цифр.

Решение.

Так как кнопки нажимаются одновременно, то выбор этих трех кнопок – сочетание. Отсюда возможно

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3! \cdot (10-3)!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$$

вариантов.

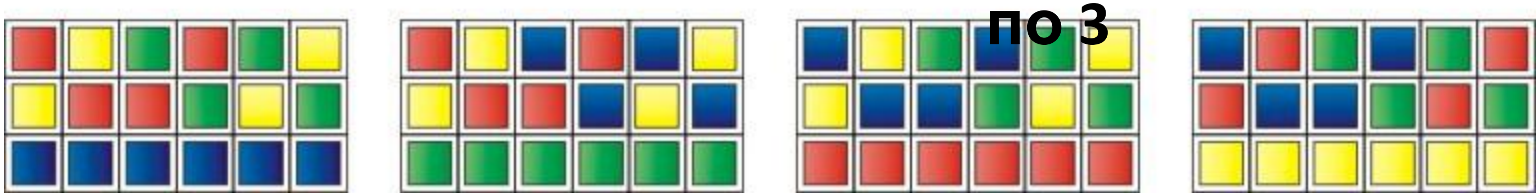
Размещения

Размещениями (без повторений) из ***n*** различных элементов по ***k*** элементов ($k<n$) называются все такие последовательности ***k*** различных элементов, выбранных из исходных ***n***, *<u>которые отличаются друг от друга или порядком следования элементов, или составом элементов</u>*

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = (n-k+1)\cdot(n-k+2)\cdots(n-1)\cdot n$$

Порядок выбора важен!

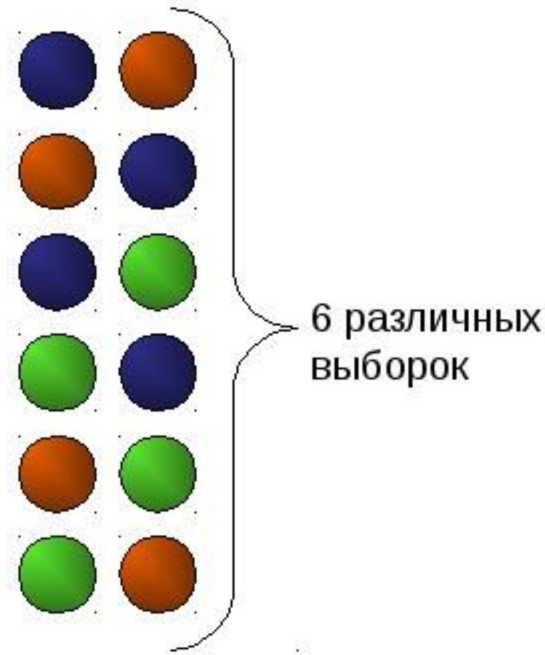
число размещений из 4 по 3



$$A_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!} = 2\cdot 3\cdot 4 = 24$$

$$A_n^k = C_n^k \cdot P_k$$

Размещения без повторений



$$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{6}{1} = 6$$

Задача

Сколькими способами 6 студентов, сдающих экзамен, могут занять места в аудитории, в которой стоит 20 одноместных столов?

Решение. Выбираем 6 столов для студентов из 20 имеющихся: порядок выбора учитывается (кто сидит у окна, кто около преподавателя и т. п.):

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = (n-k+1)\cdot(n-k+2)\cdots(n-1)\cdot n$$

$$A_{20}^6 = \frac{20!}{(20-6)!} = \frac{20!}{14!} = 15\cdot16\cdot17\cdot18\cdot19\cdot20 = 27907200$$

Задача кавалера де Мере

При четырехкратном бросании игральной кости что происходит чаще: выпадет шестерка хотя бы один раз или же шестерка не появится ни разу?

Эта одна из тех задач , с которыми кавалер де Мере обратился к Б.Паскалю в надежде узнать выигрышную стратегию.

Теория вероятностей

Это раздел математики, который изучает закономерности в массовых случайных событиях.

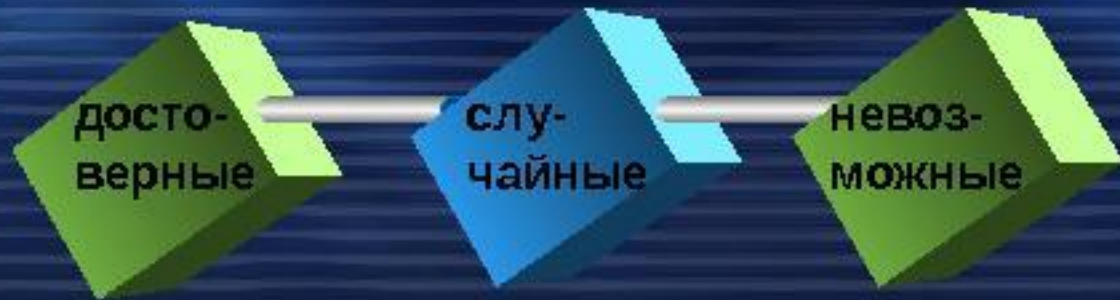
Событие – это факт, который может произойти или не произойти в результате проведения опыта или

Массовые события

События называются массовыми, если они происходят одновременно в достаточно большом числе испытаний или многократно повторяются

Например, много людей бросают игральные кости или один человек бросает кости много раз

Примеры событий



1. ПОСЛЕ ЗИМЫ НАСТУПАЕТ ВЕСНА. 2. ПОСЛЕ НОЧИ ПРИХОДИТ УТРО. 3. КАМЕНЬ ПАДАЕТ ВНИЗ. 4. ВОДА СТАНОВИТСЯ ТЕПЛЕЕ ПРИ НАГРЕВАНИИ.	1. НАЙТИ КЛАД. 2. БУТЕРБРОД ПАДАЕТ МАСЛОМ ВНИЗ. 3. В ШКОЛЕ ОТМЕНИЛИ ЗАНЯТИЯ. 4. ПОЭТ ПОЛЬЗУЕТСЯ ВЕЛОСИПЕДОМ. 5. В ДОМЕ ЖИВЕТ КОШКА.	1. 30 ФЕВРАЛЯ ДЕНЬ РОЖДЕНИЯ. 2. ПРИ ПОДБРАСЫВАНИИ КУБИКА ВЫПАДАЕТ 7 ОЧКОВ. 3. ЧЕЛОВЕК РОЖДАЕТСЯ СТАРЫМ И СТАНОВИТСЯ С КАЖДЫМ ДНЕМ МОЛОЖЕ.

Классификация случайных событий

Равновозможные события –
это события такие, что ни одно из них
не является более возможным, чем другие

Совместные события – это события, которые
могут произойти одновременно в результате
данного опыта.

Несовместные события – это равновозможные
события такие, что **появление
одного из них исключает появление
остальных**

Полная группа событий, **если каждое из
них может произойти** в результате данного опыта.

Противоположные события – это несовместные события,
образующие полную группу событий. **Появление события A
исключает появление события** $\overline{A}$ **(не A)**

Классическое определение вероятности.

- ***Вероятность события А*** – это отношение числа исходов, благоприятст-вующих данному собы-тию (**m**), к общему числу всех несовместных и равновозможных и а (**r**

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

- Случайное событие

$$0 \le P(A) \le 1$$

Достоверное

$$m = n \rightarrow P(A) = \frac{n}{n} = 1$$

невозможное событие

$$m = 0 \rightarrow P(A) = \frac{0}{n} = 0$$

Классическое определение вероятности.

- Пример

При бросании кубика возможно n=6 исходов
 Событие A: выпадет четное число.
Число исходов, благоприятствующих событию A, $m=3$.

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

- ***Достоинства:*** можно вычислить вероятность не производя испытания.
- ***Недостатки:*** 1) не всегда известно число исходов опыта,
- 2) часто невозможно представить результат испытаний в виде равновозможных и несовместных событий.

Статистическое определение вероятности

- Пусть опыт проводился **n** раз, в результате опыта событие А произошло **m** раз. Тогда **относительная частота событий**

$$\boxed{W(A) = \frac{m}{n}}$$

Статистическая вероятность события А - предел, к которому стремится его относительная частота , при неограниченном увеличении числа испытаний

$$\boxed{P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{m}{n} = \lim_{n\to\infty} W(A)}$$

- **Пример**
- В городе на 1000 жителей приходится 20 больных ревматизмом. Какова относительная частота заболевания ревматизмом в этом городе?

- $W(A) = \frac{m}{n} = \frac{20}{1000} = 0{,}02$

Теоремы сложения вероятностей.

- ***Сумма двух событий А+В***
- событие, которое состоит в том, что произойдёт или событие А или событие В или оба они одновременно.

- **Сумма нескольких событий ($A_1+A_2+A_3+.....+A_n$)**
- событие, которое состоит в том, что произойдёт **хотя бы одно** из этих событий.

Пример

- Бросаем 2 кубика:

A – выпадет чётное число на первом кубике

B – выпадет чётное число на втором кубике

$(A + B)$ – выпадет чётное число на первом **или** втором кубике или на первом и втором одновременно:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$$

$\boxed{\text{Сумма=ИЛИ}}$

Теоремы сложения вероятностей.

- **Теорема 1:** Вероятность двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$\boxed{P(A+B)=P(A)+P(B)}$$

- **Теорема 2:** Вероятность суммы нескольких попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$\boxed{P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)}$$

Пример

- В санаторий поступило на реабилитацию одновременно 10 человек, причём 3-после инфаркта, 3 – после гипертонического криза, 4-после инсульта. Какова вероятность того, что первый из осмотренных врачом пациентом перенёс инфаркт или инсульт?

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{3}{10}+\frac{4}{10}=\frac{7}{10}$$

Теоремы сложения вероятностей.

- **<u>Следствие 1:</u>** Сумма вероятностей событий, которые образуют *<u>полную</u>* *<u>р</u>*

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1$$

где $A_1, A_2, A_3, \dots A_n$ – полная группа событий

- **<u>Следствие 2:</u>** Сумма вероятносте противоположных событий равна

$$\boxed{P(A + \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = 1}$$

Теорема 3: Вероятность суммы двух **совместных** событий равна сумме вероятностей этих событий минус веро... вления:

- $$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$$

Пример: А – выпадет число 6 на первом кубике

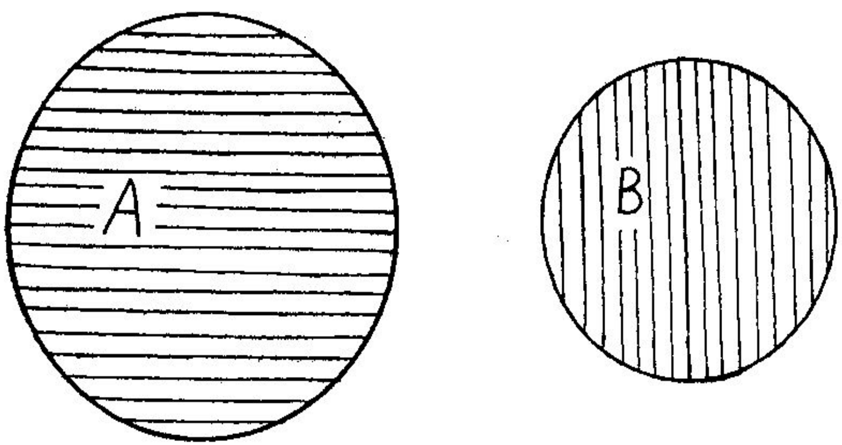
- B -- выпадет число 2 на втором кубике
- (A+B) – выпадет число 6 на первом или ...но 2 втором кубике или на перво... ...ом 2 одновременно:

$$P(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{11}{36} = 0,305$$

Геометрическая интерпретация теорем сложения (множества событий А и В изображаются кругами)

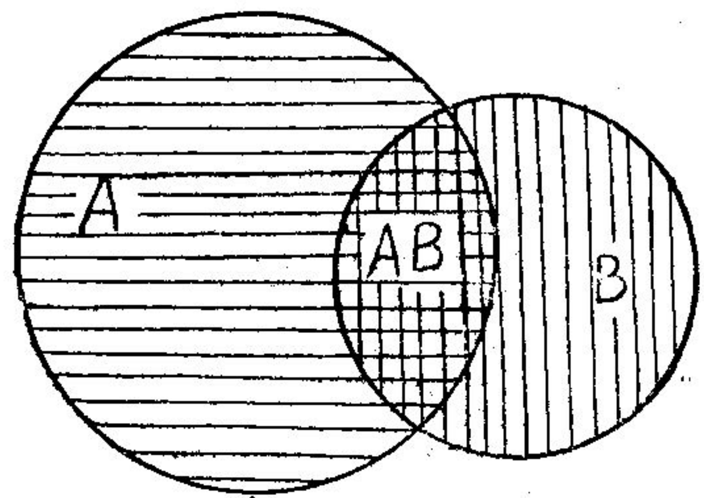
Вероятность суммы 2-х несовместных событий

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$



Вероятность суммы 2-х совместных событий

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$



Теоремы умножения вероятностей.
Независимые и зависимые события

- Событие В **не зависит** от события А, если Р (В) не изменяется от того, что произошло событие А.
- Событие В **зависит** от события А, если Р(В) изменяется от того, что произошло событие А.
- **Р(В/А)** – вероятность события В, при условии, что произошло событие А – это *условная вероятность* события В.

Теоремы умножения вероятностей.

- **Произведением двух событий А·В** , называется событие, которое состоит в том, что произойдёт и событие А и событие В.
- **Произведением нескольких событий А·В·С·D·…** называется событие, которое состоит в том, что произойдут все эти события.
- **<u>Теорема 1.</u>** Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению их вероятностей.

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$$

- **<u>Теорема 2.</u>** Вероятность совместного появления двух зависимых событий (В зависит от А) равна произведению вероятности события А на условную вероятность события В.

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B/A)$$

Примеры

- Вероятность того, что на кубике второй раз выпадет число 6 не изменяется от того, что на нем выпало первый раз

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

- Студент пришёл на экзамен, зная 10
- вопросов из 20. Если он вслепую последо - вательно вытягивает из кучи 2 вопроса , то какова вероятность того, что он их знает?

$$P(B) = P(A) \cdot P(B / A) = \frac{10}{20} \cdot \frac{9}{19} = \frac{90}{380}$$

Слово **шпаргалка** (9 букв) составили из карточек, на каждой из которых написана одна буква. Затем карточки перемешали и положили в пустую коробку. Из коробки наугад достают 4 карточки. Какова вероятность того, что мы получим слово **пара**?

- **Первый способ**
- Количество четырёхбуквенных слов, которые можно составить из 9 букв – это число размещений A_9^4

$$n = A_9^4 = \frac{9!}{(9-4)!} = 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 3024$$

- Число исходов нашего опыта, благоприятствующих появлению слова ***пара*** равно числу размещений из трёх букв А по дв... буквы в слове. Таких слов по...

$$m = A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 2 \cdot 3 = 6$$

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{6}{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} = \frac{1}{7 \cdot 8 \cdot 9} = \frac{1}{504} \approx 0.002$$

- **Второй способ**
- Используем теорему умножения вероятностей.
- Имеем 9 карточек, из них 3 карточки с буквой а. Событие **В** заключается в том , что достаём букву П и букву а и Р

$$P(B) = \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{7 \cdot 8 \cdot 9} = \frac{1}{504} \approx 0{,}002$$

Формула полной вероятности.

- Если событие А может произойти только совместно с одним из нескольких других событий, их принято называть *гипотезами* и обозначать Н. Тогда ***полная вероятность*** событие А вычисляется по формуле:

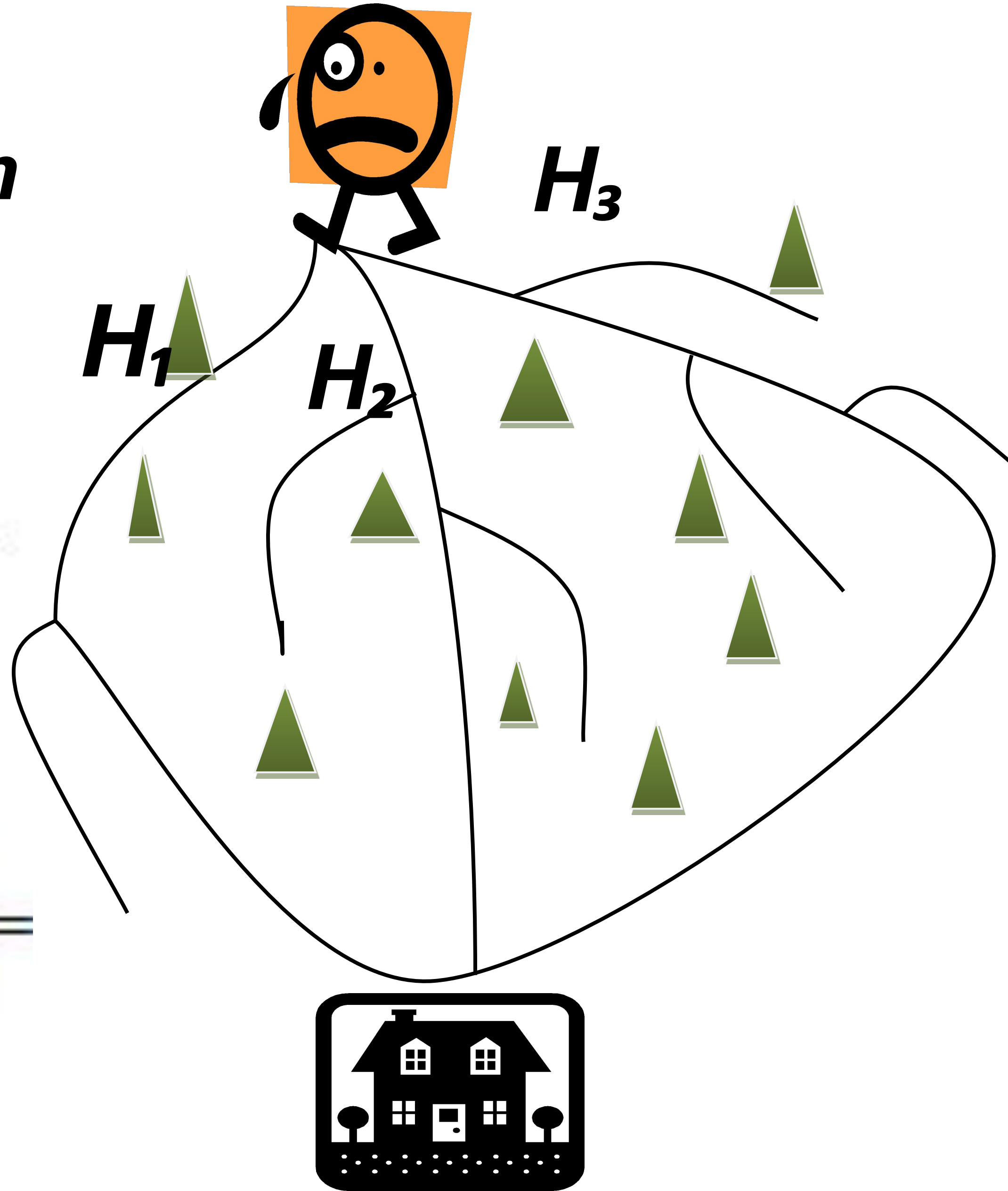
$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + ...P(H_n)P(A/H_n)$$

Пример

Событие А: колобок попадёт в домик

$$P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=\frac{1}{3}$$

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+$$
$$+P(H_2)\cdot P(A/H_2)+$$
$$+P(H_3)\cdot P(A/H_3)=$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=$$
$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}=\frac{13}{36}=0{,}36$$



Формула Байеса.

До проведения **опыта**

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$$

После проведения опыта

Пусть событие $P(H_1/A)$

пр$P(H_2/A)$л$P(H_3/A)$

и вероятности

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)\cdot P(A/H_i)}{P(H_1)\cdot P(A/H_1) + P(H_2)\cdot P(A/H_2) + \cdots + P(H_n)\cdot P(A/H_n)}$$

$$P(H_1/A) = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{13}{36}} = \frac{6}{13} \quad P(H_2/A) = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{13}{36}} = \frac{4}{13} \quad P(H_3/A) = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{13}{36}} = \frac{3}{13}$$