Научно-исследовательская работа по теме:

«Применение производной в заданиях ЕГЭ»

Авторы: ученики 11 класса «Б»
Славинская Юлия,
Помаскин Владимир

Руководитель: учитель математики ВКК
Гончарова Светлана Евгеньевна

МБОУ средняя школа № 1 с. Анучино
2012 год

Цель:

Показать актуальность включения темы “Производная и ее применение” в задания для проведения ЕГЭ по математике.

Задачи:

- Показать важность знаний исторического и теоретического материала по теме «Производная».
- Определить процент учащихся, владеющих данным материалом и применяющих его при решении задач различного уровня сложности путем проведения анкетирования.
- Проанализировать основные способы решения заданий, рекомендованных для ЕГЭ по математике
- Способствовать развитию познавательной активности учащихся и интереса к изучаемым понятиям при помощи информационных технологий.

План исследования

- *Изучение и отбор литературы.*
- *Анализ заданий, рассматриваемых на ЕГЭ по данной теме.*
- *Проведение анкетирования среди учащихся 11 классов.Формулировка выводов.*

Гипотеза:

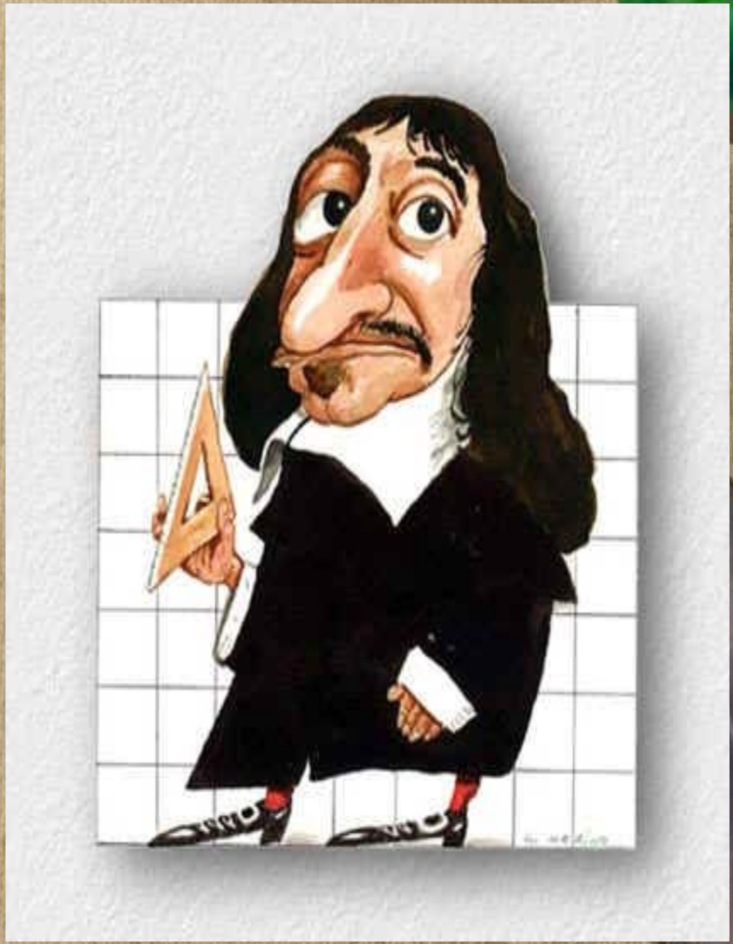
Тема «Производная и её применение» является значимой в курсе изучения математики в 10 — 11 классах и при дальнейшем обучении в высших учебных заведениях.

Содержание :

Исторические сведения

В конце 12 века великий английский учёный Исаак Ньютон доказал что путь и скорость связаны между собой формулой: $V(t)=S'(t)$ и такая связь существует между количественными характеристиками самых различных процессов исследуемых: физикой, химией, биологией, и техническими науками. Это открытие Ньютона стало поворотным пунктом в истории естествознания.

Честь открытия основных законов математического анализа наравне с Ньютоном принадлежит немецкому математику Готфриду Вильгельму Лейбницу. К этим законам Лейбниц пришел, решая задачу проведения касательной к произвольной кривой, т.е. сформулировал геометрический смысл производной, что значение производной в точке касания есть угловой коэффициент касательной или tg угла наклона касательной с положительным направлением оси OX.



Термин производная и современные обозначения у' , f ' ввёл Ж.Лагранж в 1797г.

В классическом дифференциальном исчислении производная чаще всего определяется через понятия теории пределов, однако исторически теория пределов появилась позже дифференциального исчисления.

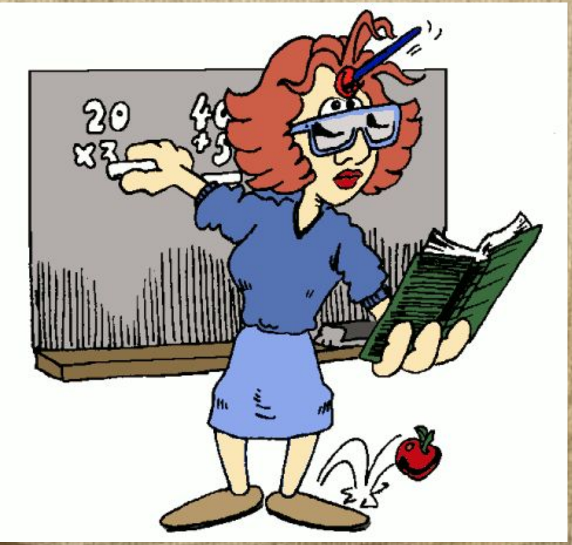
Русский термин «производная функции» впервые употребил В. И. Висковатов.

***Василий Иванович Висковатов* (26 декабря 1779 (6 января 1780), Санкт-Петербург — 8 (20) октября 1812, Санкт-Петербург) — русский математик. Известный**
специалист в области математического анализа и вариационного исчисления, один из активных последователей С. Г. Гурьева в пропаганде новых передовых научных идей.*

Выпущен из Артиллерийского и Инженерного Шляхетского Кадетского Корпуса в 1796 года штык-юнкером в корпусные офицеры.
С 1803 года признан крупным математиком, избран академиком Петербургской Академии наук.
С 1810 года — профессор чистой и прикладной математики в Институте Корпуса инженеров путей сообщения.
Впервые употребил русский термин "производная функции".

Назад

Теоретический материал по теме «ПРОИЗВОДНАЯ»



Производные - это такие функции, которые получаются из заданных функций путем вычисления предела разностного отношения. Разностным отношением называется отношение разности значения функции к разности значений переменной.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Возникает вопрос? Почему производная есть тоже функция? Дело в том, что предел функции мы можем вычислить только в точке, а значение предела есть число f'(x0).

Но если менять это число x0, то f'(x0) будет тоже функцией от x0.

Как найти производную?

1. Необходимо знать таблицу производных основных элементарных функций.

2. Уметь видеть, как составная функция строится из основных элементарных функций.

3. Знать формулы производной составных функций – то есть производных суммы, произведения сложной функции и частного сложной функции (производной суперпозиции).

Таблица производных

№	Функция	Производная	№	Функция	Производная
1	x^n	nx^{n-1}	8	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
2	e^x	e^x	9	$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$
3	a^x	$a^x \ln a$	10	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
4	$\sin x$	$\cos x$	11	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
5	$\cos x$	$-\sin x$	12	$arctgx$	$\frac{1}{1+x^2}$
6	tgx	$\frac{1}{\cos^2 x}$	13	$arcctgx$	$-\frac{1}{1+x^2}$
7	$ctgx$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$			

Производная произведения. Формула

Формула производной произведения читается следующим образом: производная произведения двух функций равна сумме произведений каждой функции на производную другой функции:

u'(x)·v'(x)=u'(x)·v(x)+u(x)·v'(x)

Итак рассмотрим пример:

Найти производную функции ex·sin(x)

Приводим формулы из таблицы производных:

(ex)'=ex, (sin(x))'=cos(x).

Мы видим, что данная функция – составная. Она составлена из произведения двух функций, поэтому мы должны применить формулу производной произведения.

Для этого мы берем первый сомножитель и находим его производную:

(ex)'

Далее, умножаем эту производную на второй сомножитель

(ex)'·sin(x)

Берем второй сомножитель, а точнее - его производную:

$(\sin(x))'$

Умножаем производную второго сомножителя на первый сомножитель

$ex\cdot(\sin(x))'$

Далее, складываем эти два полученные выражения

$(ex\cdot\sin(x))'=(ex)'\cdot\sin(x)+ex\cdot(\sin(x))'$

Сравните это выражение с основной формулой

$u'(x)\cdot v'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x).$

Как видим, очень похоже.

Тепрерь мы пришли, наконец, к предыдуще задаче, которую уже умеем решать. В самом деле? осталось только подставить подставить вместо (ex)' выражение ex, а вместо (sin(x))' cos(x) и провести преобразования:

$(ex\cdot\sin(x))'=(ex)'\cdot\sin(x)+ex\cdot(\sin(x))'=ex\cdot\sin(x)+ex\cdot\cos(x)=ex\cdot(\sin(x)+\cos(x))$

Все, производная найдена, наша задача решена окончательно!

назад

Производная частного функций

Формула производная частного, формула производной отношения двух функций записывается следующим образом:

$$[u(x)/v(x)]'=[u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)]\cdot[1/v2(x)]$$

Итак пример: Найти прозводную функции $f(x)=(\sqrt{x})/x2$

Мы прекрасно видим, что данная функция является отношением, частным двух функций. Поэтому мы применяем формулу производной частного.

Как и ранее нужно взять производную числителя и умножить ее на производную знаменателя: $(\sqrt{x})'\cdot x2$

Берем числитель и умножаем его на производную знаменателя $(\sqrt{x})\cdot(x2)'$

Берем разность первого полученного выражения и второго и делим эту разность на квадрат знаменателя или умножаем на единицу деленную на квадрат знаменателя: $[(\sqrt{x})'\cdot x2-(\sqrt{x})\cdot(x2)']\cdot[1/x2]$

Сравните это выражение с выражением $[u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)]\cdot[1/v2(x)]$

Далее, подставляем уже известные выражения производных числителя и знаменателя и упрощаем выражение полученной производной:

$$[(\sqrt{x})'\cdot x2-(\sqrt{x})\cdot(x2)']\cdot[1/(x2)2]=[(1/2\sqrt{x})\cdot x2-(\sqrt{x})\cdot 2x]\cdot[1/(x2)2]=[(1/2x\tfrac{1}{2})\cdot x2-(x\tfrac{1}{2})\cdot 2x]\cdot[1/(x2)2]=[\tfrac{1}{2}\cdot x(2-\tfrac{1}{2})-2\cdot x2+\tfrac{1}{2}]\cdot[1/x4]=[\tfrac{1}{2}\cdot x3/2-2\cdot x3/2]\cdot[1/x4]=-[(3/2)\cdot x3/2]\cdot[1/x4]=-(3/2)\cdot x\text{-}5/2$$

Здесь мы воспользовались тем, что корень квадратный есть степень с показателем (1/2), при умножении степеней их показатели складываются, при делении степеней – показатели вычитаются, а при возведении степени в степень показатели перемножаются. Также при делении разности на некоторый знаменатель каждый член этой разности делится на знаменатель и берется их разность.

назад

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ ПРОСТЫХ ФУНКЦИЙ

Пример 1.

$$\left(x^2+3x+1\right)'=\left(x^2\right)'+(3x)'+(1)'=2x+3(x)'+0=2x+3.$$

Комментарий.

После применения теоремы о производной суммы (Теорема 3) образовалось три производных. Первая производная табличная, вторая сводится к табличной после вынесения константы за знак производной (ТЕОРЕМА 2), третья производная равна нулю, так как дифференцируется константа.

Пример 2.

$$\big((x+1)\sin x\big)' = (x+1)'\sin x + (x+1)(\sin x)' = (x'+1')\sin x +$$
$$+ (x+1)\cos x = (1+0)\sin x + (x+1)\cos x = \sin x + (x+1)\cos x.$$

Комментарий.

После применения теорема о производной произведения (ТЕОРЕМА 4) возникло две производных. Первая производная сводится к табличным производным в результате применения теоремы о производной суммы (ТЕОРЕМА 3). Вторая производная является табличной.

Пример 3.

$$\left(\frac{e^x+1}{\cos x}\right)' = \frac{(e^x+1)'\cos x-(e^x+1)(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\left(\left(e^x\right)'+1'\right)\cos x-(e^x+1)(-\sin x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{(e^x+0)\cos x+(e^x+1)\sin x}{\cos^2 x} = \frac{e^x\cos x+(e^x+1)\sin x}{\cos^2 x}.$$

Комментарий.

После применения теоремы о производной частного [(ТЕОРЕМА 5)] образовалось две производных. Вторая производная табличная, а первая в результате использования теоремы о производной суммы [(ТЕОРЕМА 3)] сводится к табличным производным.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ СЛОЖНЫХ ФУНКЦИЙ

Пример 1.

Вычислить производную от функ $y = \sin^3 x.$

Данную функцию можно представить как функцию от функции следу

$$y = F(u) = u^3, \quad \text{где} \quad u = \varphi(x) = \sin x.$$

Согласно теореме о сложной функции (Теорема 6) имеем

$$y' = y'_x = F'_u(u) \cdot \varphi'_x(x) = \left(u^3\right)' \cdot (\sin x)' = 3u^2 \cdot \cos x.$$

Заметим, что все производные, возникшие после взятия производной от сложной функции, являются табличными. Подставляя далее вместо функции u её выражение, окончательно получим:

$$y' = 3\sin^2 x \cdot \cos x.$$

Обычно все сказанное записывают в следующей укороченной форме:

назад

$$y' = \left(\sin^3 x\right)' = 3\sin^2 x \cdot (\sin x)' = 3\sin^2 x \cdot \cos x.$$

Теорема 2.

- **Константу можно вынести за знак производной, то есть**

$$\left(Cf(x)\right)' = C\left(f(x)\right)', \text{ где } C - \text{константа.}$$

назад

Теорема 3.

Производная суммы любого числа функций равна сумме производных этих функций.

Для трех функций, например, имеем:

$$\left(f(x)+g(x)+h(x)\right)'=f'(x)+g'(x)+h'(x).$$

назад

Теорема 4.

Производная произведения двух функций равна

$$\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

назад

Теорема 5.

Производная частного двух функций равна

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

назад

Теорема 6.

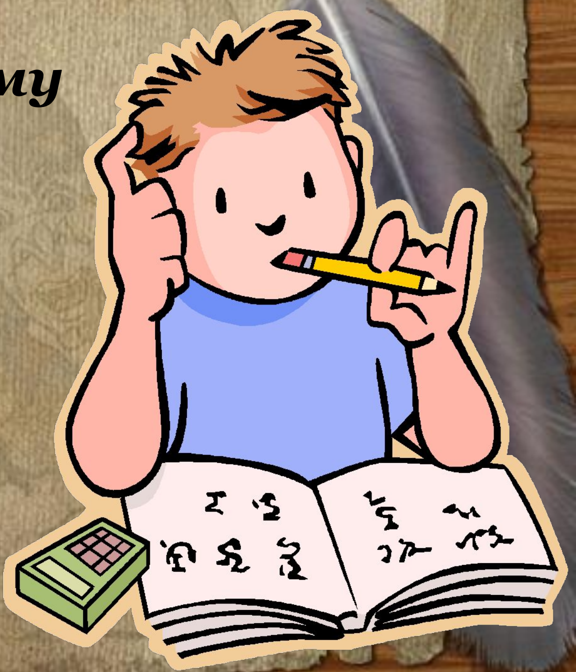
Пусть y=F(u), где u=j(x), тогда

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

назад

Вывод 1

Исторический материал показывает, что метод дифференциального исчисления, который был создан в XVII и XVIII вв., является инструментом, посредством которого стало возможно ставить и решать новый класс научных проблем. Поэтому каждому ученику, решившему продолжить обучение в старшем звене школы необходим набор знаний по данной теме.



Анкетирование учащихся

1.Запишите формулы нахождения производных

- *Линейной функции;*
- *Степенной функции;*
- *Тригонометрической функции;*
- *Сложной функции;*
- *Логарифмической функции.*

2. Запишите 3 правила нахождения производной функции.

3. Какие точки называются точками максимума и минимума?

4. Чему равна производная в критической точке?

5. Какой метод решения неравенств применяется при нахождении точек максимума и минимума?

- **Решить индивидуальные задания.**

Результаты анкетирования учащихся 11 классов (всего – 39 человек)

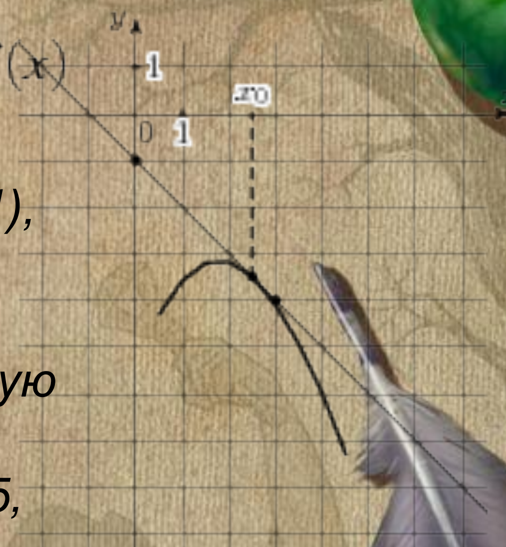
	Вопросы	правильно	С ошибками
1	Запишите формулы нахождения производных •Линейной функции; •Степенной функции; •Тригонометрической функции; •Сложной функции; •Логарифмической функции.	35	4
2	Запишите 3 правила нахождения производной функции.	27	12
3	Какие точки называются точками максимума и минимума?	36	3
4	Чему равна производная в критической точке?	39	-
5	Какой метод решения неравенств применяется при нахождении точек максимума и минимума?	33	6
6	Решение индивидуального задания.	26	13

Вывод 2

Анкетирование учащихся показало , что около 30 процентов учащихся имеют пробелы в знаниях по данной теме, не все умеют применять правила в практической работе. Значит необходимо повторить теоретический материал и систематически решать задания с использованием производной.

Задания из сборников по подготовке к ЕГЭ

B8 На рисунке изображены график функции $f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0.

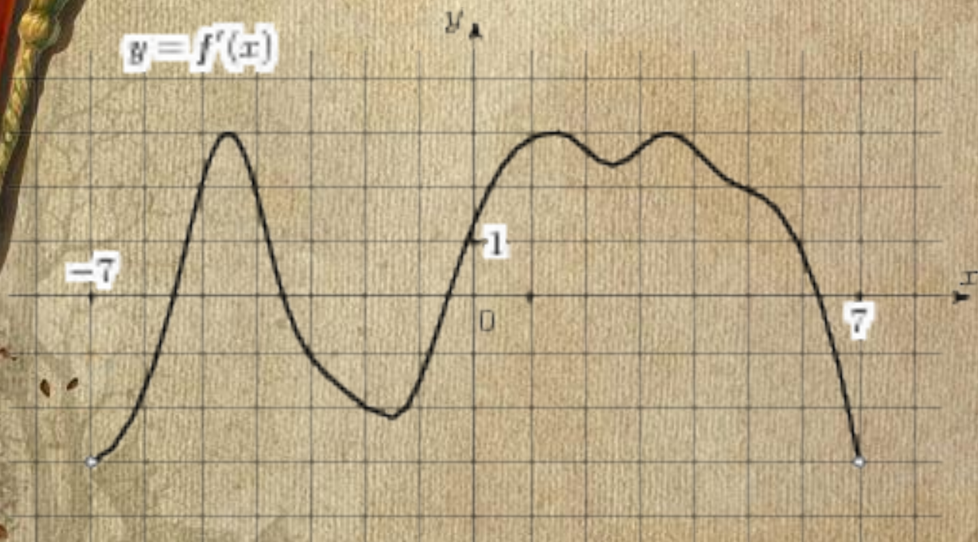


Решение: *выбираем две точки на прямой: А(0;-1), В(4;-5). Так как уравнение прямой имеет вид у= кх + в, то подставляем координаты точек в данное уравнение и решаем систему , состоящую из двух уравнений 0к+в= -1; 4к+в= -5, из первого уравнения в= -1, подставляем во второе 4к-1=- 5, откуда к= -1. По геометрическому смыслу производной f1(x) = k,*
Значит значение производной в точке x_0 равно ***-1.***

2 способ. *По формуле Лагранжа* ***f1(x) =*** $\frac{y2 - y1}{x2 - x1}$*, подставляем координаты точек в формулу и получаем* ***f1(x) =*** $\frac{-5-(-1)}{4-0} = \frac{-4}{4} = -1$

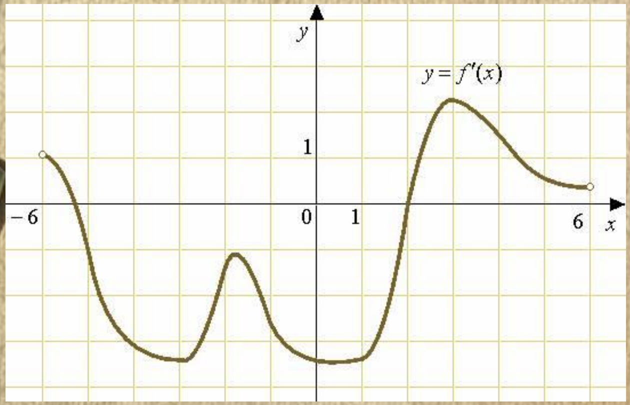
Ответ: ***f1(x) = -1***

В8 **На рисунке изображен график производной функции , определенной на интервале [-7; 7]. Найдите промежутки возрастания функции . В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.**



Решение: *по признаку возрастания функции если производная принимает положительные значения, то на данном промежутке функция возрастает, то есть график производной находится выше оси ОХ. В соответствующих промежутках х равно -5,-6, 0,1,2,3,4,5,6. Значит сумма целых точек входящих в эти промежутки равна 9, Ответ:* **9**

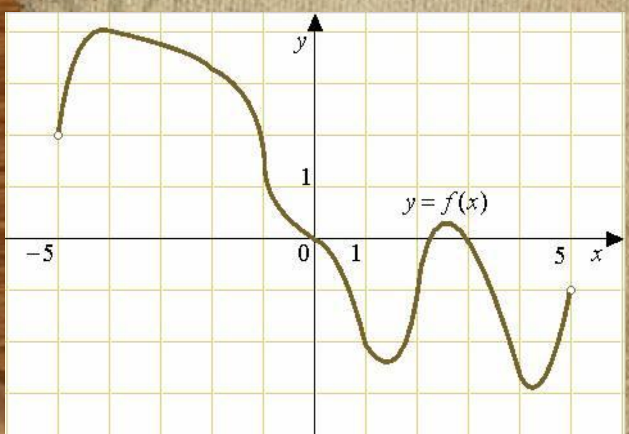
В8 На рисунке изображен график производной функции , определенной на интервале [-6; 6] . Найдите точку экстремума функции на интервале [0; 4] .



Решение: *точка экстремума – это точка максимума или минимума и в ней производная равна нулю. На интервале [0;4] производная равна нулю при х = 2*

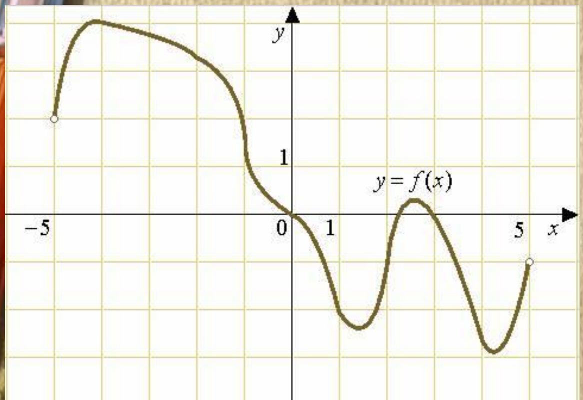
Ответ: 2

В8 На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-5;5)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой у=6.



Решение*: если касательная к графику данной функции параллельна прямой у = 6, то их угловые коэффициенты равны, т.е. к1=к2 =0, значит и производная в данных точках равна нулю (геометрический смысл производной).Из рисунка видим, что производная равна нулю в точках максимума и минимума и точке перегиба, т.е. в 5 точках. Ответ:* **5**

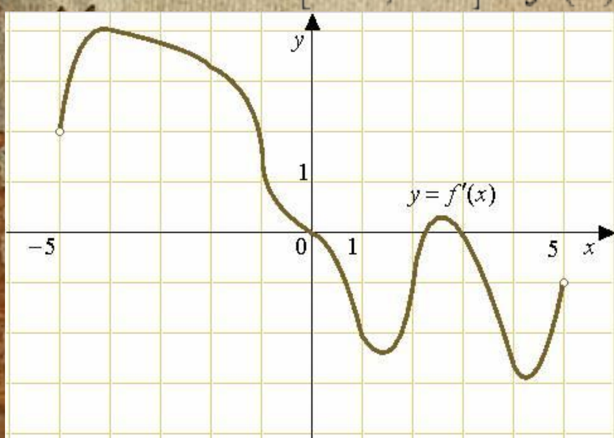
B8 На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-5;5)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции $y = f(x)$ отрицательна



Решение: *производная принимает отрицательное значение в промежутках убывания функции. По графику видим количество целых точек, в которых производная функции отрицательна равно 8*

Ответ: **8**

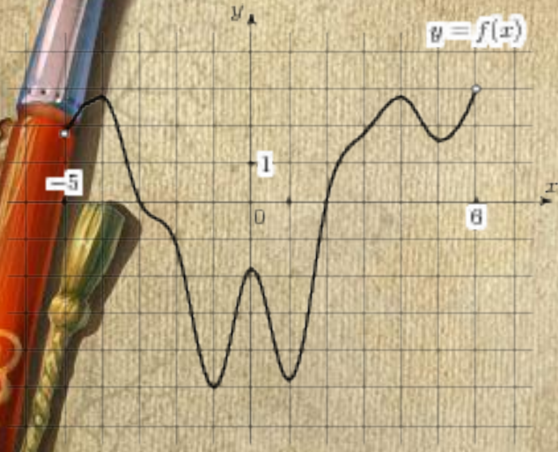
B8 На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-5;5)$. В какой точке отрезка $[-4;-1]$ $f(x)$ принимает наименьшее значение.



Решение: *на отрезке [-4; -1] производная Положительная, значит функция возрастает. Значит она принимает наименьшее значение в левой точке отрезка, т. е. при х = -4.*

Ответ: **-4**

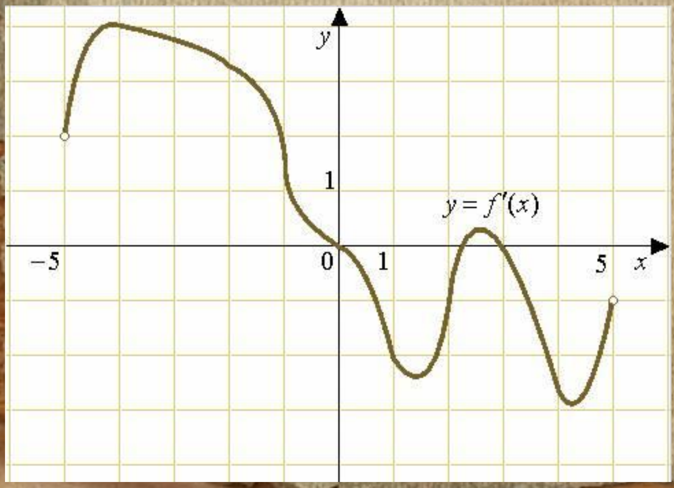
B8 **На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-5; 6)$. Найдите сумму точек экстремума функции $y = f(x)$.**



Решение: *точка экстремума – это точка максимума или минимума и в ней производная равна нулю. Из рисунка видно, что точек экстремума 6, это x= -4; -1; 0; 1; 4; 5. Сумма этих чисел равна 5.*

Ответ: **5**

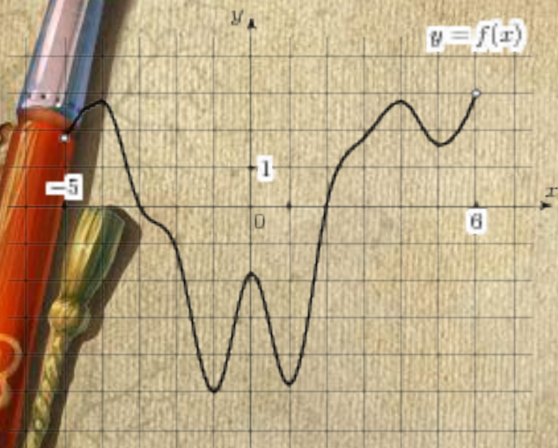
B8 **На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-5; 5)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на отрезке $[-3; 4]$**



Решение: *в точках максимума производная равна 0 и меняет знак с «+» на «-». Таких точек на рисунке 2, это x = 0, x = 3. Они Принадлежат заданному отрезку [-3;4]*

Ответ: **2**

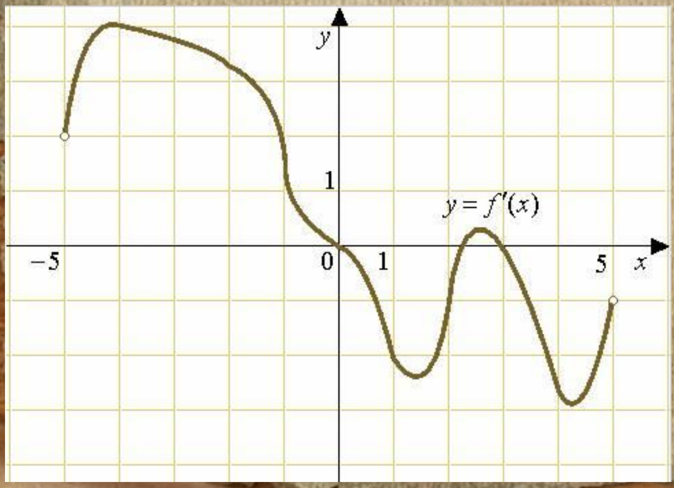
B8 **На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-5; 6)$. Найдите сумму точек экстремума функции $y = f(x)$.**



Решение: *точка экстремума – это точка максимума или минимума и в ней производная равна нулю. Из рисунка видно, что точек экстремума 6, это х= -4; -1; 0; 1; 4; 5. Сумма этих чисел равна 5.*

Ответ: **5**

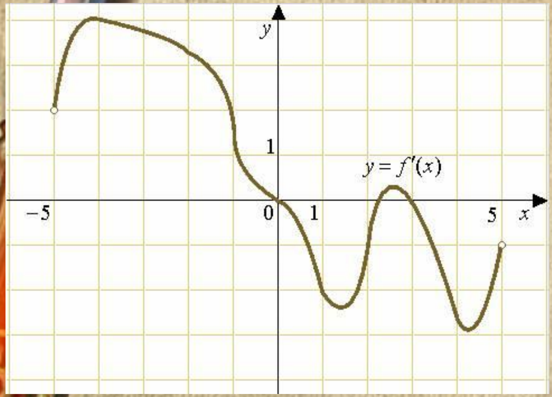
B8 **На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-5; 5)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на отрезке $[-3; 4]$**



Решение: *в точках максимума производная равна 0 и меняет знак с «+» на «-». Таких точек на рисунке 2, это х = 0, х = 3. Они Принадлежат заданному отрезку [-3;4]*

Ответ: **2**

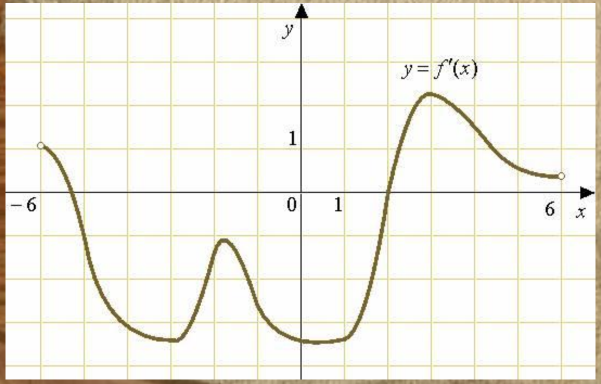
B8 **На рисунке изображен график производной функции $f(x)$ определенной на интервале $(-5;5)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[-4;4]$**



Решение: *в точках экстремума, то есть точках максимума и минимума производная равна нулю.*
В данном задании производная равна нулю в трёх точках.

Ответ: **3**

B8 **На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-6;6)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y=-3x-11$ или совпадает с ней.**



Решение: *если касательная к графику данной функции параллельна прямой y = -3x-11, то их угловые коэффициенты равны -3, значит производная по геометрическому смыслу производной также равна -3. По графику производной находим, что количество точек, удовлетворяющих этому условию равно 4.*

Ответ: **4**

Задачи для самостоятельного решения

В11. Найдите точку минимума функции .

$$y = x^2 - 18x + 40\ln x + 8$$

В11. Найдите точку максимума функции . $y = -\dfrac{x}{x^2+25}$

В11. Найдите наименьшее значение функции

на отрезке $[0; \frac{\pi}{2}]$. $y = -63\sqrt{3}\pi + 21\sqrt{3}x - 42\sqrt{3}\sin x$

В11. Найдите наименьшее значение функции на отрезке $[3; 583]$

.

$$y = \frac{1}{3}x\sqrt{x} - 12x + 90$$

Вывод 3

В решениях заданий, встречаемых в сборниках по подготовке к ЕГЭ по математике применяются

формулы и правила нахождения производной,

геометрический и механический смысл производной,

понятие критической точки,

признаки возрастания и убывания функции

методы нахождения наибольшего и наименьшего значений функции, точек максимума и минимума.

Для успешной сдачи ЕГЭ по математике необходимо прорешать большой объём заданий различного уровня сложности.

Заключение

Данная работа показывает:

что тема «Производная и ее применение» актуальна и значима в настоящее время. Это следует из того, что человек в повседневной деятельности постоянно сталкивается с решением задач, которые могут быть полностью описаны с помощью функций на математическом языке. Производную применяют не только в математике, но и в экономике, физике. Производная функции используется всюду, где есть неравномерное протекание процесса.

Используемая литература:

1. В. А. Гусев, А. Г. Мордкович «Математика»;

2. В.А. Петров «Математический анализ в производственных задачках»;

3. Соловейчик И.Л., Лисичкин В.Т. «Математика»;

4. «Открытый банк задач ЕГЭ по математике»; «Летопись МИФИ».