ТЕОРИЯ КРИВЫХ

Плоские кривые

Плоские кривые

Пусть кривая целиком лежит в плоскости xOy.

Кривая задана: $\bar{r} = \bar{r}(t)$

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = 0 \end{cases}$$ - параметрическое задание кривой

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad (28)$$

(28) – параметрическое задание плоской кривой.

Из (28) исключим t:

$$F(x, y) = 0 \qquad (29)$$

(29) – неявное уравнение плоской кривой.

Плоские кривые

Из (29) выразим *y*:

$$y = f(x) \qquad (30)$$

(30) – задание явной функции в виде графика.

$F(x(t), y(t)) = 0.$ Вычислим $\dfrac{dF}{dt}$ (она равна 0):

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 0.$$

Обозначим: $\dfrac{\partial F}{\partial x} \equiv F_x \qquad \dfrac{\partial F}{\partial y} \equiv F_y$

$$F_x \dot{x} + F_y \dot{y} = 0 \qquad (31)$$

Особые точки плоской кривой

Определение: точка $M_0(x_0, y_0)$ называется ***особой точкой плоской кривой***, заданной неявным уравнением, если в ней выполняются равенства:

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \end{cases} \tag{32}$$

Если $M(x, y)$ - не особая точка, то из (31):

$k = \dfrac{y'}{x'} = -\dfrac{F_x}{F_y}$ - угловой коэффициент касательной.

В особой точке k по формуле (31) не находится.

Проблема: нахождения углового коэффициента в особой точке.

Классификация особых точек плоской кривой

Обозначим $F_x(x_0, y_0) \equiv F_x^0$,

$F_y(x_0, y_0) \equiv F_y^0$

и подставим в уравнение (31):

$$F_x(x(t), y(t)) \cdot \dot{x} + F_y(x(t), y(t)) \cdot \dot{y} = 0 \qquad (33)$$

продифференцируем по t полученное равенство:

$$F_{xx} \cdot \dot{x}^2 + F_{xy} \cdot \dot{x} \cdot \dot{y} + F_{yx} \cdot \dot{x} \cdot \dot{y} + F_{yy} \cdot \dot{y}^2 + F_x \cdot \ddot{x} + F_y \cdot \ddot{y} = 0 \qquad (33')$$

Обозначим

$$F_{xx} \equiv \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \qquad F_{xy} \equiv \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \qquad F_{yy} \equiv \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

причем $F_{xy} = F_{yx}$

Классификация особых точек плоской кривой

Рассмотрим (33) в особой точке:

$$F_x^0 = F_y^0 = 0$$

$$F_{xx}^0 \dot{x}^2 + 2F_{xy}^0 \dot{x}\dot{y} + F_{yy}^0 \dot{y}^2 = 0 \qquad (34)$$

$$k = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

$$F_{xx}^0 + 2F_{xy}^0 k + F_{yy}^0 k^2 = 0 \qquad (34')$$

$$\delta = -\frac{D}{4} = F_{xx}^0 F_{yy}^0 - F_{xy}^{0\,2}:$$

A. $\delta > 0$ $(D < 0)$ Уравнение (34’) не имеет решений.

В точке нет касательной, следовательно, точка

(x_0, y_0) ***изолированная.***

Классификация особых точек плоской кривой

Б. $\delta < 0 \quad (D > 0)$ Уравнение (34’) имеет 2 решения. Имеет 2 касательные, следовательно, через точку (x_0, y_0) проходит 2 ветви кривой. Точка (x_0, y_0) называется ***узловой.***

В. $\delta = 0 \ (D = 0)$

1) (x_0, y_0) - изолированная.

Пример:

$$y^2 + x^4 - x^6 = 0$$

$$y = \pm\sqrt{-x^4 + x^6} = \pm x^2\sqrt{x^2 - 1}$$

$$\begin{cases} F_x = 4x^3 - 6x^5 = 0 \\ F_y = 2y = 0 \end{cases}$$

$$2x^3(-2 + 3x^2) = 0$$

Классификация особых точек плоской кривой

$x_1 = 0$ $\qquad x_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ $\qquad y = 0$

Последние две точки не принадлежат кривой, следовательно, точка (*0*;*0*) - особая

$$F(x, y) = y^2 + x^4 - x^6$$

$$F_{xx} = 12x^2 + 30x^4$$

$$F_{xy} = 0$$

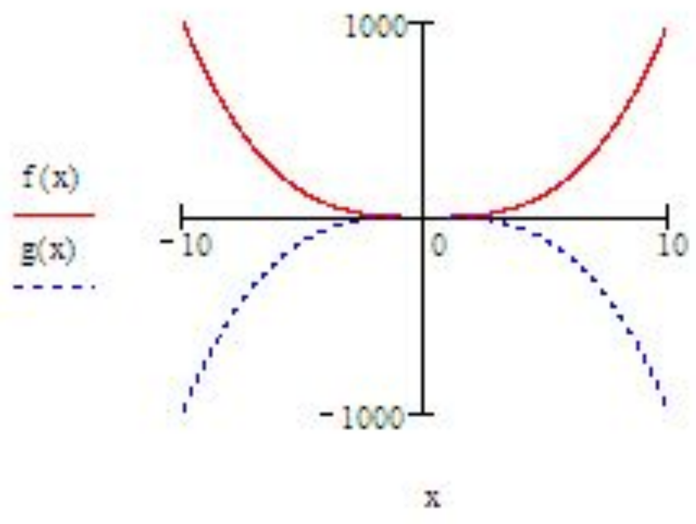
$$F_{yy} = 2$$

$F_{xx}^0 = 0$ $\qquad F_{xy}^0 = 0$ $\qquad F_{yy}^0 = 2$

$$\delta = 0 \cdot 2 - 0^2 = 0$$

Классификация особых точек плоской кривой

$$f(x) := x^2 \cdot \sqrt{x^2 - 1} \qquad g(x) := -x^2 \cdot \sqrt{x^2 - 1}$$



Классификация особых точек плоской кривой

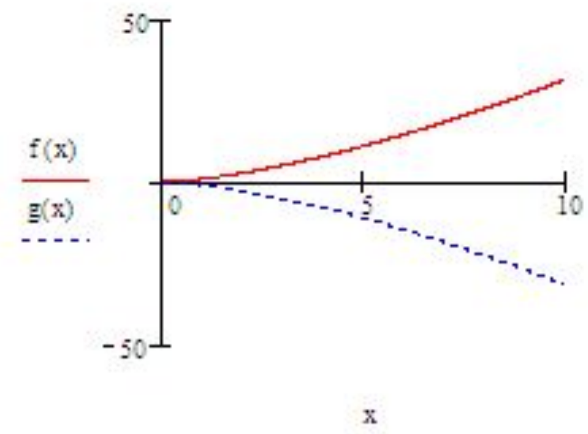
2) Точка возврата 1-го рода.

В особой точке обе ветви кривой имеют общую касательную, но находятся по одну сторону от нормали, и по разные стороны от касательной.

Пример: $y^2 = x^3$

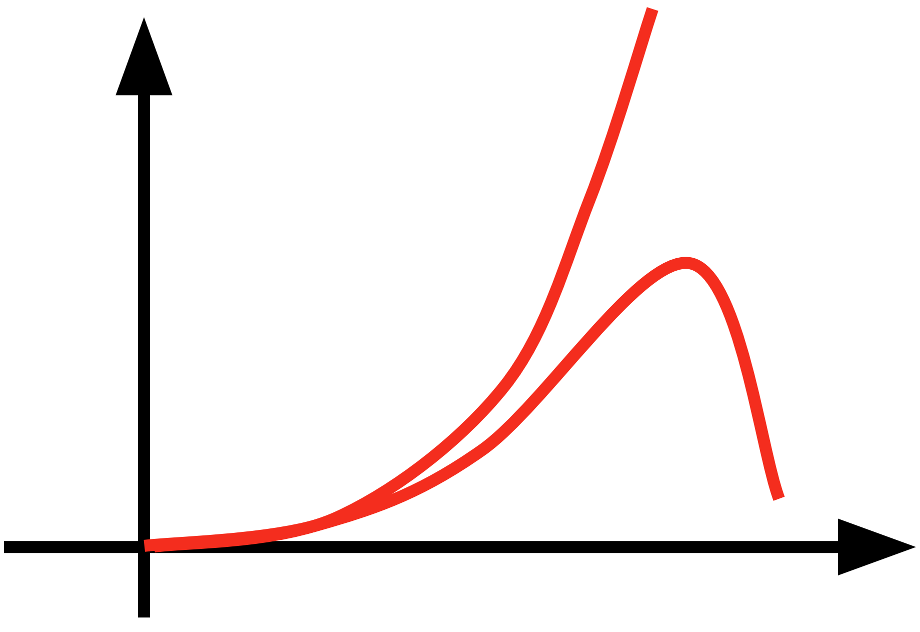
- кубическая парабола

$f(x) := \sqrt{x^3}$ $\qquad$ $g(x) := -\sqrt{x^3}$



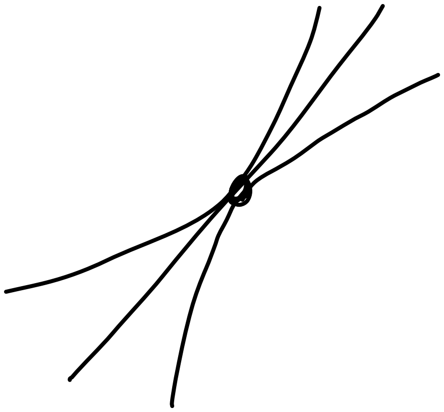
Классификация особых точек плоской кривой

3) Точка возврата 2-го рода.
В ней обе ветви находятся по одну сторону от нормали и по одну сторону от касательной.



Классификация особых точек плоской кривой

4) Точка самоприкосновения



5) $$F_{xx}^{0} = F_{yy}^{0} = F_{xy}^{0} = 0.$$

Однопараметрическое семейство плоских кривых (ОСПК)

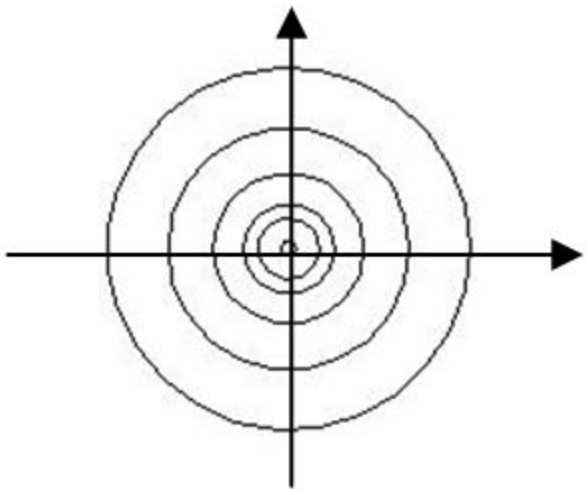
Определение: ***однопараметрическим семейством плоских кривых*** называется множество кривых на плоскости, удовлетворяющих неявному уравнению:

$$F(x, y, a) = 0 \qquad (35)$$

где *a* – параметр.

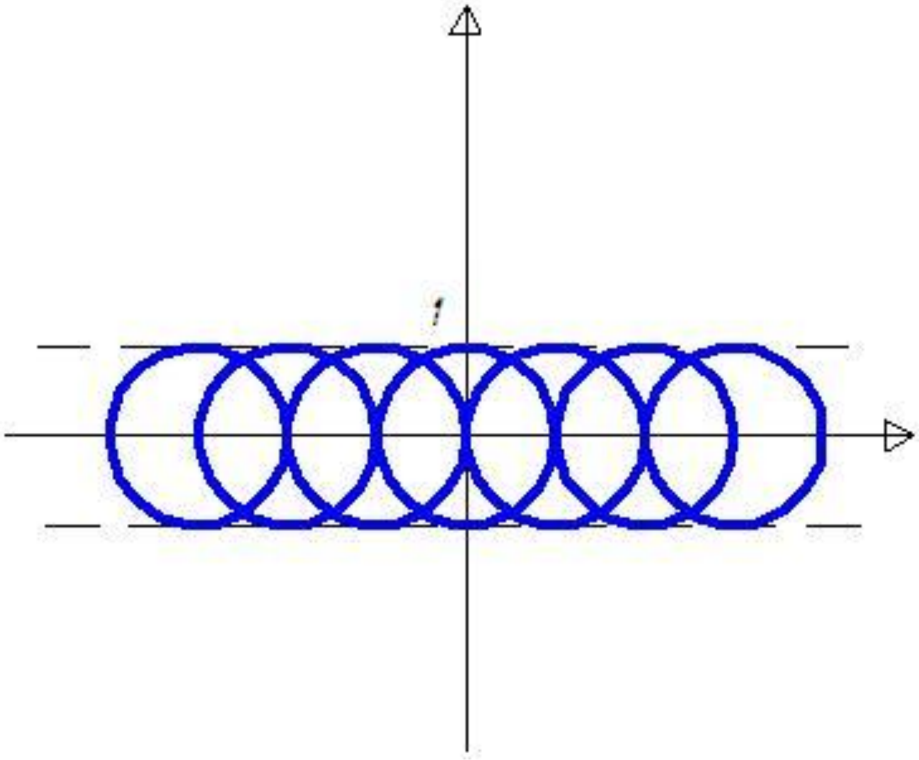
Примеры:

1) $x^2 + y^2 - a^2 = 0$



Однопараметрическое семейство плоских кривых (ОСПК)

2) $(x-a)^2 + y^2 = 1$



Однопараметрическое семейство плоских кривых (ОСПК)

Определение: плоская кривая, которая в каждой своей точке касается некоторой кривой однопараметрического семейства кривых, называется ***огибающей этого семейства***.

Определение: кривая на плоскости, удовлетворяющая системе уравнений:

$$\begin{cases} F(x, y, a) = 0 \\ \dfrac{\partial F(x, y, a)}{\partial a} = 0 \end{cases}, \qquad (36)$$

где $F(x, y, a) = 0$ уравнения ОПСК, называется ***дискриминантной кривой семейства***.

Однопараметрическое семейство плоских кривых (ОСПК)

Теорема 1.

1) Огибающая ОСПК, если она существует, является дискриминантной кривой этого ОСПК,
2) Любая дискриминантная кривая ОСПК является огибающей, если она не состоит из особых точек кривых семейства.

Доказательство:

1) Пусть

$$\begin{cases} x = x(a) \\ y = y(a) \end{cases} \qquad (37)$$

(37) – огибающая ОСПК с уравнением (35).

Продифференцируем уравнение (35) по параметру *a*:

Однопараметрическое семейство плоских кривых (ОСПК)

$$F(x(a), y(a), a) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{da} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{da} + \frac{\partial F}{\partial a} = 0 \qquad (*)$$

Рассмотрим точку касания некоторой кривой семейства $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

и огибающей, так как кривые касаются, то у них в этой точке общая касательная, следовательно:

$$\{\dot{x}, \dot{y}\} \parallel \{x'_a, y'_a\}$$

$$\frac{\dot{y}_t}{\dot{x}_t} = \frac{y'_a}{x'_a}$$ в точке касания.

$$F(x, y, a) = 0$$ - *a* фиксировано.

Однопараметрическое семейство плоских кривых (ОСПК)

$$F_x \dot{x} + F_y \dot{y} = 0,$$

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\frac{F_x}{F_y} \Rightarrow \frac{y_a'}{x_a'} = -\frac{F_x}{F_y} \Rightarrow F_x x_a' + F_y y_a' = 0$$

$(*) \Rightarrow \dfrac{\partial F}{\partial a} = 0$, следовательно, огибающая удовлетворяет системе уравнений:

$$\begin{cases} F(x, y, a) = 0 \\ \dfrac{\partial F(x, y, a)}{\partial a} = 0 \end{cases},$$

тогда огибающая есть дискриминантная кривая.

Однопараметрическое семейство плоских кривых (ОСПК)

2) Пусть $\begin{cases} x = x(a) \\ y = y(a) \end{cases}$ - дискриминантная кривая семейства (35).

$$F_x x_a' + F_y y_a' + \frac{\partial F}{\partial a} = 0$$

$$F_x x_a' + F_y y_a' = 0 : \qquad (*)$$

$$\frac{y_a'}{x_a'} = -\frac{F_x}{F_y} \overset{(31)}{=} \frac{y'}{x'}$$, следовательно, дискриминантная кривая касается в каждой своей точке некоторой кривой семейства, она является огибающей. Но в уравнении (*) может быть

$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \end{cases}$, следовательно, дискриминантная кривая состоит из особых точек кривых семейства.

Ч.т.д.

выход

$$F(x, y, a) = 0, \qquad (35)$$

где *a* – параметр.

$$F(x, y, a) = 0, \qquad (35)$$

где *a* – параметр.

$$F_x \dot{x} + F_y \dot{y} = 0 \tag{31}$$

Определение: ***однопараметрическим семейством плоских кривых*** называется множество кривых на плоскости, удовлетворяющих неявному уравнению:

$$F(x, y, a) = 0 \qquad (35)$$

где *a* – параметр.

$$F_x x' + F_y y' = 0 \qquad (31)$$

$$F_x \dot{x} + F_y \dot{y} = 0 \qquad (31)$$

$$F(x, y) = 0 \qquad (29)$$

(29) – неявное уравнение плоской кривой.