Закон сохранения момента импульса системы материальных точек

Момент силы и импульса относительно точки и оси

Статика – инженерная наука, изучающая равновесие твердых тел, находящихся под действием сил. Она необходима для определения максимально допустимых нагрузок.

- Чтобы удержать тело в покое (равновесии), необходимо выполнение 2-х условий:

1. Векторная сумма всех сил равна 0 $$\sum \vec{F}_i = 0$$

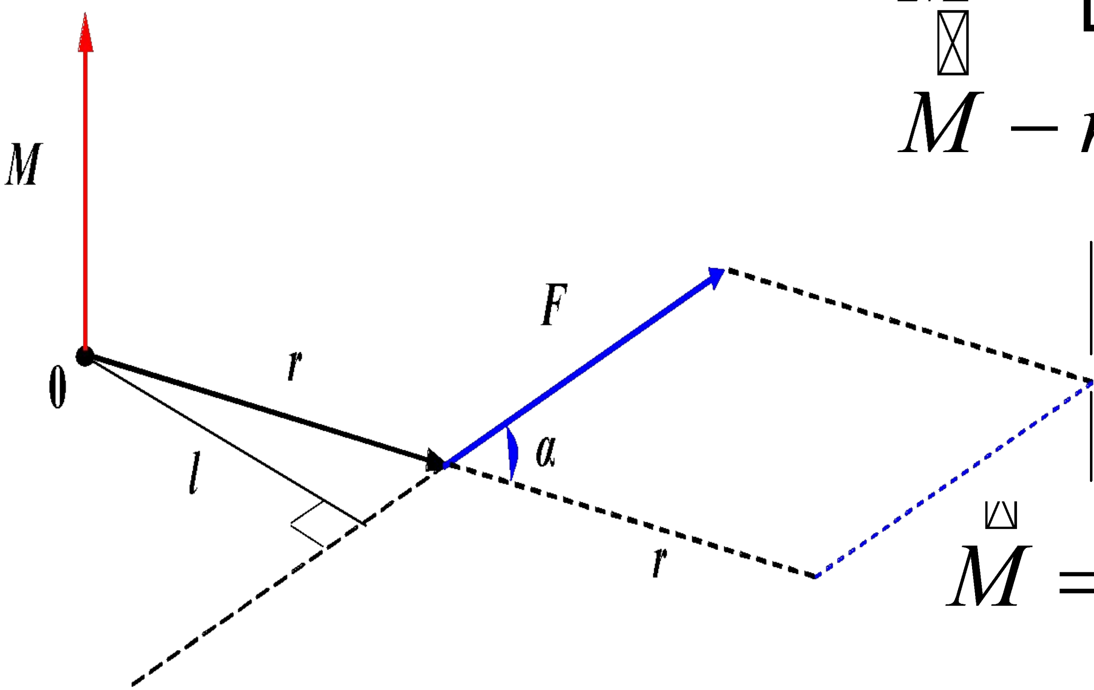
2. Векторная сумма всех моментов сил равна 0

$$\sum \vec{M}_i = 0$$

Момент силы ***F*** относительно неподвижной точки 0 – физическая величина, определяемая векторным произведением радиус-вектора ***r***, проведенного из точки 0 в точку приложения силы, на силу ***F***.

$$\vec{M} = [\vec{r} \cdot \vec{F}],$$

$$\vec{M} - псевдовектор.$$

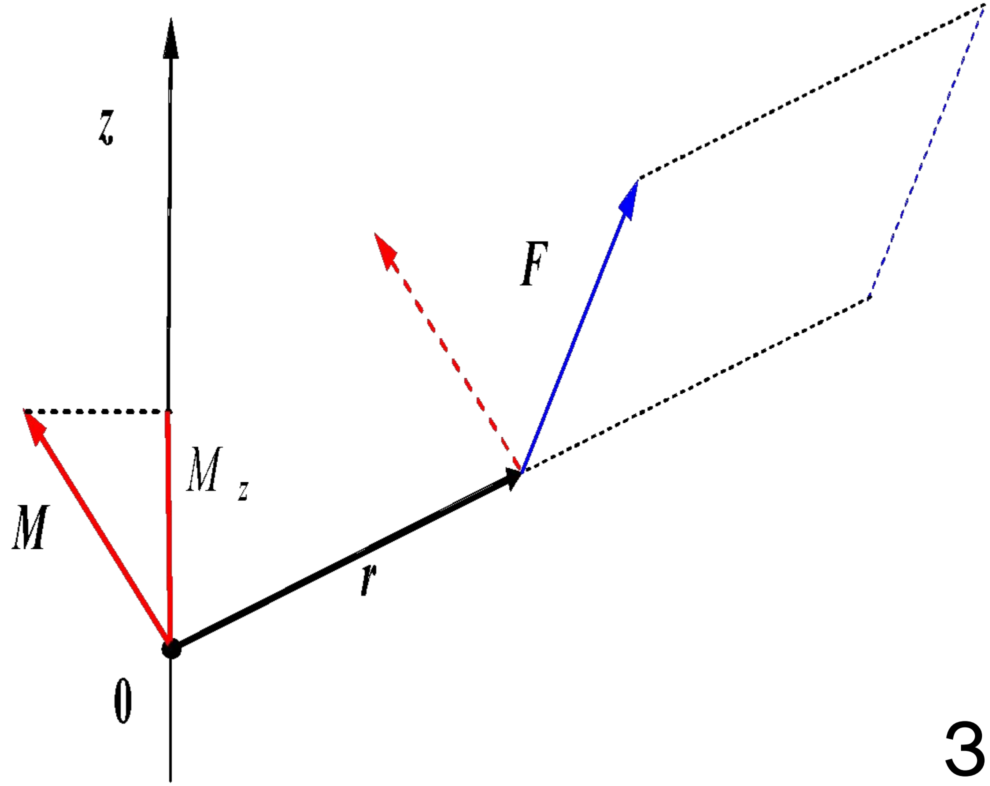


$$|\vec{M}| = |\vec{r}||\vec{F}| \cdot \sin\alpha,$$

$$|\vec{r}| \cdot \sin\alpha = l - плечо\ \ силы.$$

$$\vec{M} = M_x\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k},$$

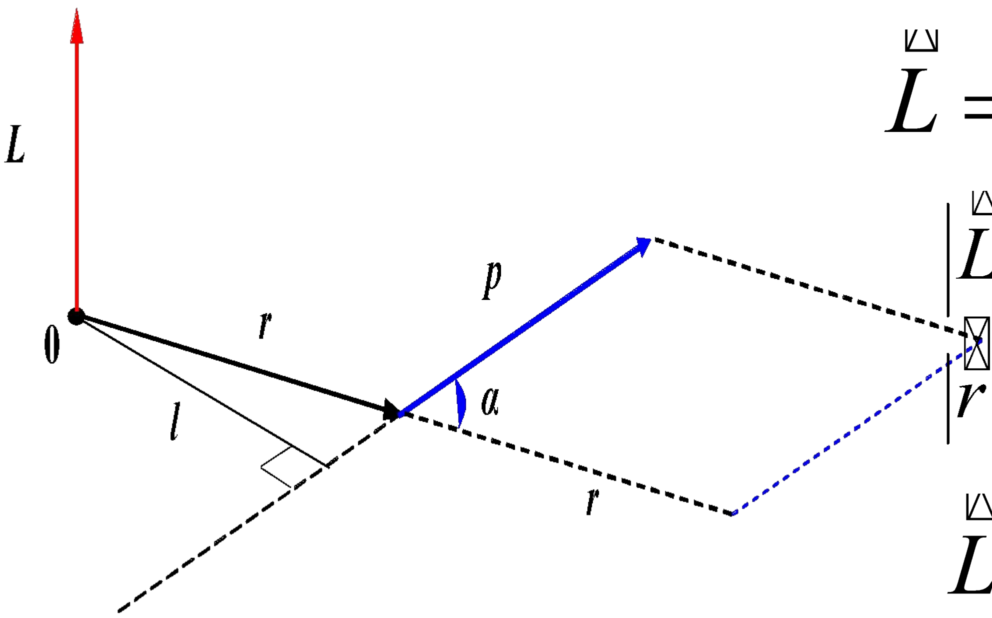
$$M_x = \left|[\vec{r} \cdot \vec{F}]_x\right|, M_y = \left|[\vec{r} \cdot \vec{F}]_y\right|, M_z = \left|[\vec{r} \cdot \vec{F}]_z\right|.$$



Момент силы относительно неподвижной оси – скалярная величина, равная проекции на эту ось вектора ***M*** относительно произвольной точки данной оси.

Значение M_z не зависит от выбора положения точки 0 на оси *z*.

Момент импульса (количества движения) материальной точки относительно неподвижной точки 0 – физическая величина, определяемая векторным произведением



$$\vec{L} = [\vec{r} \cdot \vec{p}] = [\vec{r} \cdot m\vec{v}].$$

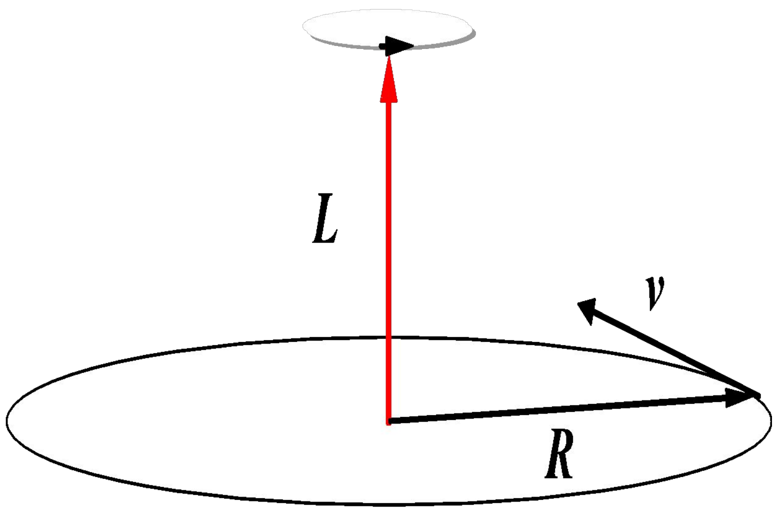
$$|\vec{L}| = |\vec{r}||\vec{p}| \cdot \sin\alpha,$$

$$|\vec{r}| \cdot \sin\alpha = l - \textit{плечо импульса}.$$

$$\vec{L} = L_x\vec{i} + L_y\vec{j} + L_z\vec{k},$$

$$L_x = \left|[\vec{r} \cdot \vec{p}]\right|_x, L_y = \left|[\vec{r} \cdot \vec{p}]\right|_y, L_z = \left|[\vec{r} \cdot \vec{p}]\right|_z.$$

Момент импульса относительно неподвижной оси – скалярная величина, равная проекции на эту ось вектора ***L*** относительно произвольной точки данной оси.



$$\vec{L} = [\vec{r} \cdot \vec{p}].$$

Для движения по окружности:

$$\vec{L} = [\vec{R} \cdot m\vec{v}].$$

$$L = Rmv \sin \underbrace{\angle \vec{v}, \vec{R}}_{\vec{v} \perp \vec{R}} = Rm \underbrace{v}_{\omega R} = \omega m R^2 .$$

Уравнение моментов

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}.$$

Математическая справка: $\dfrac{d}{dt}(x\cdot y) = \dfrac{dx}{dt}y + x\dfrac{dy}{dt}.$

$$\frac{d}{dt}\underbrace{[\vec{r}\cdot\vec{p}]}_{\vec{L}} = \left[\underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{v}}\cdot\vec{p}\right] + \left[\vec{r}\cdot\underbrace{\frac{d\vec{p}}{dt}}_{\vec{F}}\right] \Rightarrow$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \underbrace{[\vec{v}\cdot\vec{p}]}_{\substack{0,\ \vec{v}\uparrow\uparrow\vec{p} \\ \sin\angle\vec{v},\vec{p}=0}} + \underbrace{[\vec{r}\cdot\vec{F}]}_{\vec{M}} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}.$$

$$\vec{L}\uparrow\uparrow\vec{M}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}.$$

Производная по времени от момента импульса относительно точки равна моменту силы относительно этой точки.

Производная по времени от момента импульса относительно оси равна моменту силы относительно этой оси.

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x, \frac{dL_y}{dt} = M_y, \frac{dL_z}{dt} = M_z.$$

Закон сохранения момента импульса системы материальных точек

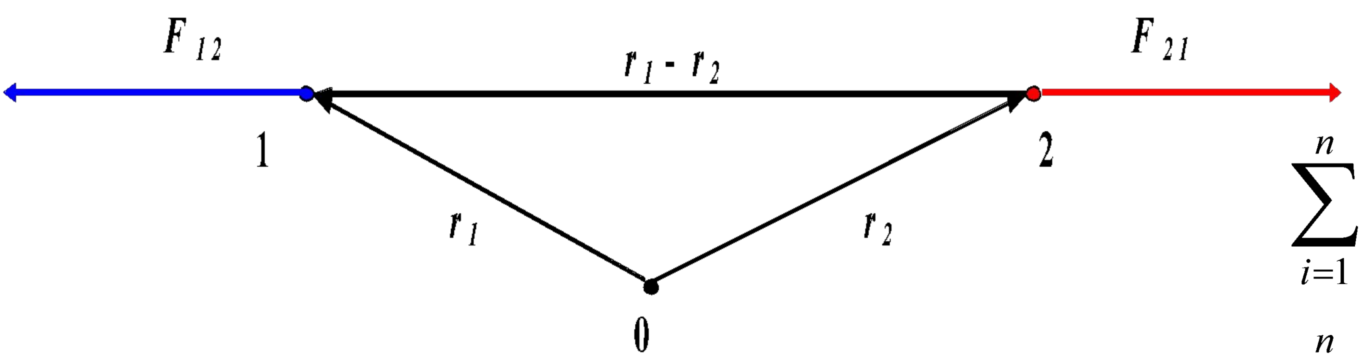
При произвольном движении системы *n* материальных точек:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i ,$$

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{M}_{i\ внутр} + \vec{M}_{i\ внеш} .$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{i\ внутр} + \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{i\ внеш} . \quad (1)$$

результирующий момент внутренних и внешних сил



Действие внутренних сил сводится к парным взаимодействиям

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{i\ внутр} = \vec{M}_{внутр} ,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{i\ внеш} = \vec{M}_{внеш} .$$

$$\left.\begin{aligned}&\vec{M}_1=\left[\vec{r}_1\cdot\vec{F}_{12}\right],\vec{M}_2=\left[\vec{r}_2\cdot\vec{F}_{21}\right],\\&3\quad з-н.\ \ Ньютона:\vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21}.\end{aligned}\right\}\vec{M}_2=\left[-\vec{r}_2\cdot\vec{F}_{12}\right]\Rightarrow$$

$$\vec{M}_1+\vec{M}_2=\left[\left(\vec{r}_1-\vec{r}_2\right)\cdot\vec{F}_{12}\right]=\left[\Delta\vec{r}\cdot\vec{F}_{12}\right]=0,$$

$$т.к.\Delta\vec{r}\uparrow\uparrow\vec{F}_{12},\angle\Delta\vec{r},\vec{F}_{12}=0.$$

Результирующий момент внутренних сил в соответствии с третьим законом Ньютона равен нулю.

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d\vec{L}_i}{dt}=\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_{i\ внутр}+\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_{i\ внеш}}_{\substack{результирующий\ момент\\ внутренних\ и\ внешних\ сил}}.(1)$$

В уравнении (1) операции дифференцирования и суммирования можно поменять местами: $\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\vec{L}_i=\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M}_{внеш}$.

Если внешние силы на систему не действуют, то

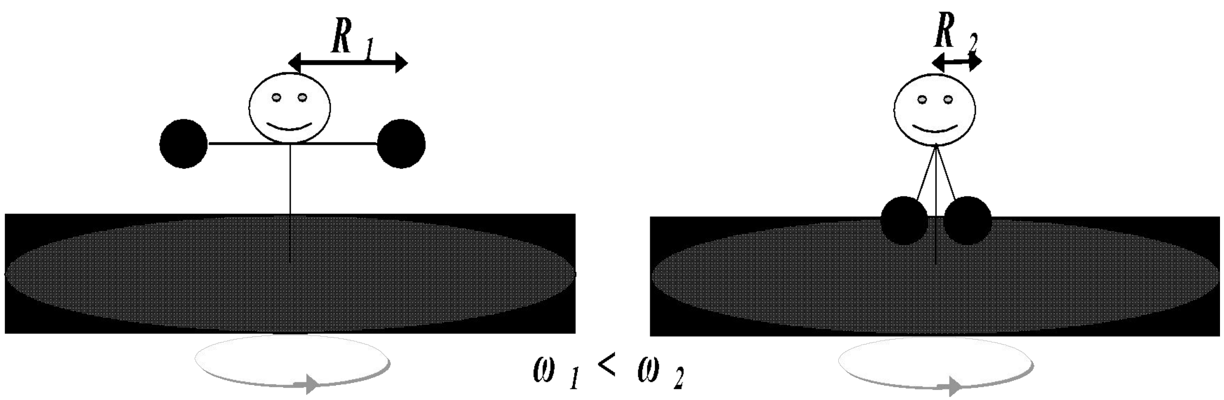
$$\vec{M}_{внеш}=0\Rightarrow\frac{d\vec{L}}{dt}=0\Rightarrow\vec{L}=const.$$

Момент импульса замкнутой системы величина постоянная, т.е. с течением времени не меняется – **закон сохранения момента импульса**.

Закон сохранения момента импульса является прямым следствием законов Ньютона и изотропности пространства – эквивалентности свойств пространства в различных направлениях.

Во многих задачах, связанных с вращающимися системами, угловая скорость вращения ω и момент импульса можно вычислить с помощью закона сохранения момента импульса.

Пример: скамья Жуковского, человек на вращающейся скамье держит в руках пару гантелей.



Вращается с угловой скоростью ω_1. Затем сжимает руки и прижимает гантели к себе: $\omega_1 < \omega_2$.

Пусть масса двух гантелей m и R_1 таковы, что в первоначальный момент времени момент импульса человека $L_{ч1}$ равен моменту импульса гантелей $L_{г1}$: $L_{ч1} = L_{г1}$ (1).

$$L_{г1} = R_1 m v_1 = R_1 m(\omega_1 R_1) = m\omega_1 R_1^2 .(2)$$

Начальный момент импульса системы:

$$L_1 = L_{ч1} + m\omega_1 R_1^2 .(3)$$

Т.к. $L_{ч1} = L_{г1}$

$$L_{ч1} = m\omega_1 R_1^2 .(4)$$

Во втором случае: $$L_2 = L_{ч2} + m\omega_2 R_2^2 .(5)$$

По закону сохранения момента импульса (уравнение (3) равно (5)):

$$L_{ч2} + m\omega_2 R_2^2 = L_{ч1} + m\omega_1 R_1^2 .(6)$$

$$L_{ч1} = m_ч \omega_1 r^2, (7)$$

Уравнение (7) делим на (8):

$$L_{ч2} = m_ч \omega_2 r^2. (8)$$

$$\frac{L_{ч1}}{L_{ч2}} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \Rightarrow L_{ч2} = L_{ч1}\frac{\omega_2}{\omega_1}. (9)$$

Уравнение (9) подставляем в (6):

$$L_{ч1}\frac{\omega_2}{\omega_1} + m\omega_2 R_2^2 = L_{ч1} + m\omega_1 R_1^2. (10)$$

Уравнение (4) подставляем в (10):

$$m\omega_1 R_1^2\left(\frac{\omega_2}{\omega_1} - 1\right) = m\left(\omega_1 R_1^2 - \omega_2 R_2^2\right),$$

$$m\omega_1 R_1^2\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}-1\right)=m\left(\omega_1 R_1^2-\omega_2 R_2^2\right),$$

$$\omega_2 R_1^2-\omega_1 R_1^2=\omega_1 R_1^2-\omega_2 R_2^2,$$

$$\omega_2\left(R_1^2+R_2^2\right)=2\omega_1 R_1^2,\quad \omega_2=2\omega_1\frac{R_1^2}{\left(R_1^2+R_2^2\right)};$$

$$R_2<R_1\Rightarrow\omega_2\approx 2\omega_1.$$

Аналогичная ситуация возникает, когда фигурист прижимает руки к себе и начинает вращаться быстрее.

Гироскоп

- **Гироскоп** – быстро вращающееся симметричное твердое тело, ось вращения которого может изменять свое направление в пространстве.

Происходит от греческого *гиро скоп*

кружусь *наблюдаю*

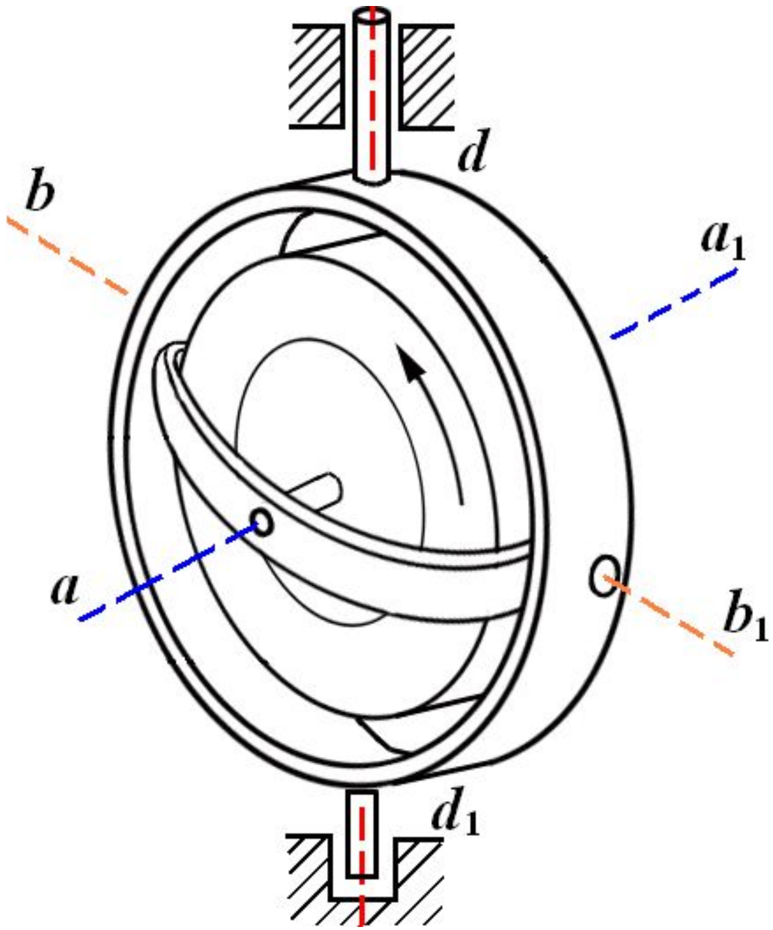
Свойства гироскопа проявляются у вращающихся небесных тел, снаряда (пули), роторов турбин, установленных на судах, волчка, юлы.

На свойствах гироскопа основаны различные приборы и устройства, применяемые в технике.

Свойства гироскопа проявляются при выполнении двух условий:

1. ось вращения гироскопа должна иметь возможность изменять своё положение в пространстве;
2. частота вращения гироскопа вокруг своей оси должна быть много больше скорости изменения направления оси в пространстве.

Для того чтобы ось гироскопа могла свободно поворачиваться в пространстве, его обычно закрепляют на кольцах, так называемая *карданова подвеса*.



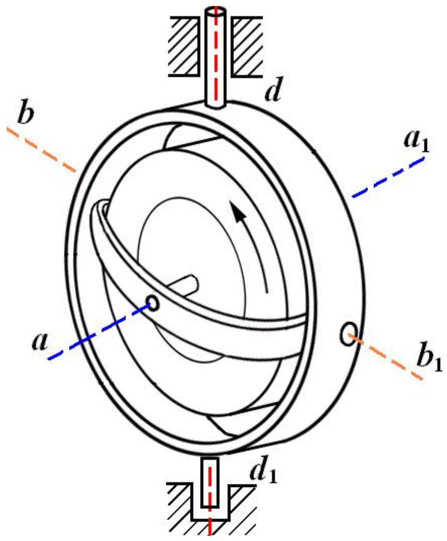
Дискообразное тело – *гироскоп* закреплено на оси aa_1 – *ось гироскопа*, которая может вращаться вокруг перпендикулярной ей горизонтальной оси bb_1, которая, в свою очередь, может поворачиваться вокруг вертикальной оси dd_1.

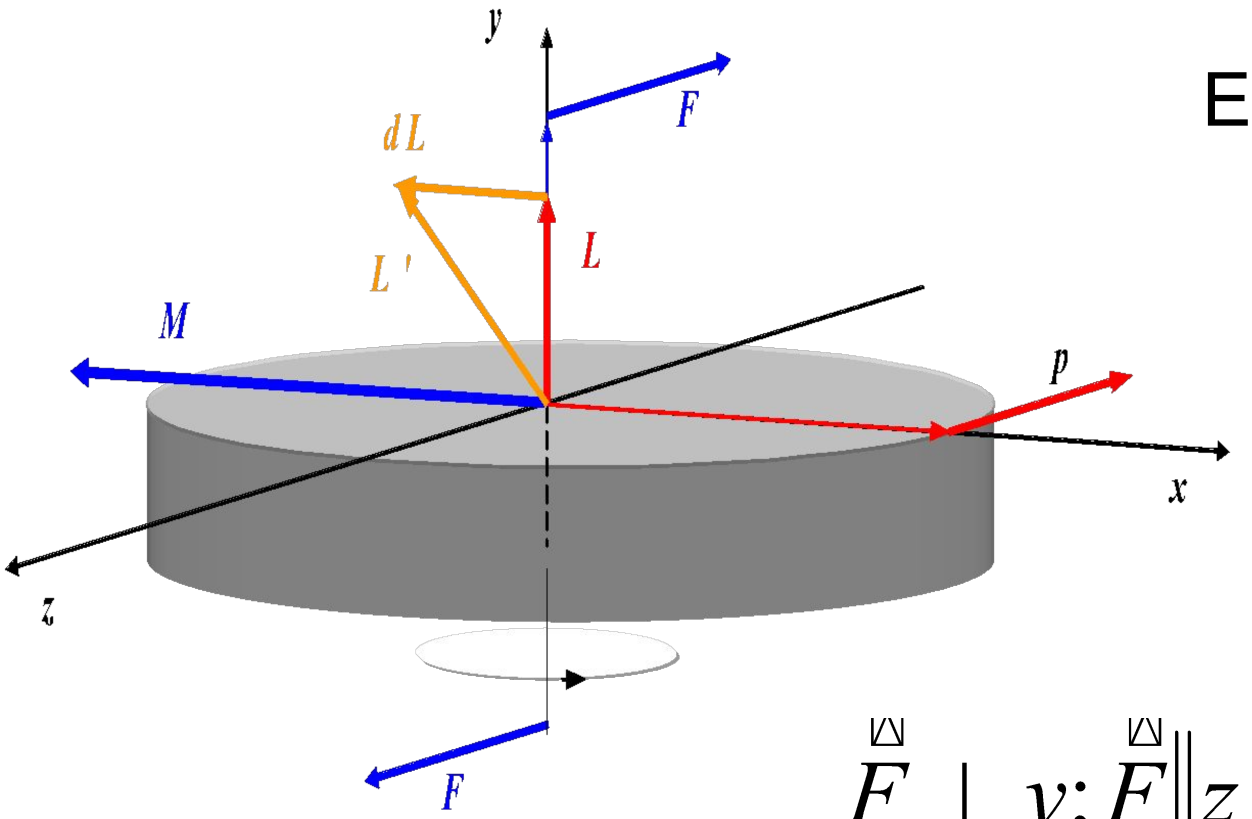
Все три оси пересекаются в одной точке, называемой *центром подвеса*. Такой гироскоп имеет 3 степени свободы и может совершать любой поворот около центра подвеса.

Силами трения в подшипниках и моментами импульса колец пренебрегаем.

Пока гироскоп неподвижен, его можно ориентировать в пространстве любым образом.

Если гироскоп начинает вращаться с большой угловой скоростью ω, то при отсутствии внешних сил ($\boldsymbol{F}_{внеш}$ =0) $\boldsymbol{M}$ = 0 и т.е. ось гироскопа сохраняет свое положение в пространстве.

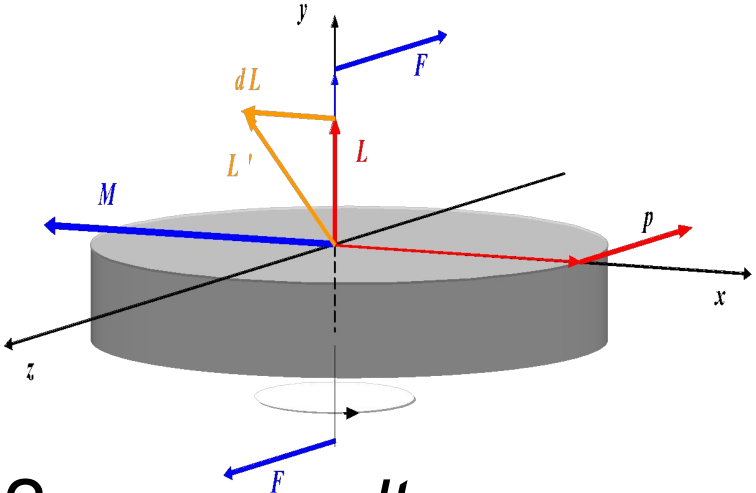




Если к оси гироскопа у приложить пару сил ***F***, то возникает вращающий момент ***M***.

$$\vec{F} \perp y; \vec{F} \parallel z \Rightarrow \vec{M} \parallel x \Rightarrow$$

Ось гироскопа поворачивается вокруг оси *z*, а не вокруг *x*, как это могло показаться. Это *гироскопический эффект.*



$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt};\, d\vec{L} = \vec{M}dt \Rightarrow d\vec{L} \parallel \vec{M}.$$

За время *dt* гироскоп получит приращение ***dL*** и станет $\vec{L}' = \vec{L} + d\vec{L}.$

Вектор ***L'*** совпадает с направлением оси вращения гироскопа.

Если время воздействия мало *dt* → 0, то даже если момент сил ***M*** велик, ***dL*** → 0, т.е. кратковременное действие сил не приводит к изменению ориентации оси гироскопа, она будет сохранять определённое направление в пространстве.

Гироскоп

Применение:

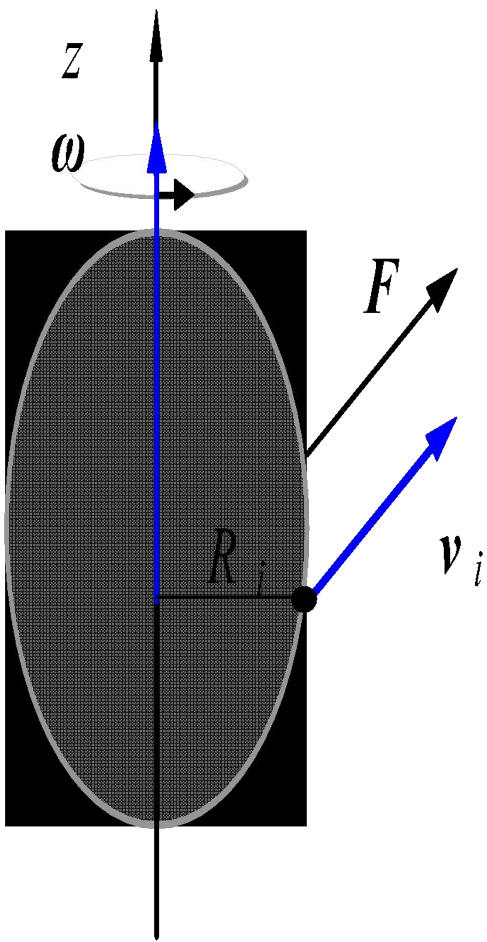
- навигационные устройства (гирокомпас, гирогоризонт),
- поддержание заданного направления движения (автопилот).

При конструировании судов и самолетов необходимо учитывать гироскопические силы, возникающие в подшипниках массивных валов двигателей, роторов турбин, гребных валов и т.п.

Динамика вращательного движения абсолютно твёрдого тела относительно неподвижной оси

Основное уравнение динамики вращательного движения

При вращении абсолютно твёрдого тела вокруг неподвижной оси z каждая отдельная точка движется по окружности постоянного радиуса R_i с некоторой скоростью v_i.



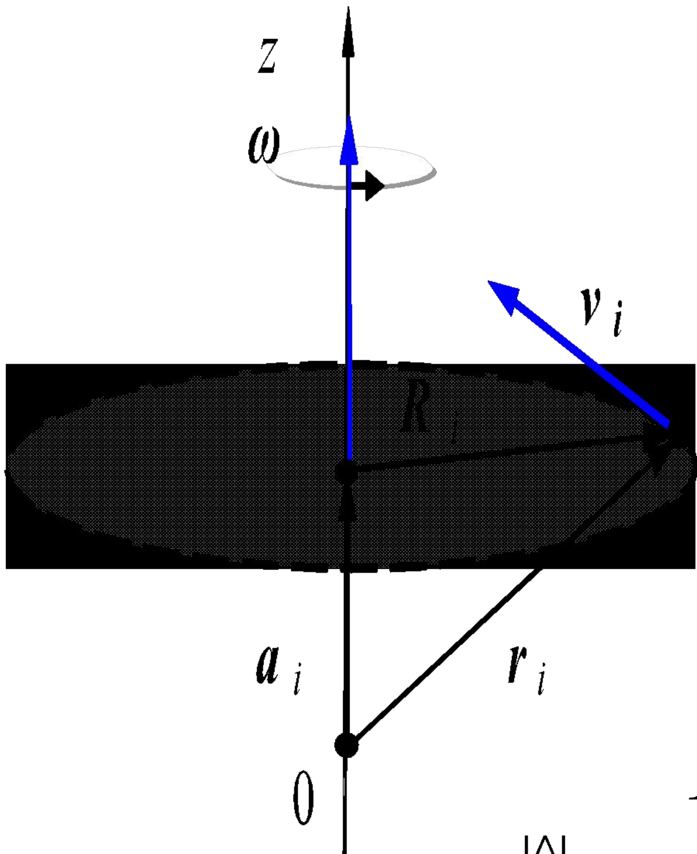
Моменты силы:

$$\vec{M} = M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k},$$

$$M_x \text{ и } M_y = 0 \Rightarrow$$

Закон сохранения момента импульса:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z.$$



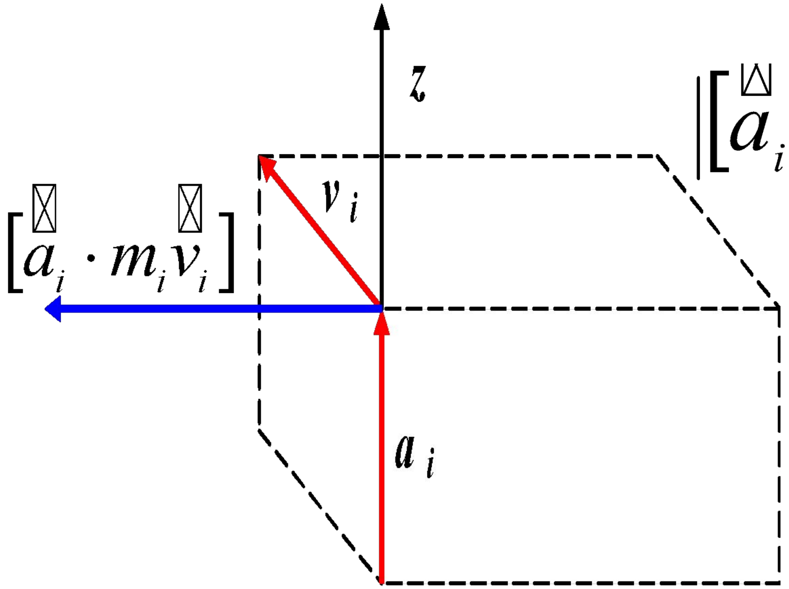
Момент импульса относительно точки 0 для *i* точки твёрдого тела:

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i \cdot m_i \vec{v}_i] = [(\vec{a}_i + \vec{R}_i) \cdot m_i \vec{v}_i].$$

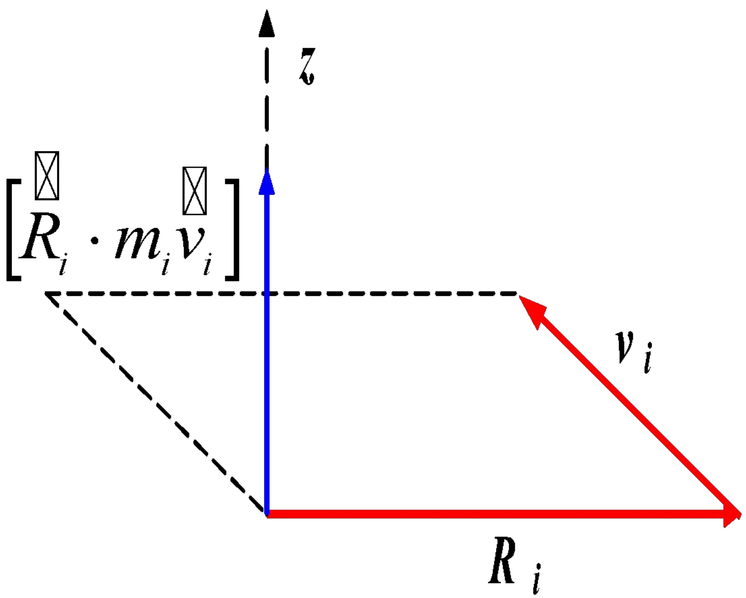
Проекция на ось *z* $\vec{L}_i$ относительно точки 0:

$$|\vec{L}_i|_z = |[(\vec{a}_i + \vec{R}_i) \cdot m_i \vec{v}_i]|_z =$$

$$= |[\vec{a}_i \cdot m_i \vec{v}_i]|_z + |[\vec{R}_i \cdot m_i \vec{v}_i]|_z.$$



$$\left|\left[\vec{a}_i \cdot m_i\vec{v}_i\right]\right|_z = 0 \quad \text{т.к.}\left[\vec{a}_i \cdot m_i\vec{v}_i\right] \perp z.$$



$$\left|\left[\vec{R}_i \cdot m_i\vec{v}_i\right]\right|_z = \left|\vec{L}_i\right|_z.$$

$$L_{iz} = R_i m_i v_i,$$

$$v_i = R_i\omega. \Rightarrow L_{iz} = m_i R_i^2\omega.$$

Твёрдое тело – система жёстко связанных материальных точек.

Следовательно, для твёрдого тела:

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} L_{iz} = \sum_{i=1}^{n} \omega m_i R_i^2 = \omega \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2 .$$

$J_i = m_i R_i^2$ – момент инерции материальной точки относительно оси *z*.

$J_z = \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2$ - момент инерции твердого тела относительно оси *z*.

$L_z = \sum_{i=1}^{n} L_{iz}$ - момент импульса (количества движения) твердого тела относительно оси *z*.

$$L_z = \omega J_z.$$

Закон сохранения момента импульса: $\dfrac{dL_z}{dt} = M_z.$

$$\frac{d(\omega J_z)}{dt} = J_z \frac{d\omega}{dt} = J_z \cdot \varepsilon = M_z.$$

Т.к. координатную ось *z* приняли произвольно, индекс можно опустить.

$M = J \cdot \varepsilon$ – основное уравнение динамики вращательного движения.

В общем случае: $$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{J}$$

– ускорение вращения твердого тела относительно неподвижной оси прямо пропорционально моменту всех внешних сил относительно этой оси и обратно пропорционально моменту инерции твердого тела относительно этой оси.

- Физический смысл:

Момент инерции относительно оси – мера инерции твердого тела при вращательном движении относительно оси.

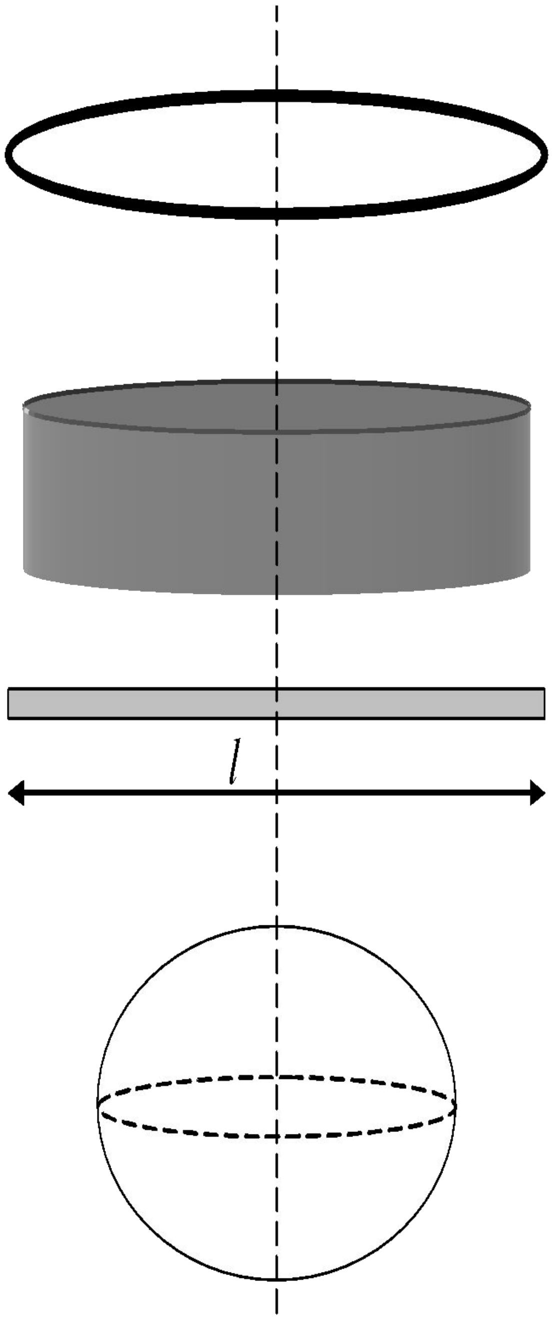
Момент инерции.
Теорема Гюйгенса-Штейнера

Момент инерции системы тел – физическая величина равная сумме произведений m_i на r_i^2:

$$J = \sum m_i \cdot r_i^2 .$$

В случае непрерывного распределения масс сумма сводится к интегралу:

$$J = \int_m r^2 dm = \int_V \rho r^2 dV .$$



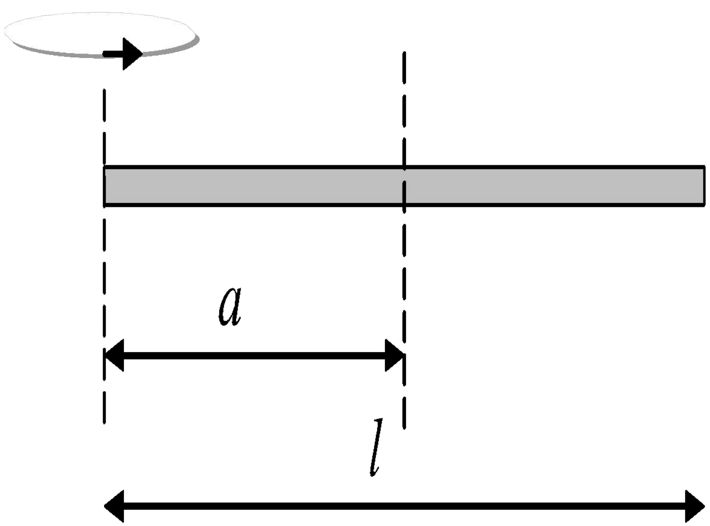
Кольцо $J = mR^2.$

Диск, цилиндр $J = \dfrac{mR^2}{2}.$

Стержень $J = \dfrac{ml^2}{12}.$

Шар $J = \dfrac{2}{5}mR^2.$

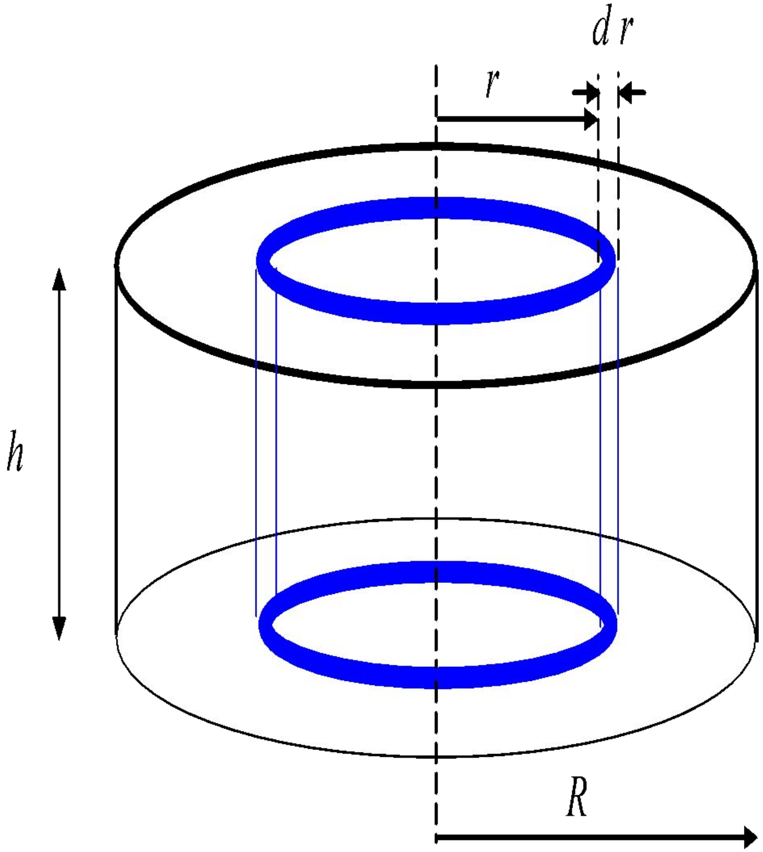
Теорема Гюйгенса-Штейнера: момент инерции относительно произвольной оси равен моменту инерции относительно параллельной ей оси, проходящей через центр масс J_0, сложенному с произведением массы тела на квадрат расстояния между ними a^2.



$$J = J_0 + ma^2.$$

$$J = J_0 + ma^2 = \frac{ml^2}{12} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ml^2.$$

Пример: расчет момента инерции сплошного цилиндра радиуса *R*, высотой *h*.



Разобьем на полые цилиндры *r*, *r* + *dr*, *dr*→0.

$$dr << r \Rightarrow dJ = r^2 dm,$$

dm – масса всего полого цилиндра.

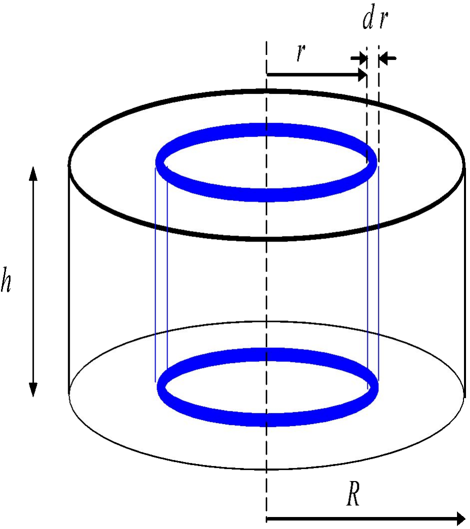
$$dV = 2\pi rhdr \Rightarrow$$

$$dm = 2\pi rh\rho dr \Rightarrow$$

$$dJ = 2\pi h\rho r^3 dr \Rightarrow$$

$$J = \int dJ = 2\pi h\rho \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2}\pi hR^4 \rho, \left(V = \pi R^2 h\right) \Rightarrow$$

$$J=\int dJ=2\pi h\rho\int_0^R r^3 dr=\frac{1}{2}\pi hR^4\rho,\left(V=\pi R^2 h\right)\Rightarrow$$



$$J=\frac{mR^2}{2}.$$

Закон сохранения момента импульса АТТ относительно неподвижной оси

В общем виде $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}.$

В замкнутой системе $\vec{M} = 0.$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0, \quad L = const.$$

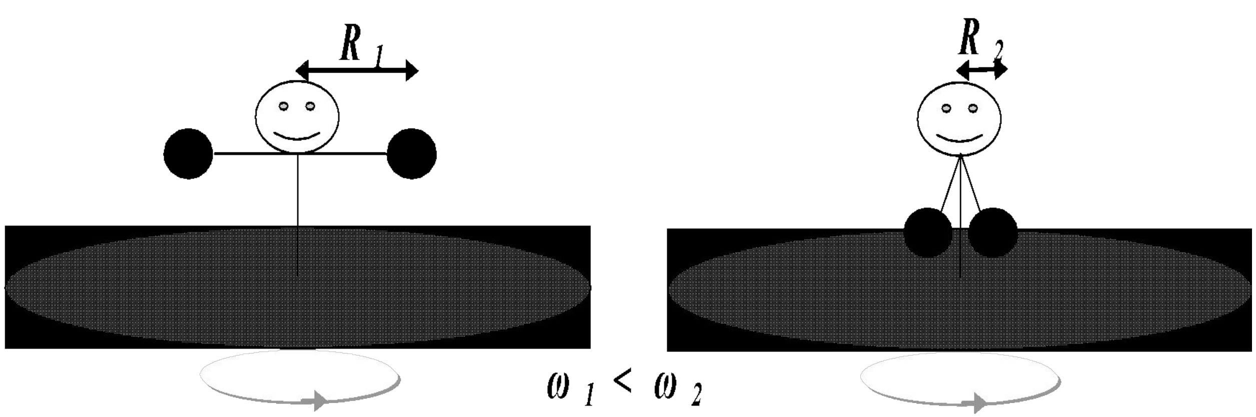
Фундаментальный закон, связан с симметрией пространства, его изотропностью, т.е. физические законы не зависят от выбора направления осей системы координат.

Скамья Жуковского.

$$L = J\omega = const.$$

$$\left(J_0 + 2mR_1^2\right)\omega_1 = J_0\omega_2 = const \Rightarrow \omega_1 < \omega_2.$$

$$R_2 \to 0.$$



Кинетическая энергия при вращательном движении АТТ

Т.к. имеется АТТ, следовательно, для всех m_i ω = const.

$$E_к = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{2} \omega^2 R_i^2 = \frac{\omega^2}{2} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2}_{J} = \frac{J\omega^2}{2}.$$

Динамика вращательного движения. Работа и мощность при вращательном движении относительно неподвижной оси

Основное уравнение динамики вращательного движения:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{J}; \quad \vec{M} = J\frac{d\vec{\omega}}{dt}. (1)$$

Закон сохранения момента импульса:

$$L = J\omega = const.$$

Кинетическая энергия при вращательном движении:

$$E_{к} = \frac{J\omega^2}{2}. (2)$$

Работа при вращательном движении идёт на увеличение его кинетической энергии:

$$dA = dE_{к}.(3)$$

$$dA = d\left(\frac{J\omega^2}{2}\right) = J\omega d\omega.(4)$$

Из (1) следует $$Jd\omega = Mdt.(5)$$

Уравнение (5) подставляем в (4):

$$dA = \omega Mdt = Md\varphi.(6) \Rightarrow A = M \cdot \varphi.(7)$$

Мощность:

$$N = \frac{dA}{dt} = M\,\frac{d\varphi}{dt} = M \cdot \omega. (8)$$

Плоское движение твердого тела

Плоское движение – движение, при котором все участки траектории любых двух точек твёрдого тела лежат в параллельных плоскостях.

Кинетическая энергия складывается из энергии поступательного движения и энергии вращения.

$$E_к = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{J_c\omega^2}{2},$$

v_c – скорость центра масс,

J_c – момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс.

Поступательное движение	Вращательное движение
$\vec{r}$	$\vec{\varphi}$
m	J
$\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$	$\vec{\omega} = \dfrac{d\vec{\varphi}}{dt}$
$\vec{p} = m\vec{v}$	$\vec{L} = J\vec{\omega}$
$\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$	$\vec{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$
$\vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m}$	$\vec{\varepsilon} = \dfrac{\vec{M}}{J}$
$E_к = \dfrac{mv^2}{2}$	$E_к = \dfrac{J\,\omega^2}{2}$
$A = FS; \quad N = Fv$	$A = M\varphi; \quad N = M\omega$