



энергомашиностроение.

6

Лекция №6,7

СТАЦИОНАРНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ

- Интенсификация теплопередачи
- Теплопроводность при наличии внутренних источников теплоты
- Температурное поле полуограниченной пластины
- Температурное поле пористой пластины

Интенсификация теплопередачи

Во всех этих выражениях термическое сопротивление стенки, разделяющей жидкие среды, как правило, гораздо меньше термических сопротивлений теплоотдачи. Таким образом, коэффициент теплопередачи, например для однослойной цилиндрической стенки, будет определяться выражением

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}}$$

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 F_1} + \frac{1}{\alpha_2 F_2}}$$

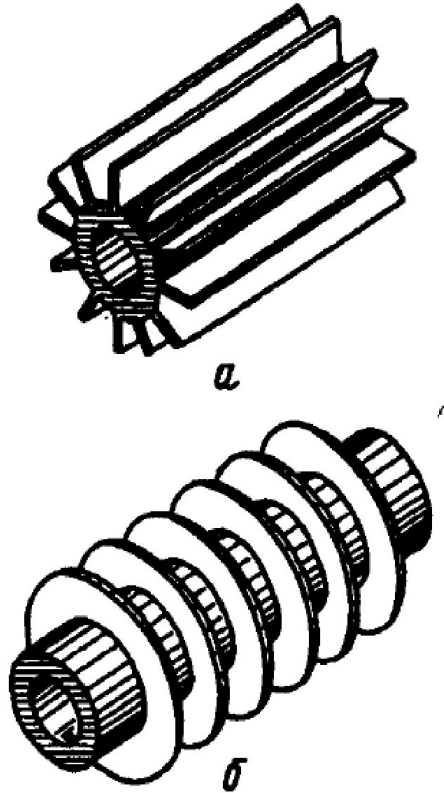


Рис. 12. Прямое (а) и цилиндрическое (б) ребра

Теплопроводность стержня постоянного поперечного сечения

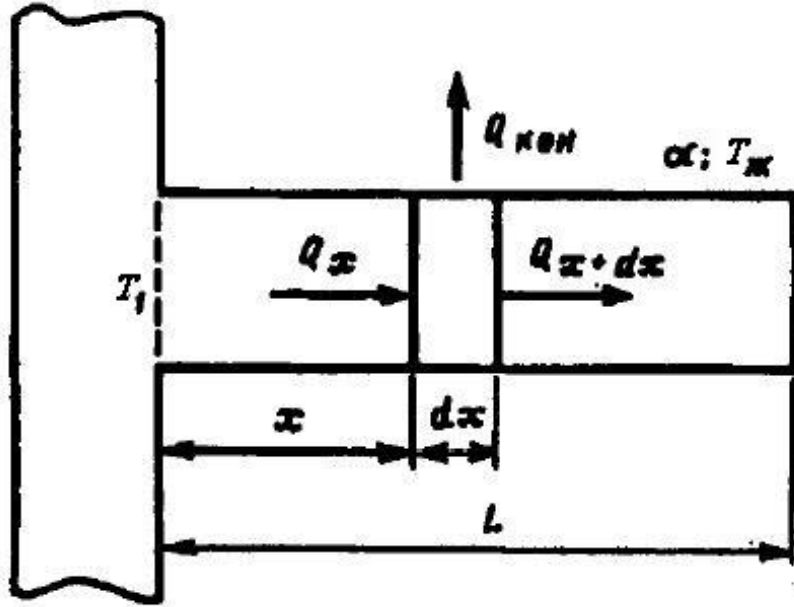


Рис. 13. Стержень постоянного сечения

$$Q_{кон} - Q_{x+dx} = Q$$

$$Q_x - Q_{x+dx} = F \lambda \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} \quad (61)$$

$$m^2 = \frac{\alpha \Pi}{\lambda F} \quad Q_{кон} \neq \alpha t \quad (- \text{ж})$$

$$\frac{d^2 \vartheta}{dx^2} - m^2 \vartheta = 0 \quad (62)$$

$$\vartheta = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}$$

$$\vartheta = \vartheta_1 \quad \text{при} \quad x = 0$$

$$\vartheta = 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow \infty$$

$$\vartheta = \vartheta_1 e^{-mx} \quad (63)$$

$$\theta = \frac{\vartheta}{\vartheta_1} = e^{-mx}$$

$$Q = -\lambda F \left. \frac{d\vartheta}{dx} \right|_{x=0} = \lambda F m \vartheta_1 = \vartheta_1 \sqrt{\alpha \Pi \lambda F} \quad (64)$$

$$\vartheta = \vartheta_1 \quad \text{при} \quad x = 0$$

$$\frac{d\vartheta}{dx} = 0 \quad \text{при} \quad x = L$$

$$C_1 = \frac{\vartheta_1 e^{-mL}}{e^{mL} + e^{-mL}}; C_2 = \frac{\vartheta_1 e^{mL}}{e^{mL} + e^{-mL}}$$

$$\vartheta = \vartheta_1 \frac{e^{m(L-x)} + e^{-m(L-x)}}{e^{mL} + e^{-mL}} = \vartheta_1 \frac{\operatorname{ch}[m(x-L)]}{\operatorname{ch}(mL)} \quad (65)$$

$$Q = -\lambda F \left. \frac{d\vartheta}{dx} \right|_{x=0} = \lambda F m \vartheta_1 \frac{\operatorname{sh}(mL)}{\operatorname{ch}(mL)} = \vartheta_1 \sqrt{\alpha \Pi \lambda F} \cdot \operatorname{th}(mL) \quad (66)$$

Температурное поле круглого ребра постоянной толщины

$$\frac{d^2 \vartheta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\vartheta}{dr} - \frac{2\alpha}{\lambda\delta} \vartheta = 0 \quad (67)$$

$$\frac{d^2 \vartheta}{dr^2} = m^2 \frac{d^2 \vartheta}{dz^2}, \quad \frac{d\vartheta}{dr} = m \frac{d\vartheta}{dz} \quad m^2 = \frac{2\alpha}{\lambda\delta} \quad z = mr$$

$$\frac{d^2 \vartheta}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d\vartheta}{dz} - \vartheta = 0 \quad \text{— уравнение Бесселя.} \quad (68)$$

$$\vartheta = C_1 I_0(z) + C_2 K_0(z) \quad (69)$$

$$\vartheta = \vartheta_1 \quad \text{при} \quad r = r_1$$

$$\vartheta = 0 \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty$$

$$\vartheta = \vartheta_1 \frac{I_0(mr)K_1(mr_2) + I_1(mr_2)K_0(mr)}{I_0(mr_1)K_1(mr_2) + I_1(mr_2)K_0(mr_1)} \quad (70)$$

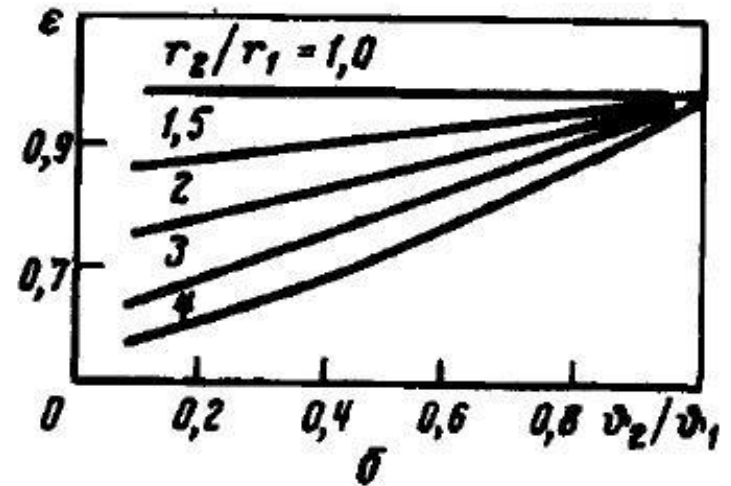
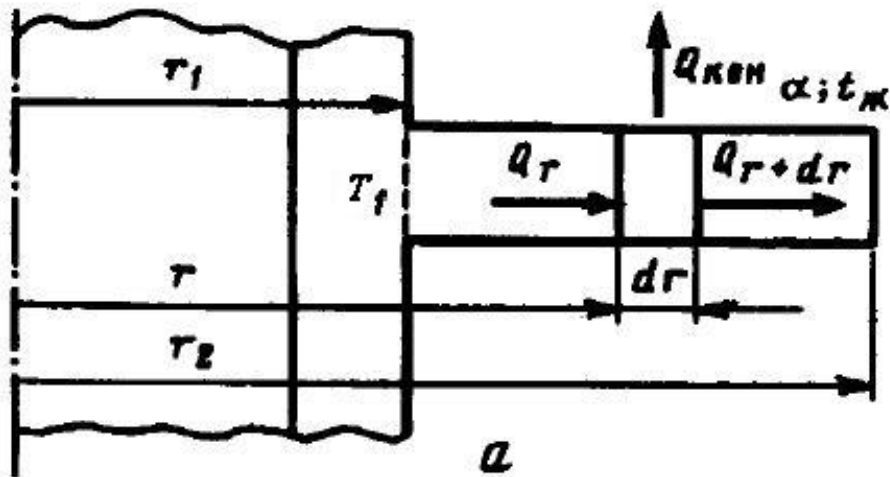


Рис. 14. Цилиндрическое ребро постоянного сечения (а) и вспомогательный график для его расчета (б)

$$Q = -\lambda 2\pi r_1 \delta \left. \frac{d\vartheta}{dr} \right|_{r=r_1} = 2\pi \lambda r_1 m \delta \vartheta_1 \frac{I_1(mr_2)K_1(mr_1) - I_1(mr_1)K_1(mr_2)}{I_0(mr_1)K_1(mr_2) + I_1(mr_2)K_0(mr_1)} \quad (71)$$

$$Q = \epsilon F q \quad (72)$$

Теплопроводность прямого ребра переменного поперечного сечения

$$F = l\delta = 2lxtg\varphi$$

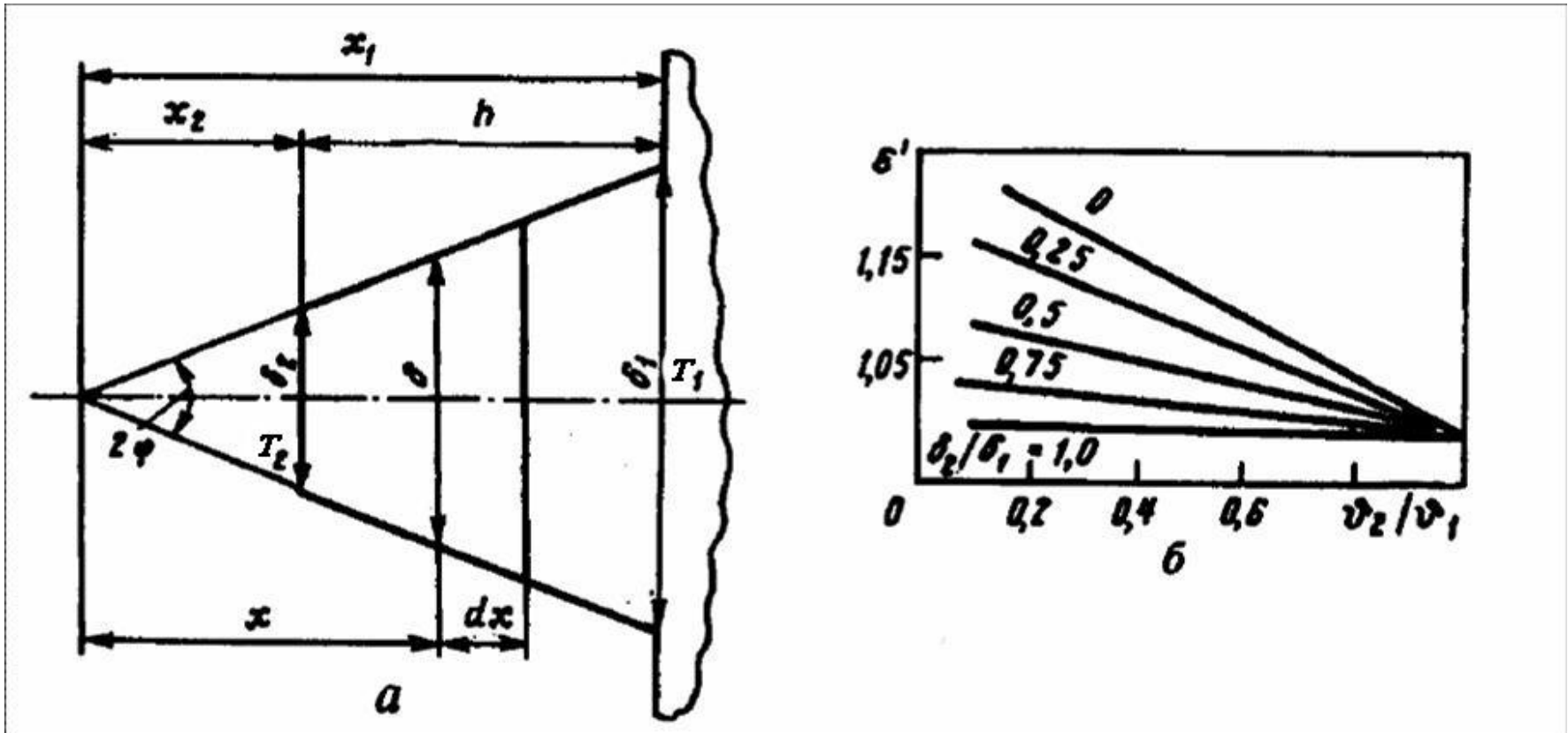


Рис. 15. Прямое ребро трапециевидного сечения (а) и вспомогательный график для его расчета (б)

$$\frac{d}{dx} \left(\lambda F \frac{d\mathcal{G}}{dx} \right) = \alpha \Pi \mathcal{G} \quad \Pi = 2l \quad (73)$$

$$\frac{d^2 \mathcal{G}}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d\mathcal{G}}{dz} - \frac{1}{z} \mathcal{G} = 0 \quad - \text{модифицированное уравнение Бесселя.} \quad (74)$$

$$z = \frac{\alpha x}{\lambda t g \varphi}$$

$$\mathcal{G} = C_1 I_0(2\sqrt{z}) + C_2 K_0(2\sqrt{z}) \quad (75)$$

Граничные условия

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \mathcal{G}_1 && \text{при} && x = x_1; \\ \mathcal{G} &= \mathcal{G}_2 && && x = x_2; \end{aligned}$$

$$\left. \frac{d\mathcal{G}}{dx} \right|_{x=x_2} = 0. \quad (76)$$

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \frac{I_0(2\sqrt{z})K_1(2\sqrt{z_2}) + I_1(2\sqrt{z_2})K_0(2\sqrt{z})}{I_0(2\sqrt{z_1})K_1(2\sqrt{z_2}) + I_1(2\sqrt{z_2})K_0(2\sqrt{z_1})}$$

$$Q = -\lambda f_1 \left. \frac{d\vartheta}{dx} \right|_{x=x_1} = \frac{\alpha \delta l \vartheta_1}{\sqrt{z} \operatorname{tg} \varphi} \frac{I_1(2\sqrt{z_1})K_1(2\sqrt{z_2}) - I_1(2\sqrt{z_2})K_1(2\sqrt{z_1})}{I_0(2\sqrt{z_1})K_1(2\sqrt{z_2}) + I_1(2\sqrt{z_2})K_0(2\sqrt{z_1})} \quad (77)$$

$$Q = \varepsilon' q F' \quad (78)$$

**Теплопроводность при наличии внутренних источников теплоты.
Неограниченная пластина**

Теплопроводность в однородной неограниченной пластине будем рассматривать при следующих условиях: постоянство коэффициента теплопроводности и равномерное распределение тепловых источников. Запишем дифференциальное уравнение для этих условий:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{q_V}{\lambda} = 0 \quad (79)$$

$$T = -\left(\frac{q_V}{2\lambda}\right)x^2 + C_1 x + C_2 \quad (80)$$

$$-\lambda \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = -\alpha_1 (T_{cm1} - T_{жс1}) \quad \text{при} \quad x = 0$$

$$-\lambda \frac{dT}{dx} \Big|_{x=+\delta} = -\alpha_2 (T_{cm2} - T_{жс2}) \quad \text{при} \quad x = \delta$$

$$\theta = \frac{T - T_{жс}}{q_V \delta^2 / 2\lambda}$$

$$\frac{T - T_{жс2}}{q_V \delta^2 / 2\lambda} = \frac{T_{жс1} - T_{жс2}}{q_V \delta^2 / 2\lambda} \left(1 - \frac{k}{\alpha_1}\right) \left(\frac{x}{\delta}\right)^2 + \frac{k\delta}{\lambda} \left(\frac{2}{\alpha_2 \delta / \lambda} + 1 - \frac{T_{жс1} - T_{жс2}}{q_V \delta^2 / 2\lambda}\right) \quad (81)$$

$$\theta = \theta_{жс} \left(1 - \frac{k}{\alpha_1}\right) x^2 + Bi_k \left(\frac{2}{Bi_2} + 2 - \theta_{жс}\right) x + \frac{k}{\alpha_1} \left(\frac{2}{Bi_2} + 1\right) \quad (82)$$

$$Bi_2 = \alpha_2 \delta / \lambda \quad Bi_k = k \delta / \lambda$$

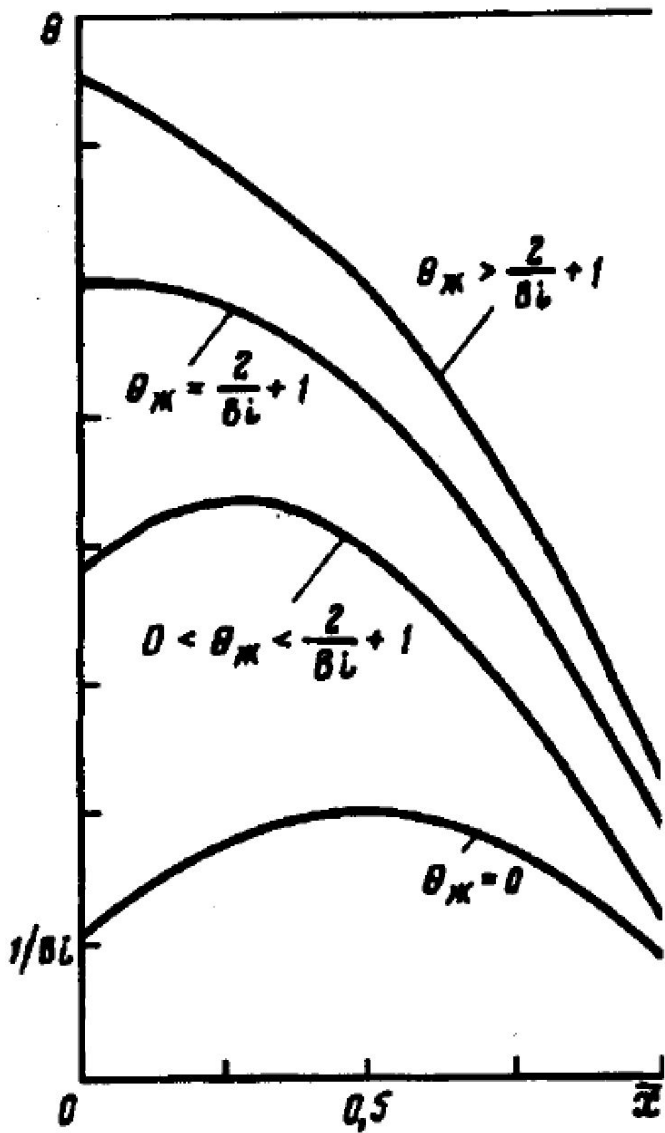


Рис. 16. Температурное поле в пластине при наличии внутренних источников теплоты

$$\theta = 2 / Bi + 1 - x^{-2} \quad (83)$$

$$q = q_V x \quad (83)$$

$$Q = q_V \delta F \quad (84)$$

$$\frac{T - T_{cm}}{q_V \delta^2 / 2\lambda} = 1 - x^{-2} \quad (85)$$

При симметричном охлаждении пластины
($T_{ж1} = T_{ж2}; \alpha_1 = \alpha_2; \theta_{жс} = 0$)

уравнение принимает вид $\theta = \bar{X} - \bar{X}^2 + 1/Bi$
А максимальное значение будет при $\bar{X} = 0.5$.

Цилиндрическая стенка

1. Рассмотрим однородную цилиндрическую стенку (сплошной цилиндр) с равномерно распределенными тепловыми источниками, у которой коэффициент теплопроводности λ не зависит от температуры.

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{q_V}{\lambda} = 0 \quad (86)$$

$$rdz + zdr + \frac{q_V}{\lambda} r dr = 0$$

$$\frac{dz}{dr} + \frac{q_V r}{2\lambda} = C_1 r$$

$$T = -\frac{q_V r^2}{4\lambda} + C_1 \ln r + C_2 \quad (87)$$

$$T = T_{жс} + \frac{q_V r_0}{2\alpha} + \frac{q_V}{4\lambda} (r_0^2 - r^2) \quad (88)$$

$$q = \alpha (T_{ст} - T_{жс}) = \frac{q_V r_0}{2} \quad (89)$$

Граничные условия для (87) тогда будут следующими:

$$\begin{cases} \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=0} = 0 \\ -\lambda \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=r_0} = \alpha (T_{ст} - T_{жс}) \end{cases}$$

$$T = T_{cm} + \frac{q_V}{4\lambda} (r_0^2 + r^2)$$

2. Цилиндрическая стенка (труба) с внутренним радиусом r_1 и внешним r_2 , внутренняя поверхность которого изолирована, а на внешней происходит конвективный теплообмен.

Граничные условия:

$$\begin{cases} \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=r_1} = 0 \\ \left. -\lambda \frac{dT}{dr} \right|_{r=r_2} = \alpha (T_{m_2} - T_{жс}) \end{cases}$$

$$-\frac{q_V}{2\lambda} r_1 + \frac{C_1}{r_1} = 0$$

$$C_1 = \frac{q_V r_1^2}{2\lambda}$$

$$T_{cm_2} = -\frac{q_V r_2^2}{4\lambda} + \frac{q_V r_1^2}{2\lambda} \ln r_2 + C_2$$

$$C_2 = T_{жс} + \frac{q_V r_2}{2\alpha} + \frac{q_V r_2^2}{4\lambda} - \frac{q_V r_1^2}{2\alpha r_2} - \frac{q_V r_1^2}{2\lambda} \ln r_2$$

$$T = T_{жс} + \frac{q_V r_2}{2\alpha} \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right] + \frac{q_V r_2^2}{4\lambda} \left[1 + \left(\frac{r}{r_2} \right)^2 2 \ln \frac{r}{r_2} - \left(\frac{r}{r_2} \right)^2 \right] \quad (90)$$

$$T_{см2} = T_{жс} + \frac{q_V r_2}{2\alpha} \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right] \quad (91)$$

$$q = \alpha (T_{см2} - T_{жс}) = \frac{q_V r_2}{2} \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right] \quad (92)$$

3. Цилиндрическая стенка, теплота отводится через внутреннюю поверхность трубы, наружная поверхность теплоизолирована.

Граничные условия

$$\begin{cases} \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=r_2} = 0 \\ -\lambda \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=r_1} = \alpha (T_{от1} - T_{жс}) \end{cases}$$

$$C_1 = \frac{q_V r_2^2}{2\lambda}$$

$$C_2 = T_{\text{жс}} + \frac{q_V r_1}{2\alpha} + \frac{q_V r_1^2}{4\lambda} - \frac{q_V r_2^2}{2\alpha r_1} - \frac{q_V r_2^2}{2\lambda} \ln r_2$$

$$T = T_{\text{жс}} + \frac{q_V r_1}{2\alpha} \left[\left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 - 1 \right] + \frac{q_V r_2^2}{4\lambda} \left[2 \ln \frac{r}{r_1} + \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 - \left(\frac{r}{r_2} \right)^2 \right] \quad (93)$$

$$T_{\text{см}_1} = T_{\text{жс}} + \frac{q_V r_1}{2\alpha} \left[\left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 - 1 \right] \quad (94)$$

$$q = \frac{q_V r_1}{2} \left[\left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 - 1 \right] \quad (95)$$

4. Цилиндрическая стенка, теплота отводится конвективным теплообменом с обеих сторон трубы. Для указанных условий очевидно, что имеется изотермическая поверхность с радиусом r_0 , находящаяся между r_1 и r_2 , где градиент температуры равен 0. Для части трубы между r_1 и r_0 , справедливы формулы (93) и (95), а для части трубы между r_0 и r_2 , справедливы формулы (90) и (92). Совокупность указанных выражений даёт возможность определить неизвестный радиус r_0 , а затем величины T и q .

Температурное поле полуограниченной пластины

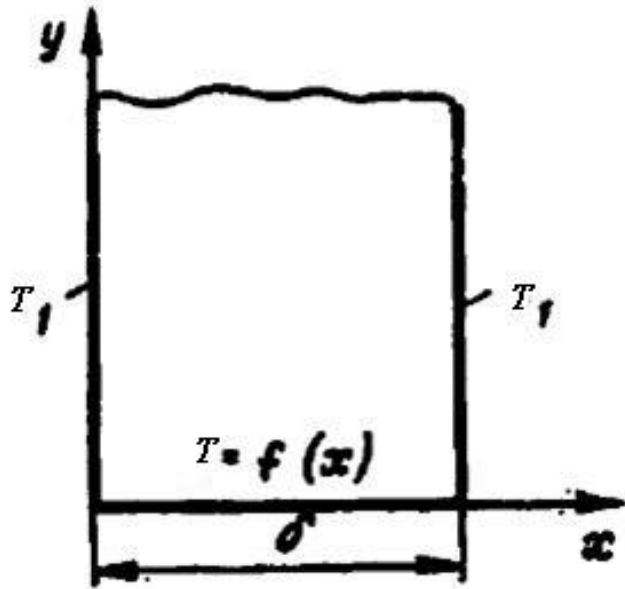


Рис. 17. Полуограниченная пластина

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (96)$$

Граничные условия

$$T = T_1 \quad \text{при} \quad x = 0, x = \delta, 0 \leq y < \infty$$

$$T = f(x) \quad \text{при} \quad y = 0$$

$$T = T_1 \quad \text{при} \quad y \rightarrow \infty$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} = 0 \quad (97)$$

Граничные условия

$$\vartheta = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, x = \delta$$

$$\vartheta = f(x) - T_1 = F(x) \quad \text{при} \quad y = 0$$

$$\vartheta = 0 \quad \text{при} \quad y \rightarrow \infty$$

Введя избыточную температуру

$$\vartheta = t - t_1,$$

из уравнения (96) получаем:

Полагая, что $\vartheta = \phi(x)\psi(y)$ и подставляя это выражение в (97), получаем:

$$\frac{\varphi''}{\varphi} = -\frac{\psi''}{\psi} = \text{const} = -k^2 \quad (98)$$

$$\varphi = C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx) \quad (99)$$

$$\psi = C_3 e^{ky} + C_4 e^{-ky} \quad (100)$$

$$\vartheta = C e^{-ky} \sin(kx)$$

$$\vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\pi x / \delta) e^{-n\pi y / \delta} \quad (101)$$

$$F(x) = \sum_{n=1}^n C_n \sin\left(\frac{n\pi}{\delta} x\right) \quad (102)$$

$$C_n = \frac{2}{\delta} \int_0^{\delta} F(x) \sin\left(\frac{n\pi}{\delta} x\right) dx \quad (103)$$

$$\vartheta = \frac{2}{\delta} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n\pi}{\delta} y} \sin\left(\frac{n\pi}{\delta} x\right) \int_0^{\delta} F(x) \sin\left(\frac{n\pi}{\delta} x\right) dx \quad (104)$$

В частном случае, если $f(x) = t_2$ и $F(x) = t_2 - t_1$, то:

$$\int_0^{\delta} F(x) \sin\left(\frac{n\pi}{\delta} x\right) dx = \frac{\delta}{n\pi} (T_2 - T_1) \Big|_0^{\delta} = \frac{2\delta}{n\pi} (T_2 - T_1)$$

$$\vartheta = (T_2 - T_1) \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} e^{-\frac{m\pi}{\delta} y} \sin\left(\frac{m\pi}{\delta} x\right) \quad (105)$$

Температурное поле пористой пластины

Пористые материалы находят широкое применение в современной технике, особенно при использовании так называемого пористого охлаждения. В этом случае охлаждаемую деталь (лопатка газовой турбины, сопло реактивного двигателя, камера сгорания и т.п.) выполняют из пористого материала, через который прокачивается охлаждающая жидкость.

$$\lambda_{\text{жс}} \frac{d^2 T_c}{dx^2} (1 - P) + \alpha_V (T_c - T) = 0 \quad (106)$$

$$\lambda_{\text{жс}} \frac{d^2 T_{\text{жс}}}{dx^2} + \alpha_V (T_c - T_{\text{жс}}) = Gc_{p\text{жс}} \frac{dT_{\text{жс}}}{dx} \quad (107)$$

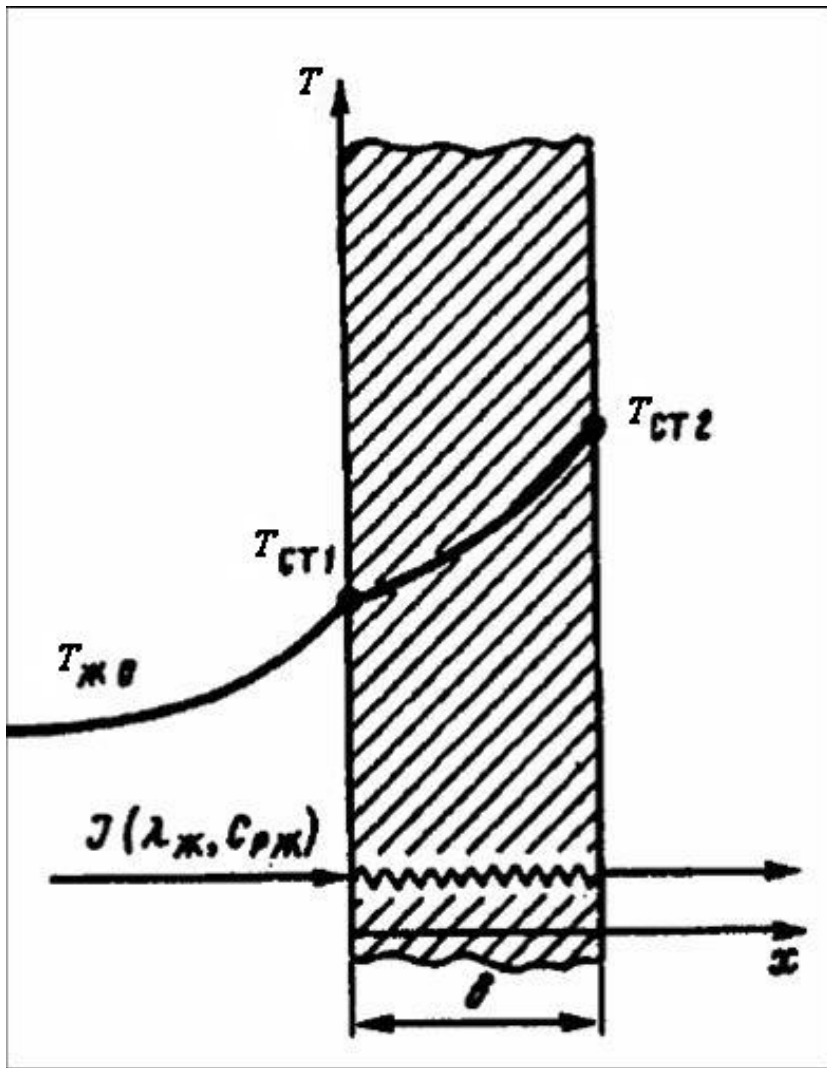


Рис. 18. Пористая плоская пластина

а) для области $0 \leq x \leq \delta$

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \xi_c \frac{dT}{dx} = 0 \quad (108)$$

$$\text{где} \quad \xi_c = \frac{Gc_{\text{пс}}}{\lambda_c(1-P)}$$

б) для области $-\infty \leq x \leq 0$

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \xi_{\text{жс}} \frac{dT}{dx} = 0 \quad (109)$$

$$\text{где} \quad \xi_{\text{жс}} = \frac{Gc_{\text{пс}}}{\lambda_{\text{жс}}}$$

$$T = C_1 e^{-\xi_c x} + C_2 \quad (110)$$

Граничные условия

$$T = T_{\text{ст}1} \quad \text{при} \quad x = 0$$

$$T = T_{\text{ст}2} \quad \text{при} \quad x = \delta$$

$$T = T_{cm_1} + \frac{T_{cm_2} - T_{cm_1}}{e^{\xi_c} - 1} \left(e^{\xi_c x} - 1 \right) \quad (111)$$

$$T_{жс} = C_3 e^{\xi_{жс} x} + C_4 \quad (112)$$

Граничные условия

$$T_{ж} = T_{ж_0} \quad \text{при} \quad x = -\infty$$

$$\lambda_{жс} \frac{dT_{жс}}{dx} = \lambda_c (1 - P) \frac{dT}{dx} \quad \text{при} \quad x = 0$$

$$T_{ж} = T_{ж_0} + \frac{T_{cm_2} - T_{cm_1}}{e^{\xi_c \delta} - 1} e^{\xi_{жс} x} \quad (113)$$

$$\frac{T - T_{ж_0}}{T_{cm_2} - T_{ж_0}} = e^{-\xi_c \delta \left(1 - \frac{x}{\delta} \right)} \quad (114)$$

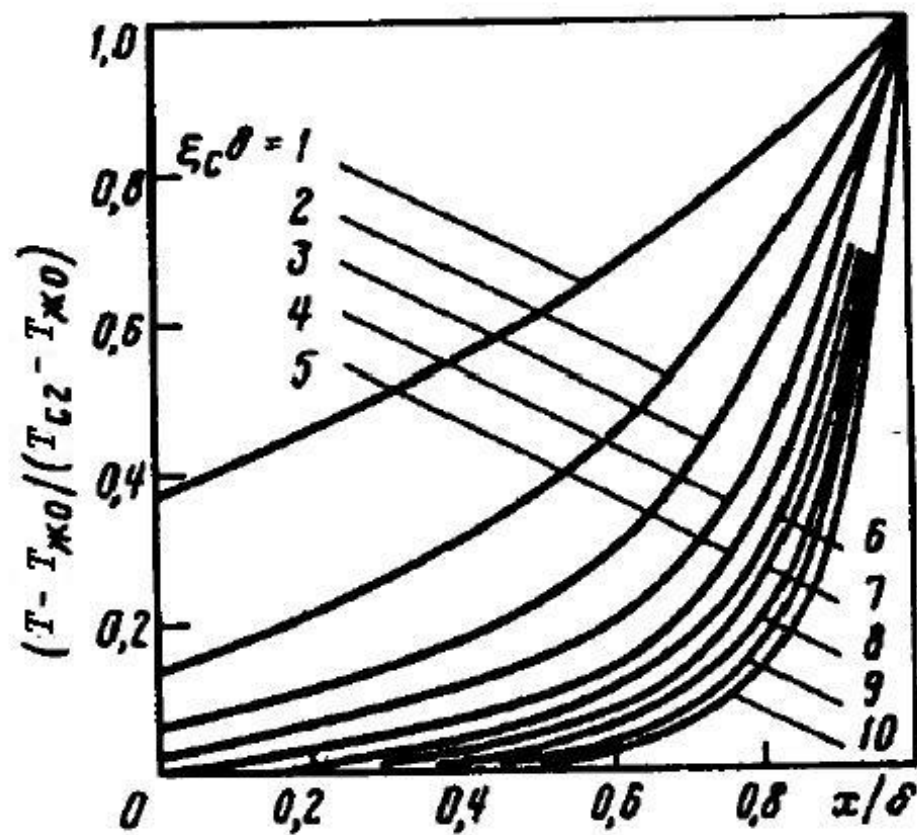


Рис. 19. Распределение температуры в пористой стенке

Контрольные вопросы

- Интенсификация теплопередачи
- Теплопроводность стержня постоянного поперечного сечения
- Температурное поле круглого ребра постоянной толщины
- Теплопроводность прямого ребра переменного поперечного сечения
- Теплопроводность при наличии внутренних источников теплоты
- Цилиндрическая стенка
- Температурное поле полуограниченной пластины
- Температурное поле пористой пластины