

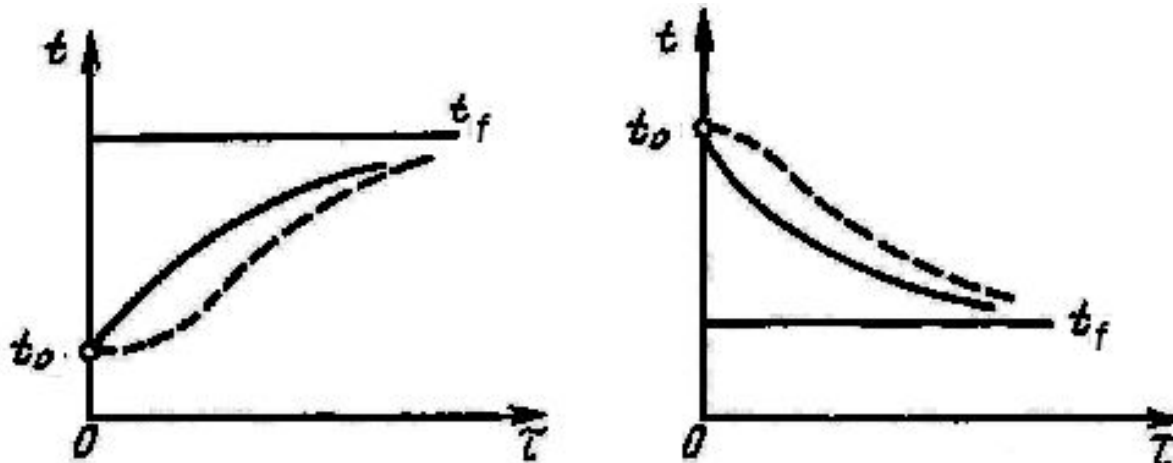


НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

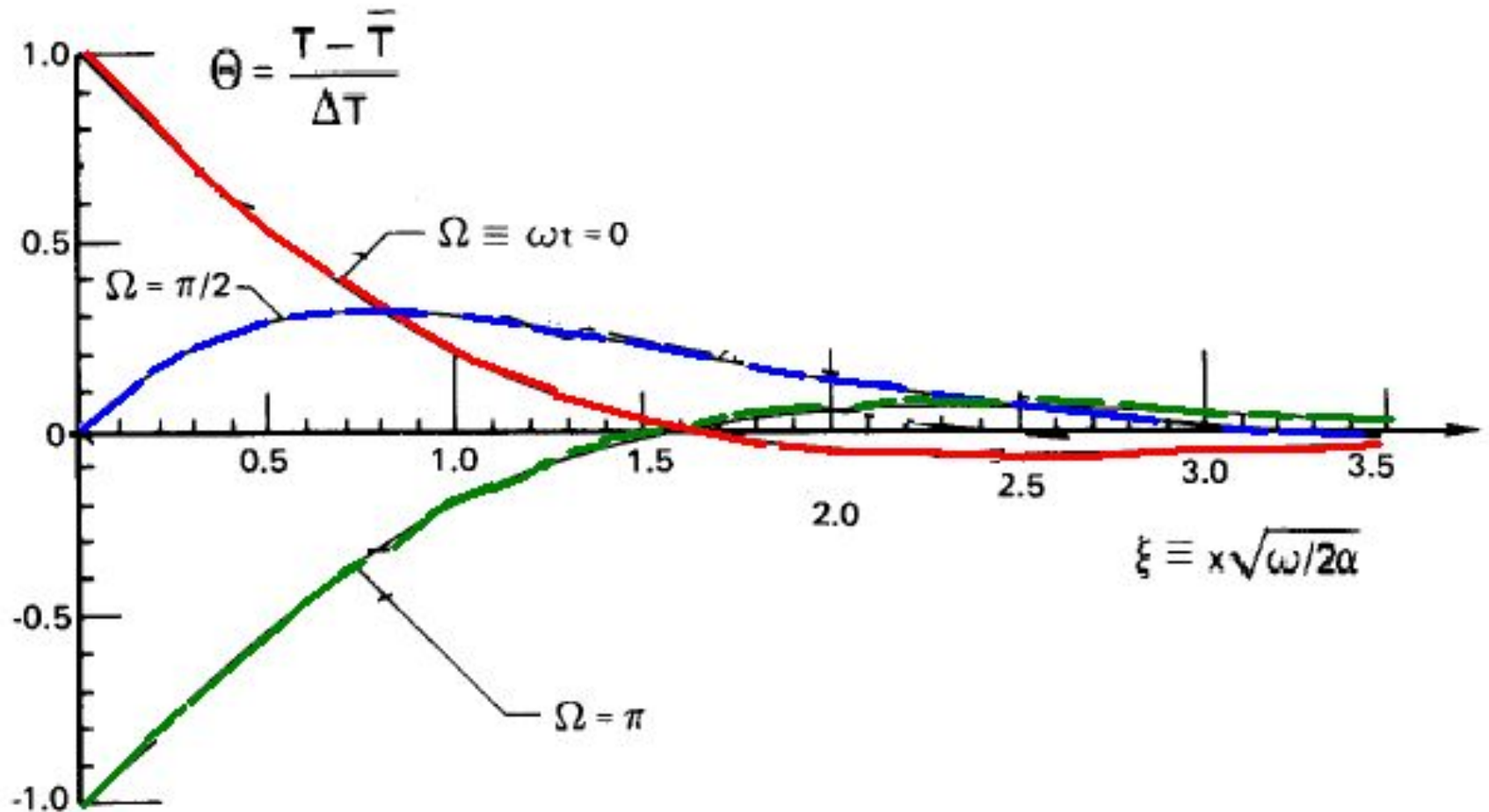
Нестационарный процесс : температура конструктивных элементов меняется во времени (пуск, остановка, аварийные ситуации).

Две группы нестационарных процессов теплопроводности:

1. Тело стремится к тепловому равновесию с окружающей средой при нагревании (охлаждении) тела;



2. Температура тела претерпевает регулярные периодические изменения (температурные волны).



Уравнение нестационарной теплопроводности

$$\frac{Dt}{d\tau} = a \nabla^2 t + \frac{q_v}{c_p \rho}$$

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + (\overline{W} \cdot \text{grad } t) = a \nabla^2 t + \frac{q_v}{c_p \rho}$$

Одномерное
дифференциальное
уравнение
нестационарной
теплопроводности

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$$

Уравнение нестационарной теплопроводности

Ищем $t(x, \tau)$



Новая
переменная:

$$\vartheta = t_f - t(x, \tau) \quad \begin{array}{l} \text{нагрев} \\ \text{тела} \end{array}$$

$$\vartheta = t(x, \tau) - t_f \quad \text{охлаждение тела}$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}$$

t_f – температура окружающей среды

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}} \right)$$

безразмерная
переменная

Решение в общем виде:

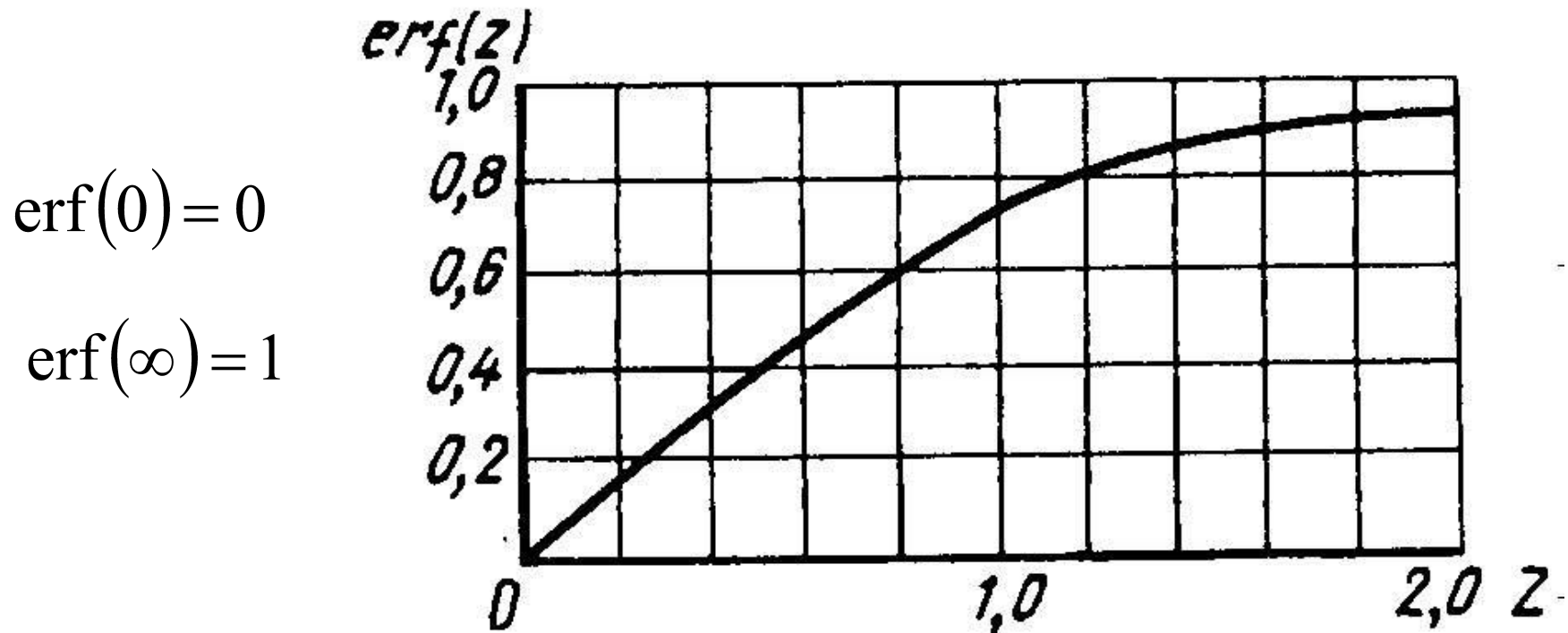
$$\vartheta(x, \tau) = \text{Func} \left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}} \right)$$

$$\vartheta(x, \tau) = \vartheta_0 \cdot \text{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}} \right)$$

Уравнение нестационарной теплопроводности

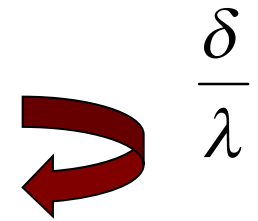
$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-\xi^2) d\xi$$

- интеграл ошибок
Гаусса (табулированная
функция ошибок)



Теплопроводность тела с бесконечно малым термическим сопротивлением

Малое внутреннее термическое сопротивление
температура тела изменяется во времени,
но одинакова во всех точках тела



Дано:

Произвольное тело объемом V и поверхностью F с начальной температурой t_0 , охлаждается в среде с температурой t_f

Баланс энергии для твердого тела:

$$\underline{c\rho V \frac{dt}{d\tau}} = \alpha \underline{[t(\tau) - t_f] \cdot F}$$

уменьшение
внутренней энергии тела

количество тепла,
отводимое от поверхности конвекцией

Теплопроводность тела с бесконечно малым термическим сопротивлением

Решение уравнения

$$\vartheta = \vartheta_o \cdot e^{-\left(\frac{\alpha F}{c\rho V}\right) \cdot \tau}$$

$$\vartheta_o = t_o - t_f$$

$$\frac{\alpha \cdot F \cdot \tau}{c \cdot \rho \cdot V} = \frac{\alpha \cdot F \cdot \tau \cdot \lambda_w}{c \cdot \rho \cdot V \cdot \lambda_w} = \frac{\alpha \cdot L}{\lambda_w} \cdot \frac{a \cdot \tau}{L^2} = \text{Bi} \cdot \text{Fo}$$

$$L = \frac{V}{F}$$

Число Био
(Biot)

Число Фурье
(Fourier)

$$\vartheta(\tau) = \vartheta_o \cdot e^{-\text{Bi} \cdot \text{Fo}}$$

Теплопроводность тела с бесконечно малым термическим сопротивлением

Мгновенная плотность теплового потока от тела:

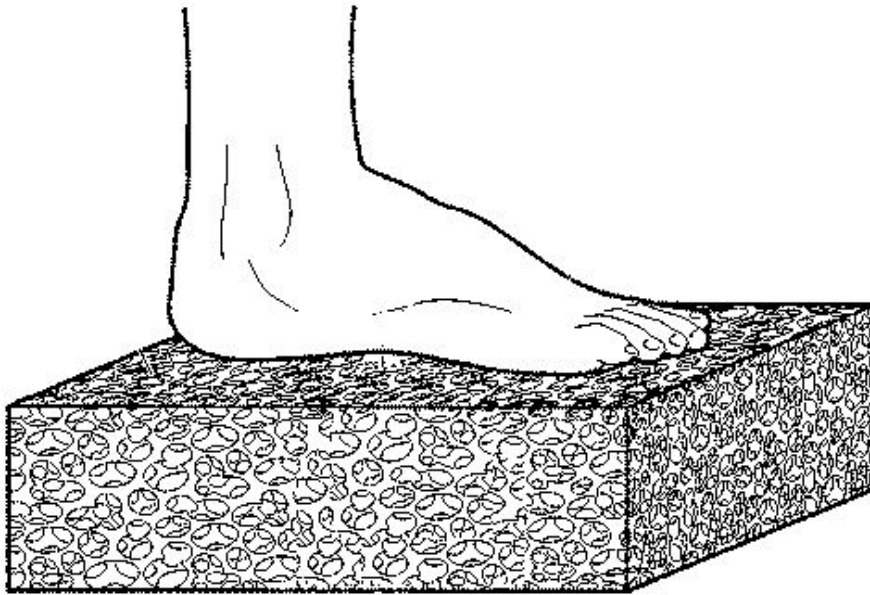
$$q(\tau) = \alpha [t(\tau) - t_f]$$

Суммарное количество тепла, отданное телом за время τ_*

$$Q = \int_0^{\tau_*} q(\tau) d\tau = \alpha (t_0 - t_f) F \int_0^{\tau_*} e^{-Bi \cdot Fo} d\tau$$

Если $Bi < 0,1$, то ошибка не превышает 5%.

Поле температур в полубесконечном массиве



дерево



бетон



металл



Температуры одинаковы:
пола - 20°C
ноги - 36°C

Ощущения разные



Поле температур в полубесконечном массиве

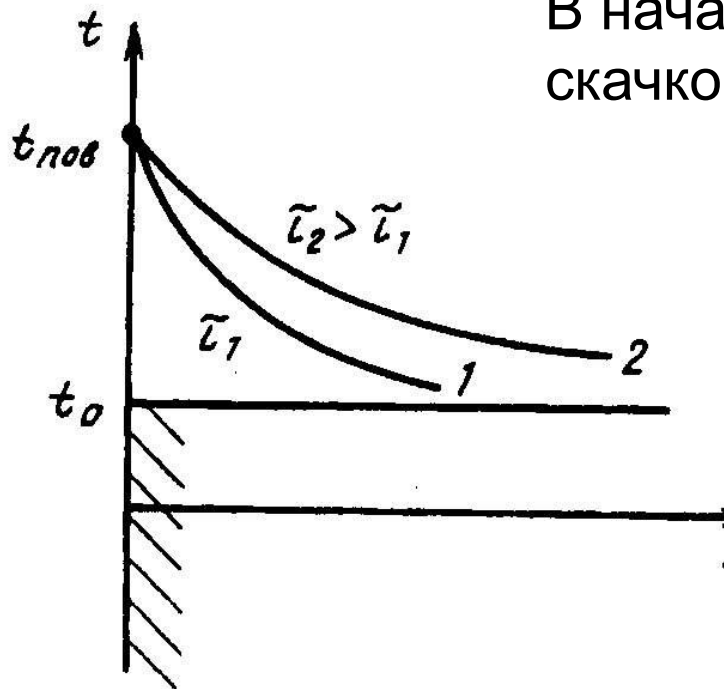
Полубесконечное тело – тело, ограниченное одной плоской поверхностью. Температура тела вдали от этой поверхности принимается неизменной.

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$$

Пусть тело имеет температуру $t(x, 0) = t_0$

При $x \rightarrow \infty$ $t(\infty, \tau) = t_0 = \text{const}$

В начальный момент времени $t_{\text{пов}}$ меняется скачком и далее остается неизменной



$$t(0, \tau) = t_{\text{пов}} = \text{const}$$

$$\frac{t_{\text{пов}} - t(x, \tau)}{t_{\text{пов}} - t_0} = \text{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\right)$$

решение уравнения

Поле температур в полубесконечном массиве

Плотность теплового потока на границе $x = 0$

$$q(x = 0, \tau) = -\lambda \left. \frac{dt(\tau)}{dx} \right|_{x=0} = \lambda (t_{нов} - t_o) \frac{\partial}{\partial x} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}} \right) \right]_{x=0}$$

или

$$q(x = 0, \tau) = \frac{\lambda (t_{нов} - t_o)}{\sqrt{\pi a \tau}} = \frac{b (t_{нов} - t_o)}{\sqrt{\pi \tau}}$$

$$b = \frac{\lambda}{\sqrt{a}} \equiv \sqrt{\lambda c_p \rho}$$

*теплопроницаемость
(теплоусвояемость)*

показывает насколько велико количество тепла, воспринимаемое (или теряемое) телом через один квадратный метр поверхности при внезапном изменении температуры поверхности на 1 градус

Поле температур в полубесконечном массиве

Значения теплопроницаемости $b = \sqrt{\lambda \rho c_p}$ $\left(\frac{\text{Вт} \cdot \text{с}^{1/2}}{\text{м}^2 \text{К}} \right)$

Материал	b
Медь	36 000
Железо	15 000
Бетон	6 600
Вода	1 400
Песок	1 200
Дерево	400
Тепловая изоляция	5 - 200
Накипь	40
Газ	6

Поле температур в полубесконечном массиве

дерево



$\lambda \downarrow$

b 400

$$\left(\text{Вт} \cdot \text{с}^{1/2} \right) / \left(\text{м}^2 \text{К} \right)$$

бетон



$\lambda \downarrow$

6000

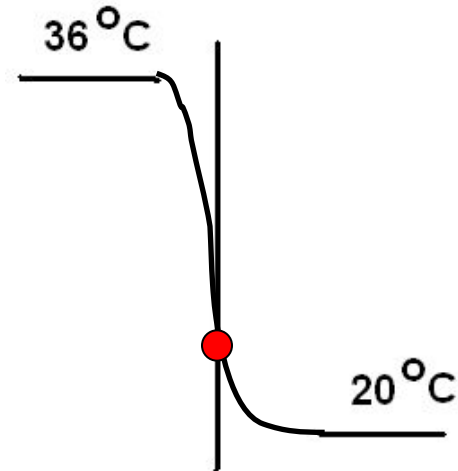
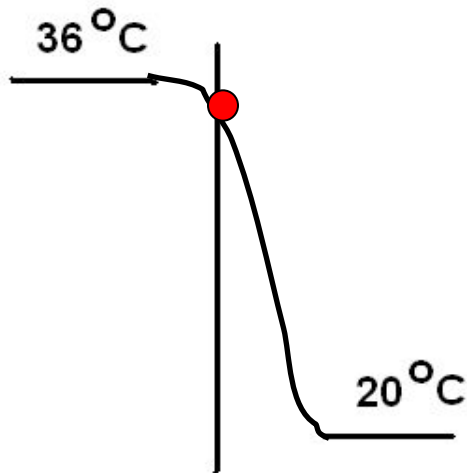
сталь



$\lambda \uparrow$

8000

$$q \sim b = \sqrt{\lambda \rho c_p}$$



Нестационарное поле температуры в пластине

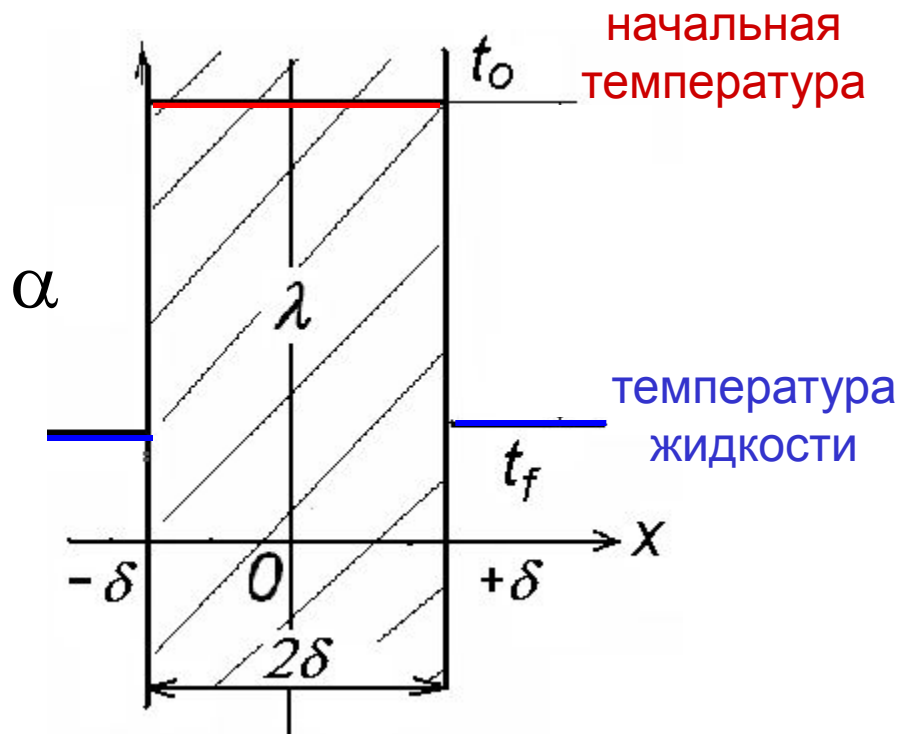
*

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}$$

$$\vartheta = t - t_f$$

Начальные условия:

$$\vartheta(\tau = 0) = \vartheta_0 = t_0 - t_f$$



Граничные условия:

$$x = 0 \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0$$

$$x = \pm \delta \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \pm \frac{\alpha}{\lambda} \vartheta$$

Нестационарное поле температуры в пластине

Решение уравнения как произведение двух функций:

$$\vartheta(x, \tau) = \varphi(\tau) \cdot \psi(x)$$

Предполагаемое решение
подставляем в ★

После разделения переменных:

$$\frac{1}{a} \frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{1}{\psi} \left(\psi'' + \frac{\psi'}{x} \right) = -k^2 = \text{const}$$

Решения:

$$\varphi(\tau) = C \cdot \exp(-k^2 a \tau) \quad \psi(x) = C'_0 \cos(kx) + C''_0 \sin(kx)$$

$$\vartheta(x, \tau) = C_0 \cdot \exp(-ak^2 \tau) \left[C'_0 \cos(kx) + C''_0 \sin(kx) \right]$$

С и k любые

Нестационарное поле температуры в пластине

1 Г.У.

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_{x=0} = C_0 \cdot \exp(-ak^2\tau) \cdot k \cdot [-C_0' \sin(k \cdot 0) + C_0'' \cos(k \cdot 0)] = 0$$
$$C_0'' = 0$$

2 Г.У.

$$x = \pm\delta \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \pm \frac{\alpha}{\lambda} \vartheta \quad C_0 \cdot C_0' = A$$

$$k \cdot A \cdot \exp(-ak^2\tau) \cdot \sin(k\delta) = \frac{\alpha}{\lambda} A \cdot \exp(-ak^2\tau) \cdot \cos(k\delta)$$

$$ctg(k\delta) = \frac{k\delta}{\frac{\alpha\delta}{\lambda}} \quad Bi$$

$$k\delta = \mu$$

Характеристическое уравнение

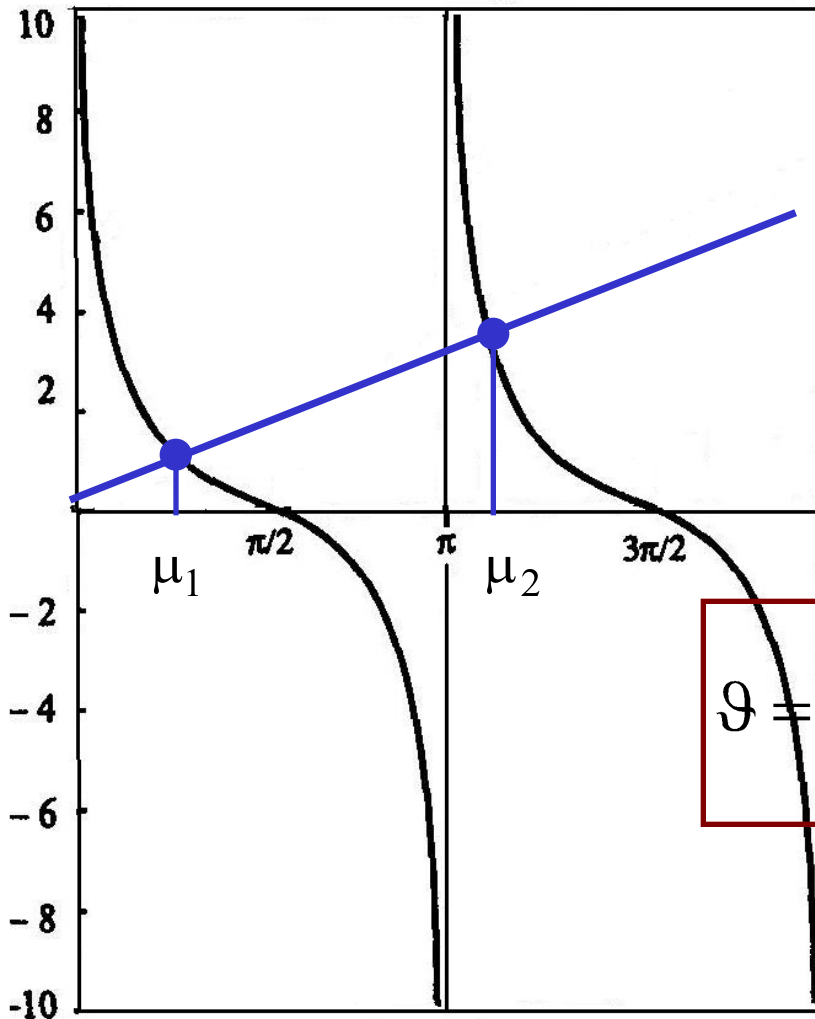
$$ctg(\mu) = \frac{\mu}{Bi}$$

δ - половина толщины пластины

Нестационарное поле температуры в пластине

Графическое решение
характеристического уравнения

$$ctg(\mu) = \frac{\mu}{Bi} \quad y_1 = ctg(\mu) \quad y_2 = \frac{\mu}{Bi}$$



$$\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \dots < \mu_n$$

Частные решения

$$\vartheta_n = A_n \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) \cdot \exp\left(-\mu_n^2 \cdot \frac{a\tau}{\delta^2}\right)$$

Общее решение

$$\vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) \cdot \exp\left(-\mu_n^2 \cdot \frac{a\tau}{\delta^2}\right)$$

Поля температуры в телах простой формы

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{n}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right)$$

Общее уравнение для пластины,
цилиндра и шара

$$\vartheta = t - t_f$$

$n=0$ для пластины
 $n=1$ для цилиндра,
 $n=2$ для шара

Граничные условия:

$$r = 0 \text{ (середина пластины, цилиндра, центр шара)} \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial r} = 0$$

$$r = R \text{ (граничный размер)} \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial r} = \pm \frac{\alpha}{\lambda} \vartheta$$

Поля температуры в телах простой формы

Решение уравнения как произведение двух функций:

$$\vartheta = \varphi(\tau) \cdot \psi(r) \quad \text{подставляем}$$

Получаем два обычных дифференциальных уравнения:

$$\frac{1}{a} \frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{1}{\psi} \left(\psi'' + \frac{n \psi'}{r} \right) = -k^2$$

Решения:

$$\varphi(\tau) = C \cdot \exp(-k^2 a \tau)$$

$$\begin{aligned} \psi_0 &= C'_0 \cos(kr) + C''_0 \sin(kr) \quad \text{для } n=0 \\ \psi_1 &= C'_1 \cdot J_0(kr) + C''_1 \cdot Y_0(kr) \quad \text{для } n=1 \\ \psi_2 &= \frac{C'_2 \cdot \sin(kr) + C''_2 \cdot \cos(kr)}{kr} \quad \text{для } n=2 \end{aligned}$$

Полное решение
уравнения

$$\vartheta = C \cdot \exp(-k^2 a \tau) \cdot \psi_i(kr)$$

Поля температуры в телах простой формы

В безразмерном виде

Для пластины толщиной 2δ

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_0} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos \frac{\mu_n x}{\delta} \cdot \exp(-\mu_n^2 \cdot Fo)$$

$$A_n = \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n}$$

μ_n - корни трансцендентного уравнения

$$Fo = a\tau / \delta^2$$

$$Bi = \alpha \cdot \delta / \lambda_w$$

$$ctg \mu = \mu / Bi$$

Поля температуры в телах простой формы

Для цилиндра радиусом R

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_0} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot J_0(\mu_n R) \cdot \exp(-\mu_n^2 \cdot Fo)$$

$$A_n = \frac{2J_1(-\mu_n)}{\mu_n^2 [J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n)]}$$

μ_n - корни
уравнения

$$Fo = a\tau/R^2$$

$$\mu J_1(\mu) = J_0(\mu) \cdot Bi$$

$$Bi = \alpha \cdot R/\lambda_w$$

Поля температуры в телах простой формы

Для шара радиусом R

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_0} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\sin \mu_n \frac{r}{R}}{\mu_n \frac{r}{R}} \cdot \exp(-\mu_n^2 \cdot Fo)$$

$$A_n = \frac{\sin \mu_n - \mu_n \cos \mu_n}{\mu_n - \sin \mu_n \cos \mu_n}$$

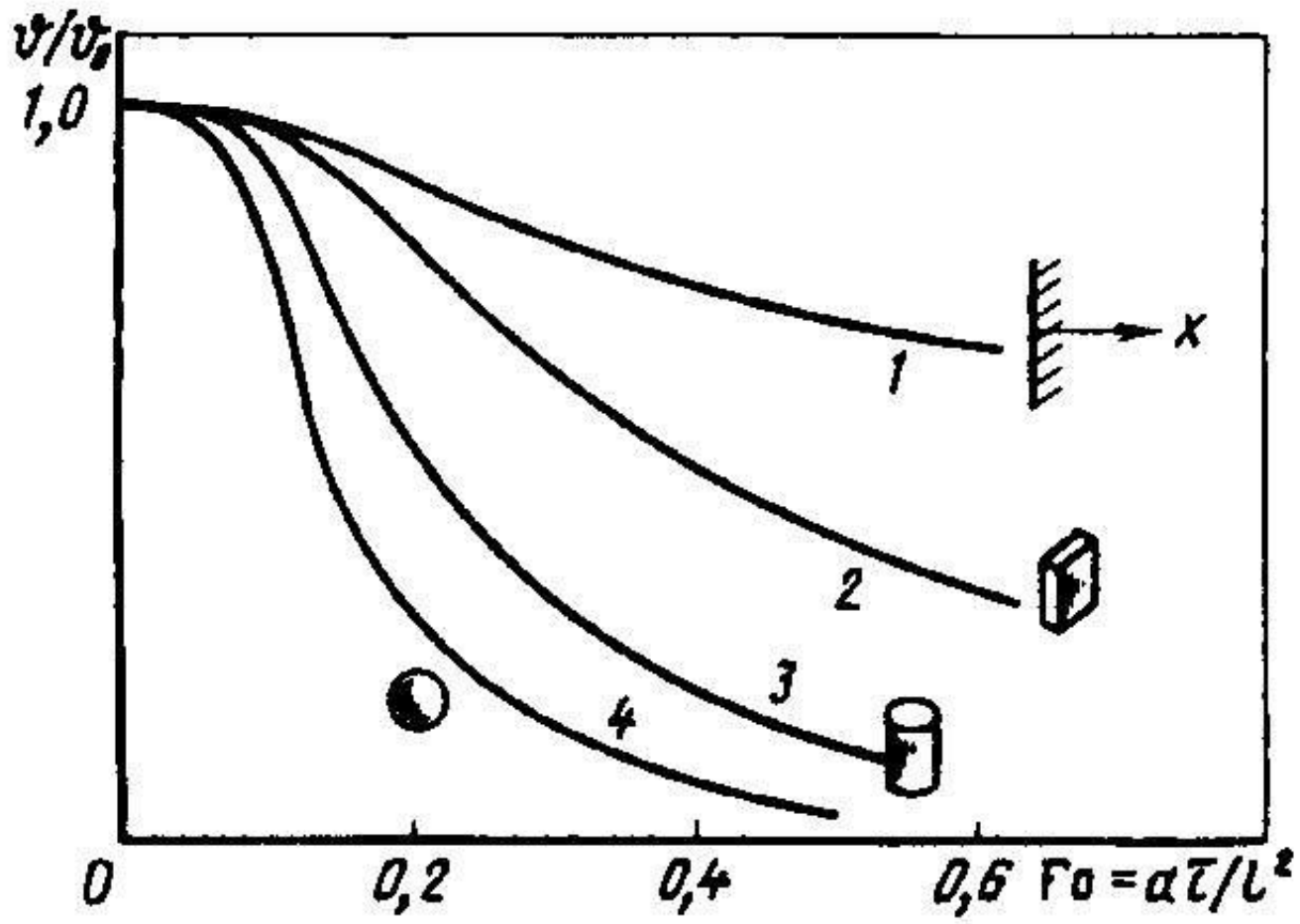
μ_n - корни
уравнения

$$Fo = a\tau / R^2$$

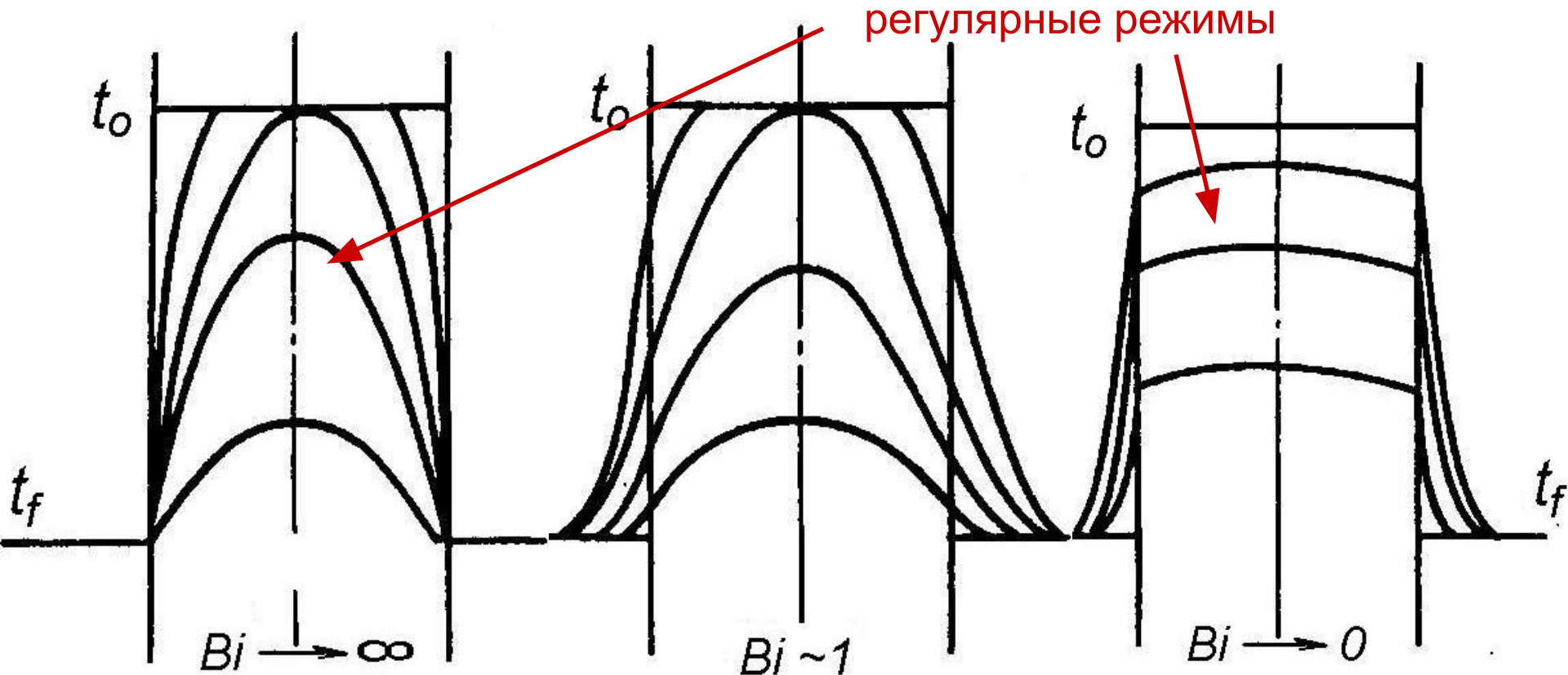
$$\mu \cdot \operatorname{ctg} \mu = 1 - Bi$$

$$Bi = \alpha \cdot R / \lambda_w$$

Поля температуры в телах простой формы



Поля температуры в телах простой формы



$$Bi = \frac{\alpha \cdot \delta}{\lambda_w} = \frac{\delta / \lambda_w}{1 / \alpha} = \frac{\text{Терм.сопротивление стенки}}{\text{Терм. сопротивление конвективного теплообмена}}$$

Регулярные тепловые режимы

Регулярный тепловой режим - нестационарный процесс теплопроводности, когда поле безразмерной температуры остается подобным себе во времени.

Температурное поле в телах разной формы: пластина, цилиндр, шар при охлаждении в среде с постоянной температурой и постоянным коэффициентом теплообмена :

$$\theta = \frac{\vartheta}{\vartheta_0} = \sum_n A_n (Bi) \cdot \Phi(x, y, z, Bi) \cdot e^{-\mu_n^2 \cdot Fo}$$

$$Fo = \frac{a \cdot \tau}{L^2}$$

$$Bi = \frac{\alpha \cdot L}{\lambda_w}$$

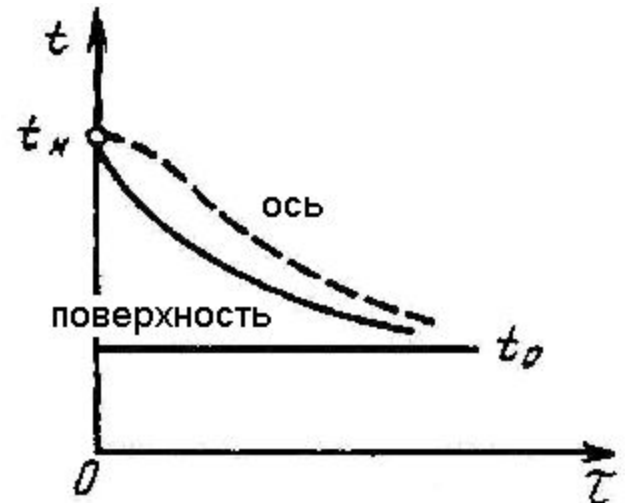
$$\theta = \frac{t(x, y, z, \tau) - t_f}{(t_o - t_f)}$$

Регулярные тепловые режимы

Две стадии охлаждения тела:

Первая стадия характеризуется влиянием начального распределения температуры в теле, когда скорость изменения температуры в разных точках тела во времени различны (начальный период).

Вторая стадия начинается с момента τ' когда скорость охлаждения не зависит от начальных условий и определяется лишь условиями теплообмена на границе, физическими свойствами тела, его геометрией и размерами.



Поле температуры описывается первым членом ряда

$$\theta = \frac{\vartheta}{\vartheta_0} = A \cdot \Phi(x, y, z) \cdot e^{-m\tau} \quad m = \mu_1^2 a / L^2$$

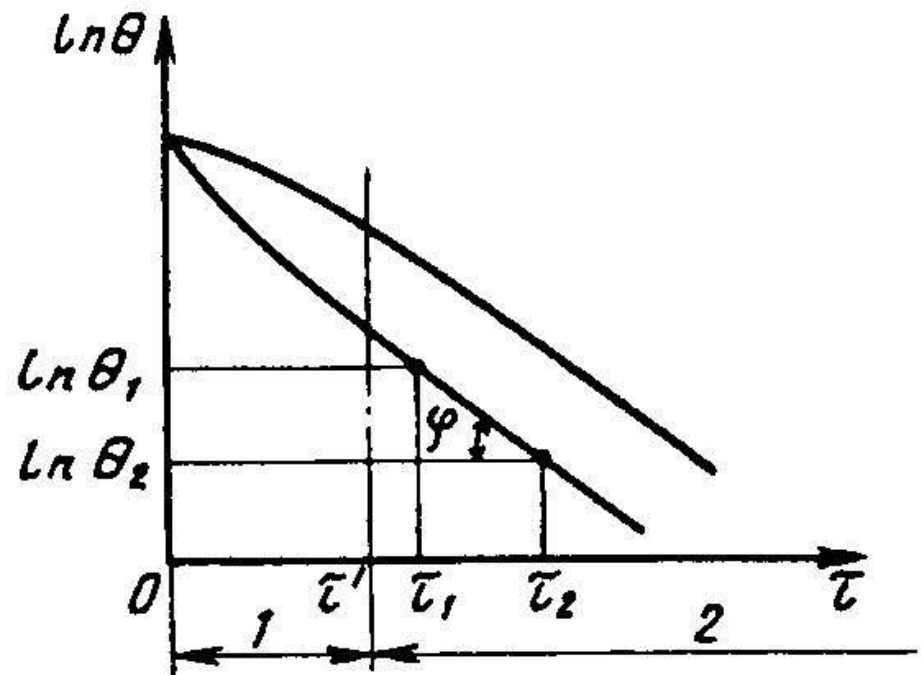
Регулярные тепловые режимы

После логарифмирования: $\ln \theta = G(x, y, z) - m\tau$

После дифференцирования по времени $\frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = -m$

Величина m - темп охлаждения, показывает, что относительная скорость изменения температур не зависит ни от времени, ни от координат и является постоянной величиной.

$$m = -\operatorname{tg} \varphi = \frac{(\ln \theta_1 - \ln \theta_2)}{(\tau_2 - \tau_1)}$$



Регулярные тепловые режимы

Виды регулярных тепловых режимов:

- Экспоненциальный, при граничных условиях III рода, описываемый соотношением

$$\theta = \Phi_1(x, y, z) \cdot e^{-m\tau}$$

- Линейный, при граничных условиях II рода, описываемый соотношением

$$\theta = \Phi_2(x, y, z) \pm m\tau$$

- Периодический - температурные волны.

Измерение свойств с помощью регулярных тепловых режимов

Тело с объёмом V , поверхностью F , обладающее высокой теплопроводностью ($Bi < 0,1$) охлаждается в потоке жидкости. Распределение температуры близко к равномерному

$$\vartheta = \vartheta_0 \cdot e^{-m\tau} \quad m = \frac{(\bar{\alpha} \cdot F)}{(c_p \cdot \rho \cdot V)}$$

Средний коэффициент теплообмена

Измеряя темп охлаждения



$$\bar{\alpha} = \frac{m \cdot c_p \cdot \rho \cdot V}{F}$$

Ограничения:

небольшие тела ($L \sim 10^{-2}$ м), $Bi < 1$,

$$\bar{\alpha} \leq 10^3 \text{ Вт}/(\text{м}^2\text{К})$$

Измерение свойств с помощью регулярных тепловых режимов

Температуропроводность

Зная темп регулярного режима

$$m = \frac{\mu_1^2 a}{\delta}$$

$$a = \frac{m\delta^2}{\mu_1^2}$$

Ограничения:

вещества с низкой теплопроводностью
 $\lambda < 0,5 \text{ Вт/(м К)}$, $Bi > 100$).