Преобразования графиков функций

10 класс

Говоря о преобразованиях графиков функций, мы имеем ввиду изменения графика некой элементарной функции (график которой строится достаточно просто) относительно системы координат с помощью параллельного переноса, симметрии относительно осей координат, растяжения или сжатия вдоль оси.

«Элементарные» функции:

$$y = kx + b$$

$$y = x^2$$

$$y = x^3$$

$$y = |x|$$

$$y = \sqrt{x}$$

$$y = \frac{k}{x}$$

$$y = \sin x$$

$$y = \cos x$$

$$y = tgx$$

$$y = ctgx$$

Так как функция – это зависимость аргумента и соответствующего ему значения функции, то будем рассматривать два направления преобразований – по каждой переменной.

Преобразования

Функции

(по оси Оу: «напрямую»)

Все изменения графика происходят вдоль оси функций.

Аргумента

(по оси Ох: «наоборот»)

Все изменения графика происходят вдоль оси аргументов.

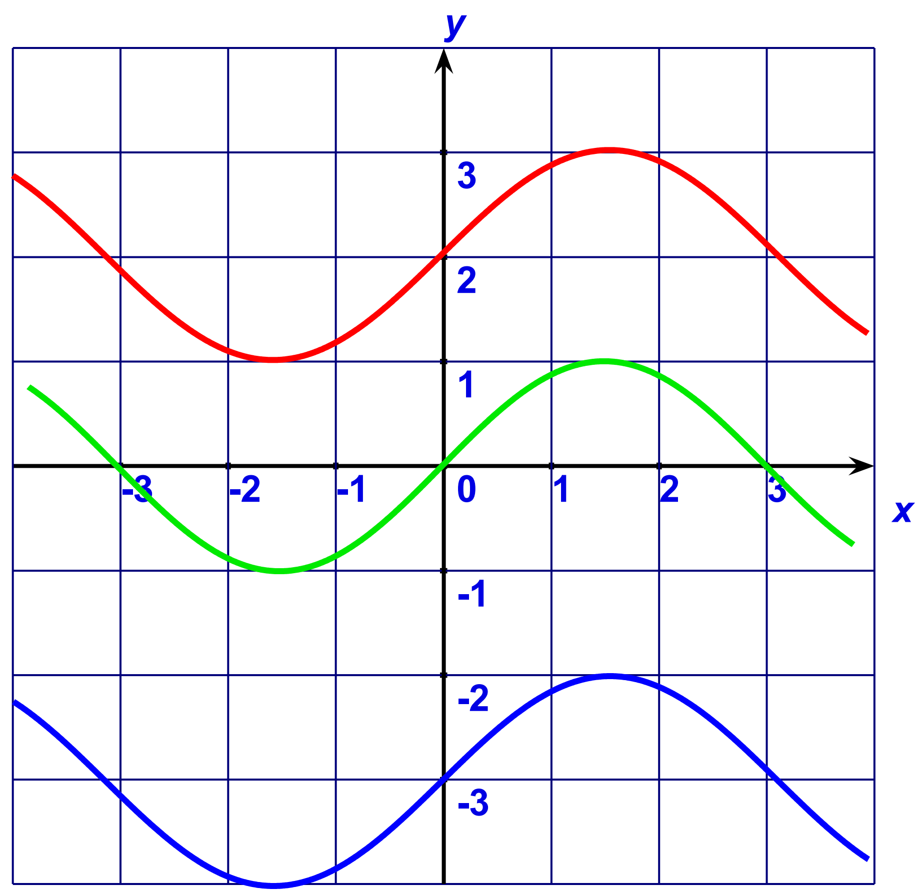
1. $y = f(x) + a$

Сдвиг по Оу на а

$y_0 = \sin(x)$

1) $y = \sin(x) + 2$
Сдвиг по Оу вверх на 2 ед.

2) $y = \sin(x) - 3$
Сдвиг по Оу вниз на 3 ед.



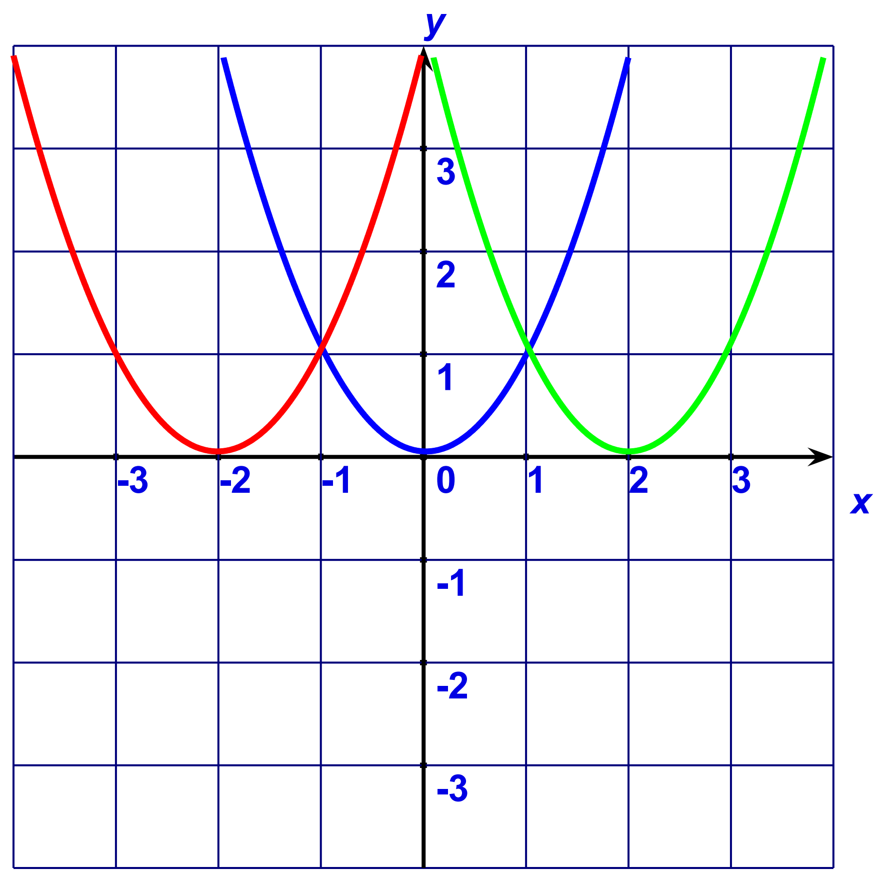
1. $y = f(x + a)$

Сдвиг по Ox на - a

$y_0 = x^2$

1) $y = (x + 2)^2$
Сдвиг по Ох влево на 2 ед.

2) $y = (x - 2)^2$
Сдвиг по Ох вправо на 2 ед.

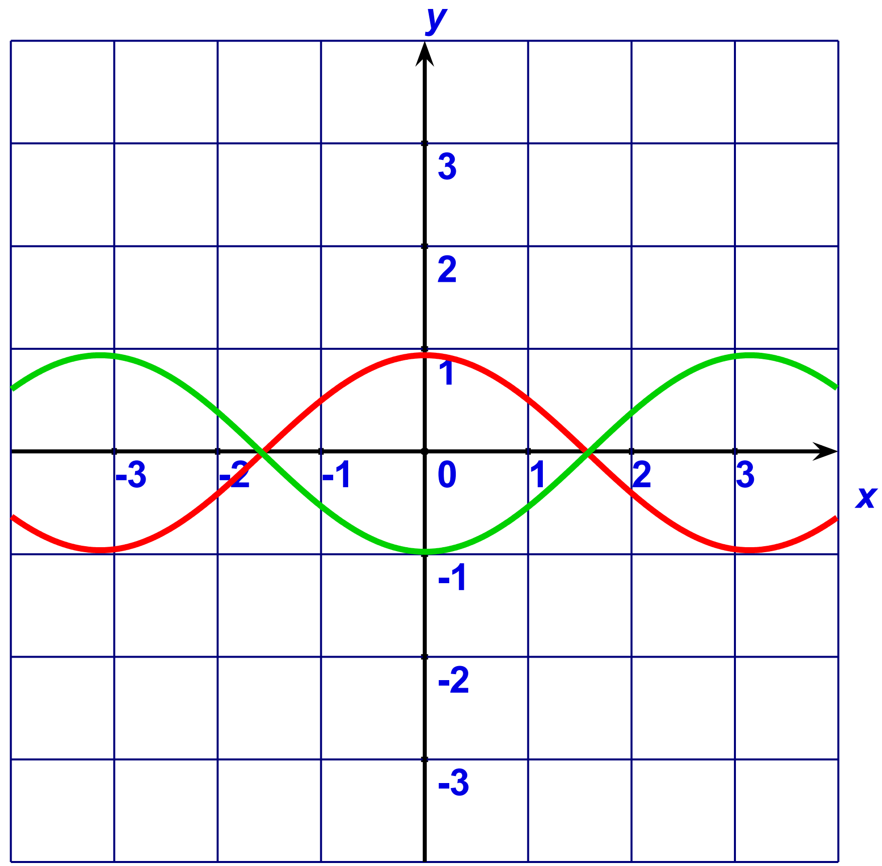


2. Y= - f (x)

Симметрия графика относительно Ox

$y_0 = \cos(x)$

1) $y = -\cos(x)$

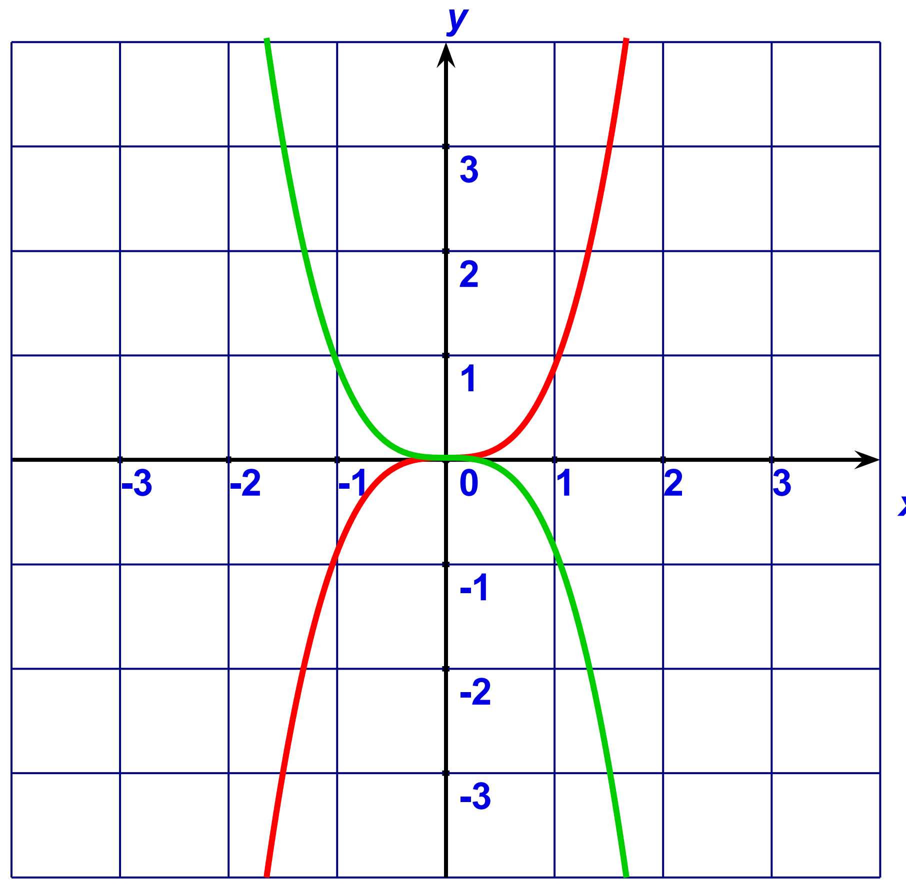


2. $y = f(-x)$

Симметрия графика относительно Oy

$y_0 = x^3$

1) $y = (-x)^3$



3. $y = k \cdot f(x)$

$k>1$

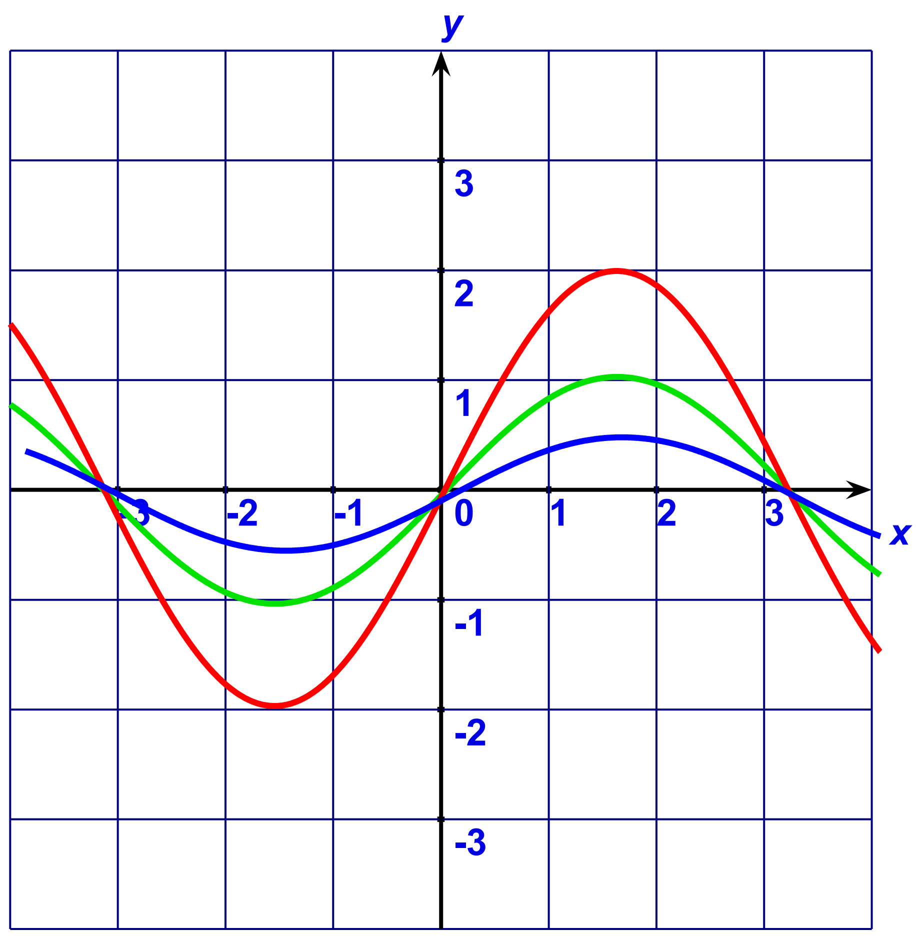
растяжение по Oy в k раз.

$0<k<1$

сжатие по Oy в 1/k раз.

1) $y = 2\sin(x)$

2) $y = \frac{1}{2}\sin x$



$y_0 = \sin(x)$

3. $y = f(k \cdot x)$

$k>1$

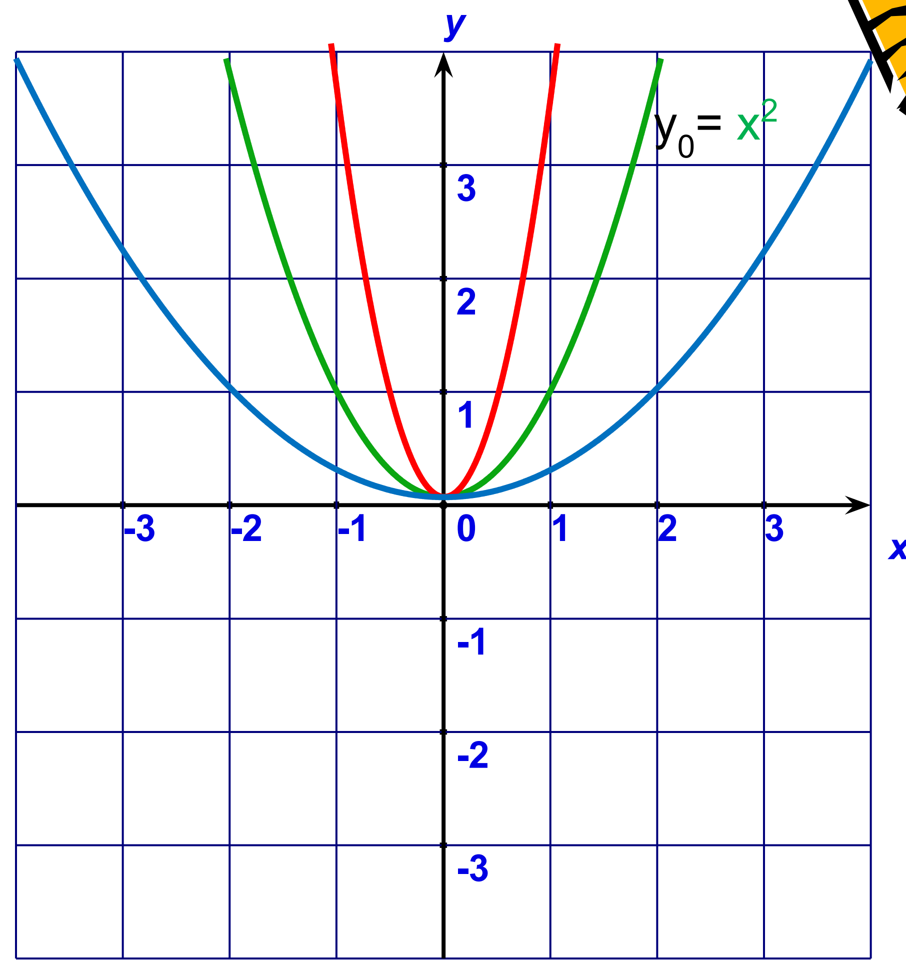
сжатие по Ox в k раз

$0<k<1$

растяжение по Ox в $1/k$ раз.

1) $y = (3x)^2$

2) $y = (0,5x)^2$



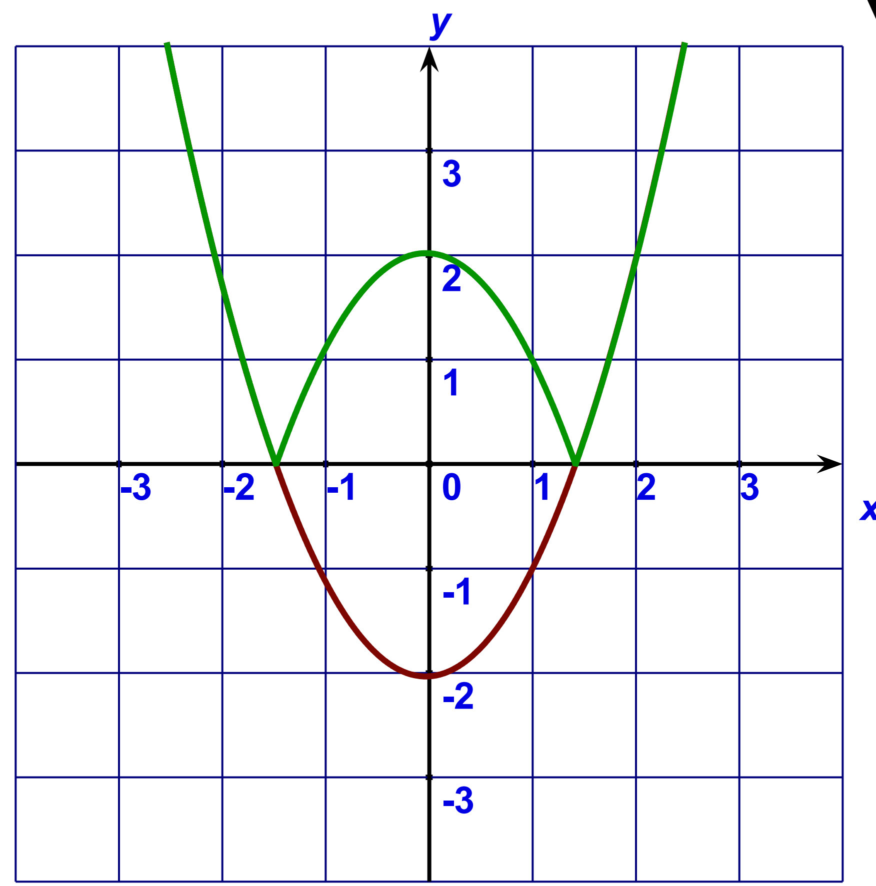
4. $y = |f(x)|$

Симметрия

отн. Ox части графика для $y<0$, а для $y \geq 0$- оставить.

$y_0 = x^2$

$y = |x^2 - 2|$

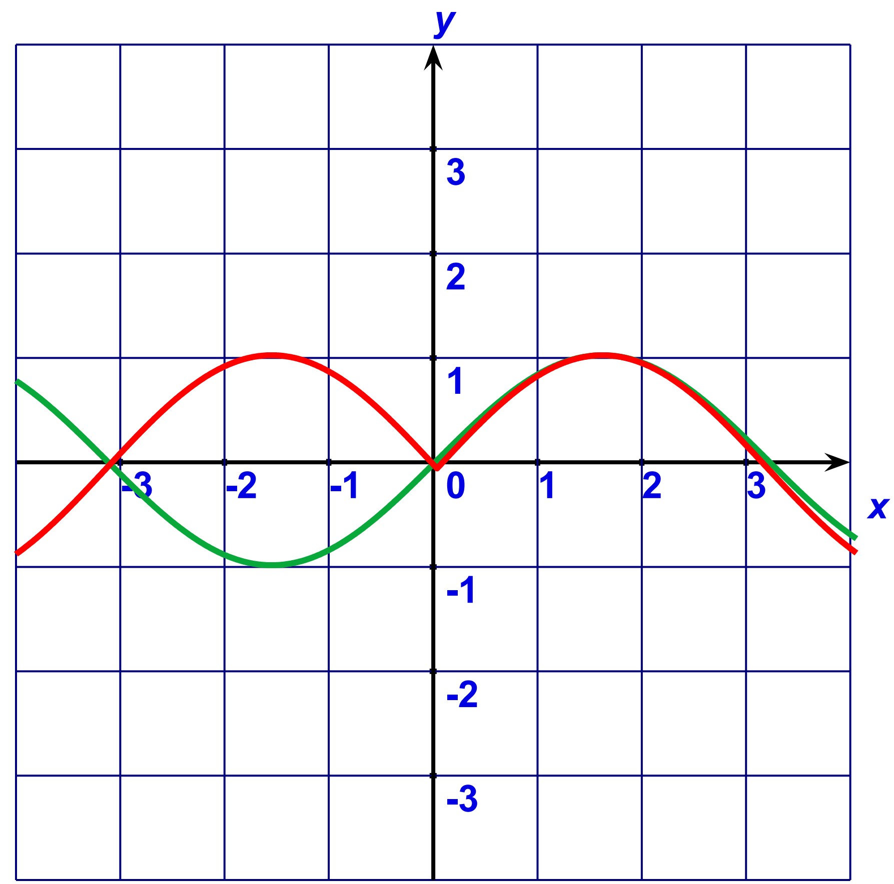


4. y = f (|x|)

Симметрия отн. Оу части графика для x ≥ 0, а для x<0 - отбросить.

$y_0 = \sin(x)$

$y = \sin(|x|)$



В зависимости от задания функции ее график можно построить в результате композиции нескольких последовательно выполненных преобразований. Для этого в правой части формулы, задающей функцию, надо расставить порядок действий как в обычном примере:

$$У = -0{,}5\cdot(x-2)^2+4 \quad \text{или} \quad у = \overset{2}{\underset{1}{-1}}\cdot \overset{3}{\underset{2}{0{,}5}}\cdot\overset{1}{\underset{3}{(x-2)^2}} \overset{4}{\underset{4}{+4}}$$

Учитывая, что от перестановки мест множителей произведение не меняется, выполняем преобразования в следующей последовательности:

$$\mathbf{y_0 = x^2}$$

1. Симметрия относительно оси Ох (× (-1))
2. Сжатие по оси Оу в 2 раза (× 0,5)
3. Сдвиг вдоль оси Ох вправо на 2 ед.(– 2)
4. Сдвиг вдоль оси Оу вверх на 4 ед.(+ 4)

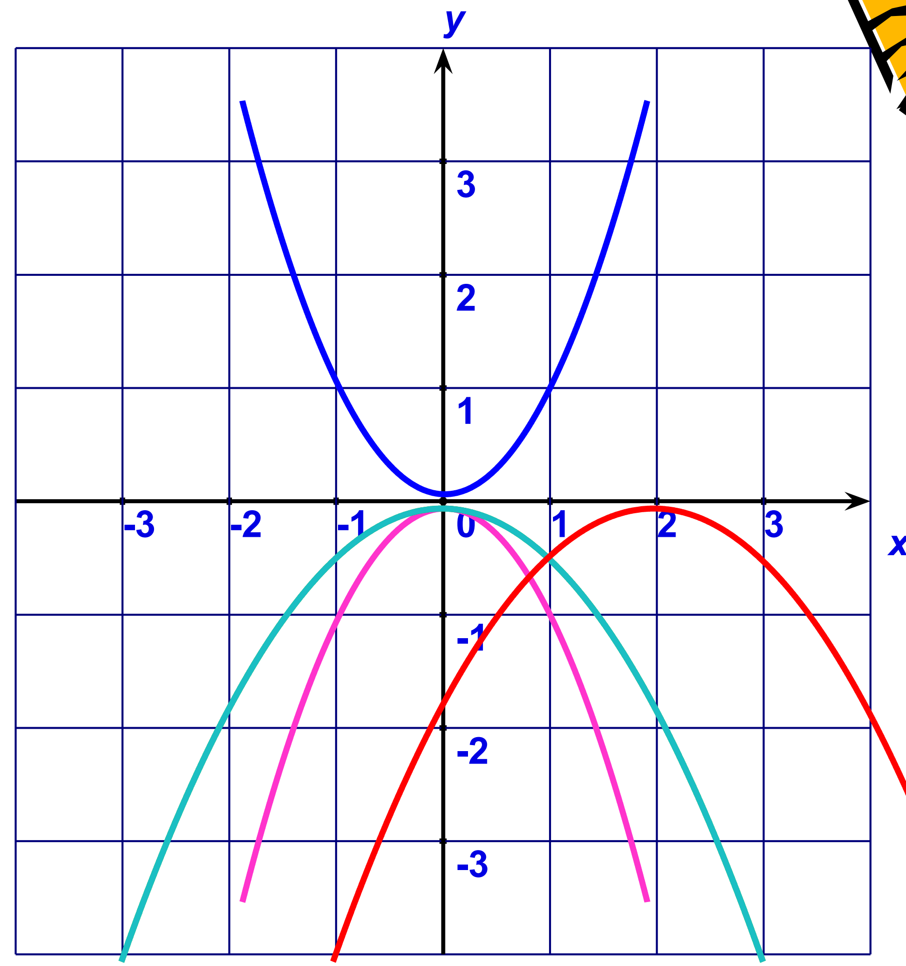
$y_0 = x^2$

1. Симметрия относительно оси Ох

2. Сжатие по оси Оу в 2 раза

3. Сдвиг вдоль оси Ох вправо на 2 ед.

4. Сдвиг вдоль оси Оу вверх на 4 ед.



Заключение:

Применение преобразований графиков – очень увлекательный процесс. Это не только экономия времени при построении, но и эстетическое наслаждение, а также ощущение своей «власти» над Функцией, график которой «податлив» в умелых руках и легко «подчиняется» воле знающего!

Желаем успехов в освоении материала!