

Способы нахождения  
наибольшего общего делителя  
и наименьшего общего  
кратного натуральных чисел

Лекция №9

2 курс

Способы нахождения  
наибольшего общего делителя  
двух или нескольких  
натуральных чисел

- 1. Способ, основанный на каноническом представлении натурального числа.
- 2. Алгоритм Евклида.

- Нахождение наибольшего общего делителя через каноническое разложении чисел
- 1. Представить каждое число в каноническом виде.
- 2. Выбрать общие простые множители.
- 3. Составить произведение общих простых множителей.
- 4. Значение этого произведения равно наибольшему общему делителю.

- Например:
- Найти D (448;656)
- Представим каждое число в каноническом виде.

• 448	2	$448 = 2^6 \cdot 7$	656	2
224	2		328	2
112	2		164	2
56	2	$656 = 2^4 \cdot 41$	82	2
28	2		41	41
14	2		1	
7	7			
1				

- Замечание:
- Если натуральные числа  $a$  и  $b$  представлены в каноническом виде, то каждый множитель в состав НОД  $(a,b)$  входит с наименьшим показателем.

$$448 = 2^6 \cdot 7$$

$$656 = 2^4 \cdot 41$$

Выберем общие множители и найдем их произведение.

$$D(448;656) = 2^4 = 16$$

2) Древнегреческим математикам  
был известен факт:

- Наибольший общий делитель двух натуральных чисел  $a$  и  $b$  равен последнему, не равному нулю, остатку от деления числа  $a$  на  $b$  (если  $a > b$ ) или  $b$  на  $a$  (если  $b > a$ ).



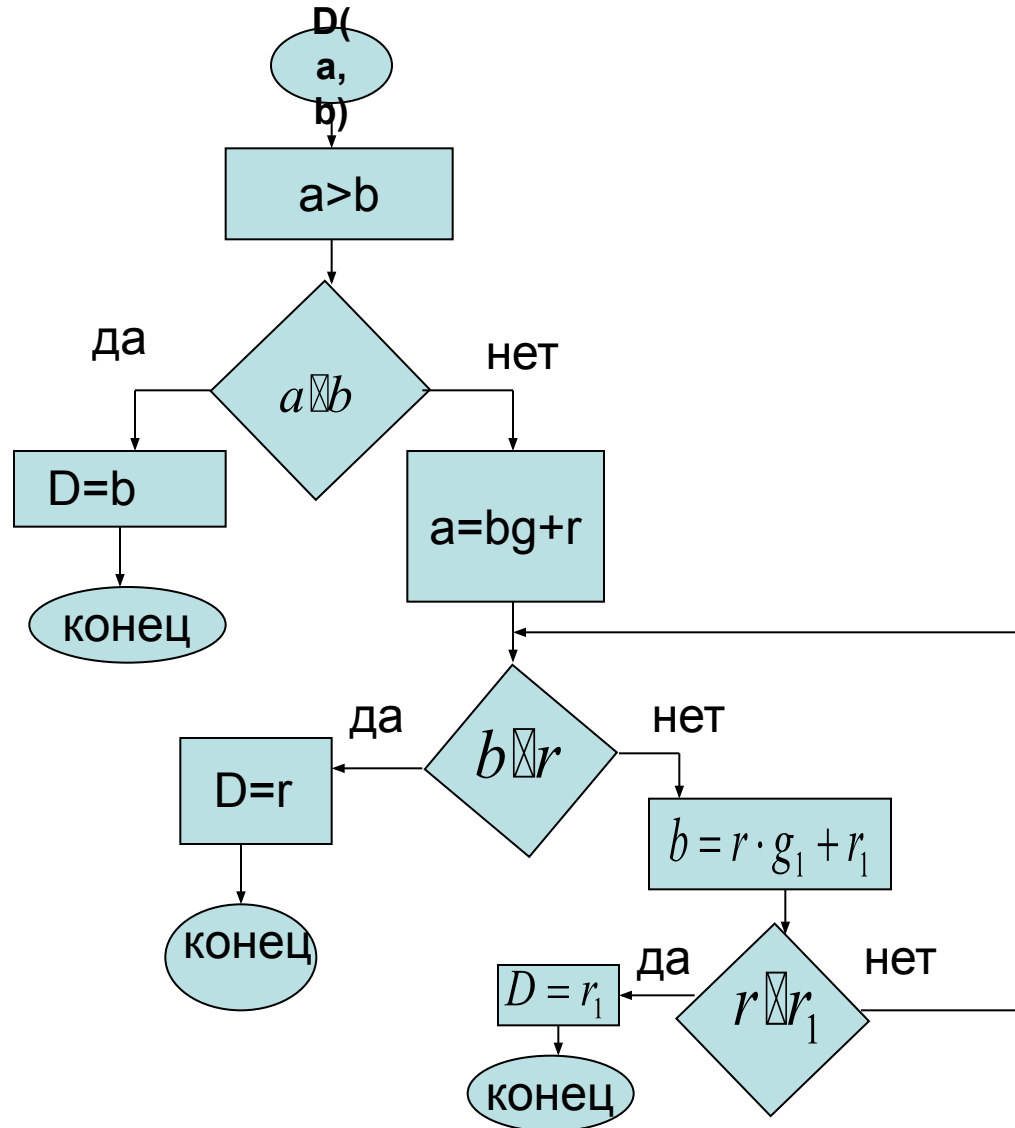
- Это утверждение основано на трех умозаключениях
- 1. Если  $a$  делится на  $b$ , то  $D(a,b)=b$ .
- 2. Если  $a=bg+r$ , где  $a,b,r$  отличны от 0, то множество делителей  $a$  и  $b$  совпадает с множеством общих делителей  $b$  и  $r$ .
- 3. Если  $a=bg+r$ , где  $a,b,r$  отличны от 0, то  $D(a,b)=D(b,r)$ .

- На основе этого утверждения Евклид сформулировал алгоритм вычисления наибольшего общего делителя двух натуральных чисел.

# Алгоритм Евклида

- Пусть  $a > b$
- 1. Если  $a$  делится на  $b$ , то  $D(a;b)=b$ .
- Если при делении  $a$  на  $b$ , получается остаток  $r$ , то  $D(a;b)=D(b;r)=r$ , если  $b$  кратно  $r$ .
- Если при делении  $b$  на  $r$  получается остаток  $r_1$ , то,  $D(a,b)=D(b,r)=D(r;r_1)$

# Алгоритм Евклида



# Например:

- Найти  $D(448;656)$
- Разделим 656 на 448 с остатком.

$$\begin{array}{r} 656 \overline{) 448} \\ \underline{448} \phantom{0} \\ 208 \phantom{0} \\ \underline{448} \phantom{0} \\ 208 \phantom{0} \\ \underline{192} \phantom{0} \\ 32 \phantom{0} \\ \underline{32} \\ 0 \end{array}$$
$$\begin{array}{l} 656 = 448 \cdot 1 + \underline{208} \\ 448 = 208 \cdot 2 + \underline{32} \\ 208 = 32 \cdot 6 + \underline{16} \\ 32 = 16 \cdot 2 + 0 \end{array}$$

Значит,  $D(448;656) = 16$

Задача: Найти НОД (120,540, 418)

- $\text{НОД}(a,b,c)=\text{НОД}(D(a,b),c)$

Значит: 1. Найдем  $\text{НОД}(120,540)$

- $\text{НОД}(120,540)=60.$

- 2. Найдем  $\text{НОД}(60,418)$

- $\text{НОД}(60,418)=2.$

Способы нахождения  
наименьшего общего кратного  
двух или нескольких  
натуральных чисел

- 1. Способ, основанный на каноническом представлении натурального числа.
2. Способ, основанный на взаимосвязи между НОД( $a,b$ ) и НОК( $a,b$ )



# Нахождение наименьшего общего кратного через каноническое разложение чисел

- 1. Представить каждое число в каноническом виде.
- 2. Выбрать все простые множители.
- 3. Составить произведение всех простых множителей.
- 4. Значение этого произведения равно наименьшему общему кратному.

- Например:
- Найти  $K(448;656)$
- Представим каждое число в каноническом виде.

• 448	2	$448 = 2^6 \cdot 7$	656	2
224	2		328	2
112	2		164	2
56	2	$656 = 2^4 \cdot 41$	82	2
28	2		41	41
14	2		1	
7	7			
1				

- Замечание:
- Если натуральные числа  $a$  и  $b$  представлены в каноническом виде, то каждый множитель в состав НОК  $(a,b)$  входит с наибольшим показателем.

$$448 = 2^6 \cdot 7$$

$$656 = 2^4 \cdot 41$$

Выберем все множители и найдем их произведение.

$$K(448;656) = 2^6 \cdot 7 \cdot 41 = 18368$$

## 2) Способ образования НОК натуральных чисел

- $a \cdot b = D(a, b) \cdot K(a, b)$

- $K(a, b) = \frac{a \cdot b}{D(a, b)}$

Например:

- Найти  $K(448;656)$

$$K(a,b) = \frac{656 \cdot 448}{16} = \frac{164 \cdot 112}{1} = 18368$$

- Задача: найдите НОК (12,48,54).
- Решение:

Так как 48 кратно 12, то  $\text{НОК}(12,48,54) = \text{НОК}(48,54)$ ;  $\text{НОД}(48,54) = 6$

$$\text{НОК}(48,54) = \frac{48 \cdot 54}{6} = 8 \cdot 54 = 432$$

**Спасибо за внимание**