

---

# Лекция 2

# Машина Тьюринга

---



Основная идея концепции алгоритма как абстрактной машины:

*Если решение задачи можно описать как последовательность действий, выполняемых машиной Тьюринга или машиной Поста, то эта задача алгоритмически разрешима.*



Чтобы формально описать понятие алгоритма  
нужно:

1. Уточнить, с какими объектами работает любой алгоритм
2. Формально описать действия над этими объектами  
и порядок выполнения этих действий



# 1. Уточнение того, с какими объектами работают алгоритмы



Любые объекты (числа, формулы, слова, шахматные фигуры и пр.) можно описать на некотором языке т.е представить как последовательность символов некоторого алфавита

Задача любого алгоритма: преобразовать сообщение, записанное в некотором алфавите в другое сообщение

Объекты реального мира можно изображать словами в различных алфавитах. Это позволяет считать, что **объектами работы алгоритмов могут быть только слова.**

Посредством кодирования входного алфавита, любой алгоритм можно свести к алгоритму над словами в алфавите  $\{0, 1\}$ .



## 2. Формальное описание действий над объектами-словами и порядка выполнения этих действий

Пусть исходные данные представлены с помощью алфавита  $A$  и образуют конечную последовательность знаков (слово).

В результате выполнения алгоритма сформируется новое слово, возможно составленное из знаков другого алфавита  $B$

Чтобы произвести такое преобразование машина должна уметь осуществлять следующие элементарные действия:

- *Двигаться вдоль слова вправо и влево*
- *Считывать (распознавать) знак*
- *Заменять один знак исходного слова  $a_i$  знаком  $b_i$  из алфавита  $B$*
- *Удалять знак исходного алфавита*
- *Добавлять к исходному слову знак из алфавита  $B$*
- *Останавливаться*



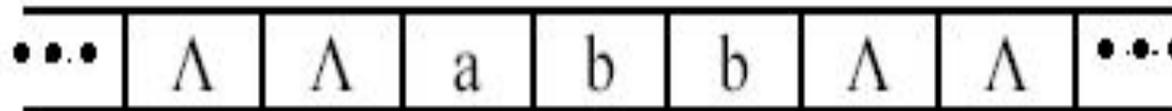
# Описание машины Тьюринга



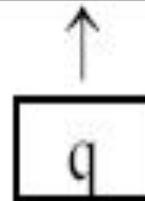
В каждой машине Тьюринга есть 2 части:

1. Лента внешней памяти
2. Автомат (каретка для считывания/записи букв слова, управляемая программой)

*лента:*



*автомат:*



# Лента внешней памяти

1. бесконечна в обе стороны
2. разбита на ячейки
3. в ячейке может быть записан один символ или ничего не записано

Число возможных букв конечно и образует **внешний алфавит**  $A = \{\Lambda, a_1, \dots, a_m\}$

$\Lambda$  (лямбда) - «пустая» буква или *пробел*. С помощью нее обозначается отсутствие буквы в ячейке.



# Считывающая каретка

Может сдвигаться по ленте на одну ячейку  
вправо/влево или остаться на месте

Обозначим множество перемещений (сдвига) каретки

$$D = \{R, L, S\}.$$



# Автомат

Автомат может находиться в конечном множестве состояний.

Множество состояний образует **внутренний алфавит** машины Тьюринга  $Q = \{q_0, q_1, \dots, q_z\}$

Состояние  $q_0$  — называется *начальным*.

Состояние  $q_z$  — называется *заключительным*  
Попав в заключительное состояние, машина останавливается.



# Работа автомата

В зависимости от того, какую букву  $a_i$  он видит, а также в зависимости от своего состояния  $q_j$ , автомат может выполнять следующие действия:

1. записывать в ячейку символ (быть может совпадающий с прежним или пустой)
2. сдвигаться по ленте на одну ячейку вправо/влево или остаться на месте («перепрыгивать» сразу через несколько ячеек автомат не может);
3. перейти в новое состояние (или остаться в прежнем).



# Конфигурация Машины Тьюринга

Полное состояние МТ, по которому однозначно можно определить ее дальнейшее поведение, определяется состоянием ее ленты (словом, записанным на ленте) и положением каретки на ленте.

Полное состояние называют *конфигурацией* и обозначают тройкой:

$p_1 q_i p_2$  ,

где  $q_i$  – текущее состояние,  $p_1$  – слово слева от каретки,  $p_2$  - слово, образованное символом, обозреваемым кареткой и словом справа от каретки.



*Стандартной начальной конфигурацией* называют конфигурацию вида:  $q_0 p$ , т.е. конфигурацию, содержащую начальное состояние, в которой каретка обозревает крайний левый символ слова  $p$ , написанного на ленте

*Стандартной заключительной конфигурацией* называют конфигурацию вида:  $q_z f(p)$ .

Под воздействием программы МТ порождает цепочку конфигураций от начальной к заключительной.



# Программа МТ

Программу для МТ можно описать в виде списка команд вида:

$q_j a_i \rightarrow q'_j a'_i d_k$  , где

$q_j$  – текущее состояние МТ

$a_i$  – символ, обозреваемый кареткой в текущем состоянии

$q'_j$  - следующее состояние

$a'_i$  – символ, который нужно записать вместо  $a_i$  в ту же ячейку

$d_k$  - направление сдвига каретки , обозначаемое одним из трех символов:

R (вправо), L (влево), S (на месте)



Программу машины Тьюринга можно описать в виде функциональной схемы

Внешний алфавит $A$	Состояния машины $Q$	$q_0$	...	$q_j$	...	$q_n$
	$a_0$					
$a_1$						
...						
$a_i$				$q_j a_i dk$		
...						
$a_m$						

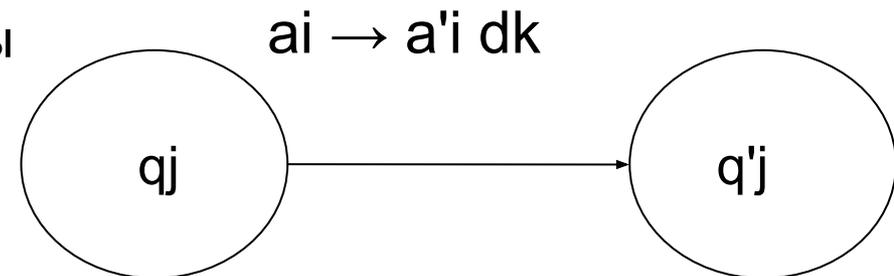
Если машина находится напротив клетки, где написано  $a_i$ , а ее состояние при этом есть  $q_j$ , то выполняется команда  $dk$ , стоящая на пересечении строки, отмеченной символом  $a_i$ , и столбца, отмеченного символом  $q_j$



# Программу можно описать с помощью графа переходов

Машина Тьюринга – это расширение КА для случая бесконечной памяти и с командами (влево, вправо)

Состояниям МТ соответствуют вершины графа. Ребрам - команды МТ



Каждой команде  $\langle q_j, a_i, q'_j, a'_i, dk \rangle$  соответствует ребро, направленное из вершины, помеченной состоянием  $q_j$ , в вершину, помеченную состоянием  $q'_j$ . Само ребро помечено входным символом  $a_i$ , выходным символом  $a'_i$  и направлением движения каретки  $dk$ .



# Пример 1

Пусть задана машина с алфавитом  $A=\{\Lambda, a, b\}$ , состояниями

$Q = \{q_0, q_1, q_z\}$  и системой команд:

$q_0 a \rightarrow q_0 b R$

$q_0 b \rightarrow q_0 b R$

$q_0 \Lambda \rightarrow q_1 \Lambda L$

$q_1 b \rightarrow q_1 b L$

$q_1 \Lambda \rightarrow q_z \Lambda R$

1) Опишите последовательность конфигураций машины для входного слова  $aba$ .

2) Какие действия выполняет эта машина?

3) Изобразите граф переходов машины



Итак, МТ задана, если известны четыре конечных множества:

- внешний алфавит  $A$ ,
- внутренний алфавит  $Q$ ,
- множество  $D$  перемещений каретки
- программа машины, представляющая собой конечное множество команд.



# Эмулятор машины Тьюринга



@ Алго2000 [машина Тьюринга] - Без имени



Файл Интерпретатор Вид Команды Пуск Скорость Помощь



Машина Поста

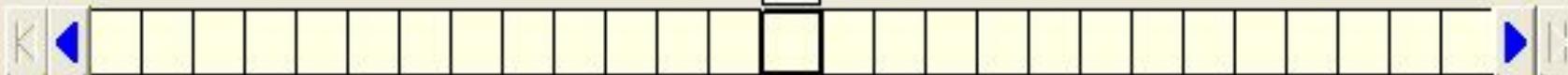
• Машина Тьюринга



нет ▾

Условие задачи.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27



Внешний алфавит:

A \ Q	Q0	Q1	Q2	Q3	Q4
Пробел					

Комментарий:

Перейти к машине Тьюринга

Шаг:

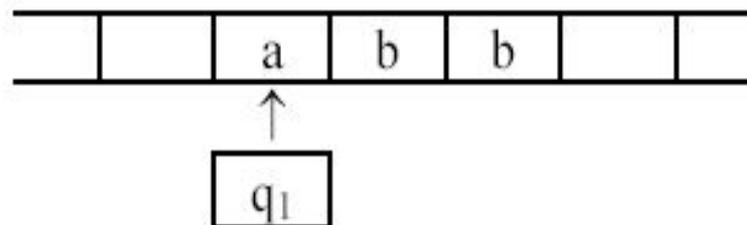
min:

max:



# Предварительные действия перед запуском программы

1. **записать на ленту входное слово**, к которому будет применена программа.
  - Внутри входного слова пустых клеток быть не должно, а слева и справа от него должны быть только пустые клетки.
  - Пустое входное слово означает, что все клетки ленты пусты.
2. **установить автомат в состояние  $q_0$**  (указанное в таблице первым) и **разместить его под первым символом** входного слова
  - Если входное слово пустое, то автомат может смотреть в любую клетку, т.к. все они пусты.



# Ввод команд в эмуляторе

Формат команды в эмуляторе машины Тьюринга: аКq, где:

а - новое содержание текущей ячейки

К - команда машины Тьюринга (влево, вправо, стоп)

q - новое внутреннее состояние машины Тьюринга

Чтобы ввести команду в ячейку нужно:

- 1) Ввести символ внешнего алфавита (пробелы в команде игнорируются, чтобы указать "пробел", нужно ввести в ячейку символ подчеркивания "\_")
- 2) Ввести одну из команд:
  - "Влево" - ввести левую угловую скобку "<"
  - "Вправо" - ввести правую угловую скобку ">"
  - "Стоп" - ввести восклицательный знак "!"
- 3) Ввести номер нового внутреннего состояния.(вводить только цифру, букву Q вводить не надо)



# Пример 1 в эмуляторе

Условие задачи:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27

К ◀ [ ] ▶

Внешний алфавит: **ab**

A \ Q	Q0	Q1	Q2	Q3	Q4
a	<b>b → Q0</b>				
b	<b>b → Q0</b>	<b>b ← Q1</b>	<b>b ⊖ Q2</b>		
Пробел	<b>_ ← Q1</b>	<b>_ → Q2</b>			

Комментарий:

Шаг: 10 min: 14 max: 16 Измен

## Пример 2

Пусть задана машина с алфавитом  $A = \{\Lambda, *\}$ , состояниями  $Q = \{q_0, q_z\}$  и системой команд:

$q_0 * \rightarrow q_0 * R$

$q_0 \Lambda \rightarrow q_0 * R$

- 1) Опишите пять следующих конфигураций машины для начальной конфигурации  $\Lambda q_0 ** \Lambda$
- 2) Какие действия выполняет эта машина?
- 3) Изобразите граф переходов машины



$$1) \Lambda q_0^{**} \Lambda$$

$$2) \Lambda^* q_0^* \Lambda$$

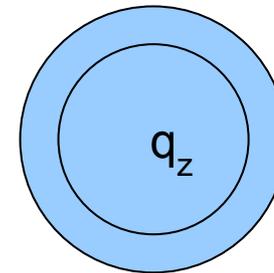
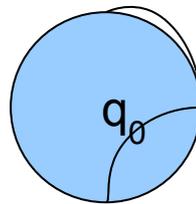
$$3) \Lambda^{**} q_0 \Lambda$$

$$4) \Lambda^{***} q_0 \Lambda$$

$$5) \Lambda^{****} q_0 \Lambda$$

...

При любой начальной конфигурации машина будет работать бесконечно, заполняя ленту единицами



# Вопросы к лекции

1. Для чего предназначена машина Тьюринга?
2. Какие элементарные действия может выполнять каретка МТ?
3. В чем принципиальные отличия машины Поста от машины Тьюринга?
4. На ленте МТ написано слово «тои». Напишите программу, стирающую это слово в виде списка команд, функциональной схемы и графа переходов.