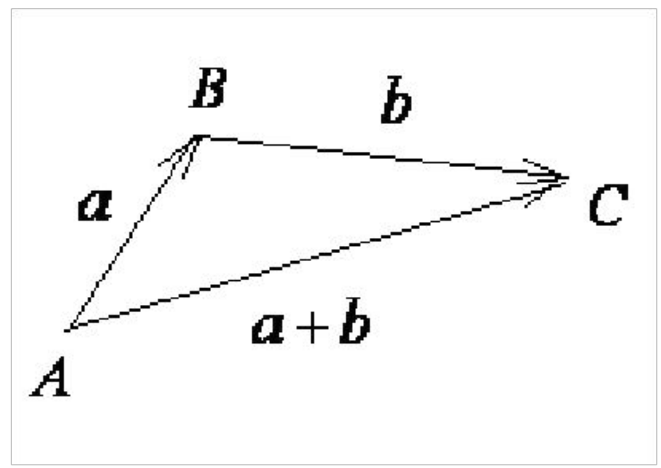
Линейные операции над векторами.

Вектором (геометрическим вектором) $\bar{a}$ называется множество всех направленных отрезков, имеющих одинаковую длину и направление. О всяком отрезке $\overline{AB}$ из этого множества говорят, что он представляет вектор $\bar{a}$ (получен приложением вектора $\bar{a}$ к точке A). Длина отрезка $\overline{AB}$ называется длиной (модулем) вектора $\bar{a}$ и обозначается символом $|\bar{a}| = |\overline{AB}|$. Вектор нулевой длины называется нулевым вектором и обозначается символом 0.

Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются равными $(\bar{a} = \bar{b})$, если множества представляющих их направленных отрезков совпадают. В ряде задач часто бывает удобно не различать вектор и какой-либо представляющий его направленный отрезок.



Именно в этом смысле, например, следует понимать выражение «построить вектор».

Пусть направленный отрезок $\overline{AB}$ представляет вектор $\overline{a}$. Приложив к точке B заданный вектор $\overline{b}$, получим некоторый направленный отрезок $\overline{BC}$. Вектор, представляемый направленным отрезком $\overline{AC}$, называется суммой векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ и обозначается $\overline{a}+\overline{b}$ (рис. 3).

Произведением вектора $\overline{a}$ на действительное число λ называется вектор, обозначаемый $\lambda\overline{a}$, такой, что:

1) $|\lambda\overline{a}| = |\lambda| \cdot |\overline{a}|$;

2) векторы $\overline{a}$ и $\lambda\overline{a}$ сонаправлены при $\lambda > 0$ и противоположно направлены при $\lambda < 0$.

Операция сложения векторов обладает следующими свойствами:

а) $\overline{a}+0=\overline{a}$;

б) $\overline{a}_1+\overline{a}_2=\overline{a}_2+\overline{a}_1$ (коммутативность);

в) $\overline{a}_1+(\overline{a}_2+\overline{a}_3)=(\overline{a}_1+\overline{a}_2)+\overline{a}_3$ (ассоциативность);

г) $\forall\overline{a}\exists\,\overline{b}\left(\overline{a}+\overline{b}=0\right)$

(вектор $\overline{b}$ называется вектором, противоположным вектору $\overline{a}$ и обозначается символом $-\overline{a}$);

д) $\forall\overline{a}_1,\,\overline{a}_2\exists\,\overline{a}_3\left(\overline{a}_1+\overline{a}_3=\overline{a}_2\right)$

(вектор $\overline{a}_3$ называется разностью векторов $\overline{a}_2$ и $\overline{a}_1$ и обозначается символом $\overline{a}_2-\overline{a}_1$).

Операции умножения вектора на число обладает следующими свойствами:

$$0\overline{a}=\lambda 0=0,\quad (\lambda_1\lambda_2)\overline{a}=\lambda_1(\lambda_2\overline{a});$$

Операции сложения векторов и умножения их на числа связаны следующими свойствами дистрибутивности:

$$\lambda(\overline{a}_1+\overline{a}_2)\,\overline{a}=\lambda\overline{a}_1+\lambda\overline{a}_2 \text{ и } (\lambda_1+\lambda_2)\,\overline{a}=\lambda_1\overline{a}+\lambda_2\overline{a}.$$

Базис и координаты вектора.

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ называется базисом в множестве всех геометрических векторов. Всякий геометрический вектор $\bar{a}$ может быть единственным образом представлен в виде

$$\bar{a} = X_1\bar{e}_1 + X_2\bar{e}_2 + X_3\bar{e}_3; \qquad (1)$$

числа X_1, X_2, X_3 называются координатами вектора $\bar{a}$ в базисе $\mathrm{B} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$. Запись (1) называют также разложением вектора $\bar{a}$ по базису B.

Аналогично упорядоченная пара $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ неколлинеарных векторов называется базисом $\mathrm{B} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ в множестве геометрических векторов, компланарных некоторой плоскости.

Наконец, всякий ненулевой вектор $\bar{e}$ образует базис $\mathrm{B} = (\bar{e})$ в множестве всех геометрических векторов, коллинеарных некоторому направлению.

Если вектор $\bar{a}$ есть линейная комбинация векторов $\bar{a}_1, ..., \bar{a}_n$ с коэффициентами $\lambda_1, ..., \lambda_n$, т.е.

$$\bar{a} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \bar{a}_k,$$

то каждая координата $X_i(\bar{a})$ вектора $\bar{a}$ равна сумме произведений коэффициентов $\lambda_1, ..., \lambda_n$ на одноименные координаты векторов $\bar{a}_1, ..., \bar{a}_n$:

$$X_i(\bar{a}) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k X_i(\bar{a}_k), \quad i = 1,2,3.$$

Базис $\text{B} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ называется прямоугольным, если векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ и $\bar{e}_3$ попарно перпендикулярны и имеют единичную длину. В этом случае приняты обозначения

$$\bar{e}_1 = \bar{i}, \bar{e}_2 = \bar{j}, \bar{e}_3 = \bar{k}. \qquad (2)$$

Проекцией вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{e}$ называется число $\mathbf{пр}_e \bar{a} = |\bar{a}| \cos\varphi$, где $\varphi = \left(\bar{a} \hat{,} \bar{e}\right)$ – угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{e}$ $(0 \le \varphi \le \pi)$.

Координаты X, Y, Z вектора $\bar{a}$ в прямоугольном базисе совпадают с проекциями вектора $\bar{a}$ на базисные орты $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, соОтвет ственно, а длина вектора $\bar{a}$ равна

$$|\bar{a}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}. \qquad (3)$$

Числа

$$\cos\alpha = \cos\left(\bar{a} \hat{,} \bar{i}\right) = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$

$$\cos\beta = \cos\left(\bar{a} \hat{,} \bar{j}\right) = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$

$$\cos\gamma = \cos\left(\bar{a} \hat{,} \bar{k}\right) = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$$

называются направляющими косинусами вектора $\bar{a}$.

Направляющие косинусы вектора совпадают с координатами (проекциями) его орта $\bar{a}_0 = \frac{1}{|\bar{a}|} \bar{a}$.

В дальнейшем, если не оговаривается противное, векторы представлены своими координатами в некотором прямоугольном базисе. Запись $\bar{a}(X, Y, Z)$ означает, что координаты вектора $\bar{a}$ равны X, Y и Z, т.е. $\bar{a} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k}$.

Декартовы прямоугольные координаты точки. Простейшие задачи аналитической геометрии.

Говорят, что в трехмерном пространстве введена декартова прямоугольная система координат $\langle 0, \mathrm{B}\rangle$, если заданы:

1) некоторая точка 0, называемая началом координат;

2) некоторый прямоугольный базис $\mathrm{B} = (\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ в множестве всех геометрических векторов.

Оси Ox, Oy и Oz, проведенные через точку O в направлении базисных ортов $\bar{i}, \bar{j}$ и $\bar{k}$, называются координатными осями системы координат $\langle O, \mathrm{B}\rangle = Oxyz$.

Если M – произвольная точка пространства, то направленный отрезок $\overline{OM}$ называется радиус-вектором точки M. Координатами точки M в системе $\langle 0, \mathrm{B}\rangle$ называются координаты ее радиус-вектора $\overline{OM}$ как геометрического вектора в базисе B, т.е.

$$x(M) = X\left(\overline{OM}\right), y(M) = Y\left(\overline{OM}\right), z(M) = Z\left(\overline{OM}\right).$$

Если $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ – две произвольные точки в пространстве, то координаты вектора $\overline{M_1M_2}$ равны

$$X = x_2 - x_1, Y = y_2 - y_1, Z = z_2 - z_1. \quad (4)$$

Отсюда на основании (3) расстояние между точками выражается формулой

$$\rho(M_1, M_2) = \left|\overline{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Пример Заданы вершины $A(1,0,-1), B(2,2,1)$ и точка $E(-1,2,1)$ пересечения медиан треугольника ABC. Найти координаты вершины C.

Решение: Так как координаты вершины A заданы, то для вычисления координат вершины C достаточно найти координаты вектора $\overline{AC}$. Пусть $\overline{BF}$ – медиана, проведенная из вершины B. Тогда $$\overline{AC} = 2\overline{AF} = 2\left(\overline{BA} + \overline{BF}\right) = 2\left(\overline{AB} + \frac{3}{2}\overline{BE}\right) \qquad (5)$$

(здесь использован тот факт, что точка E делит медиану BF в отношении $2:1$). Далее, из условий задачи с помощью формулы (4) вычисляем координаты векторов $\overline{AB}(1,2,2)$ и $\overline{BE}(-3,0,0)$, откуда на основании (5) получаем $\overline{AC}(-7,4,4)$ и, наконец, вновь используя формулу (4), находим координаты точки C:

$$x(C) = x(A) + X(\overline{AC}) = -6;$$

$$y(C) = y(A) + Y(\overline{AC}) = 4;$$

$$z(C) = z(A) + Z(\overline{AC}) = 3.$$

Пусть на прямой l заданы точки M_1, M_2 и M, причем $M_1 \neq M_2$. Рассмотрим векторы $\overline{M_1M}$ и $\overline{MM_2}$. Так как они коллинеарны, то найдется такое действительное число λ, что $\overline{M_1M} = \lambda\overline{MM_2}$. Число λ называется отношением, в котором точка M делит направленный отрезок $\overline{M_1M_2}$, причем оно положительно, если точка M находится внутри отрезка $\overline{M_1M_2}$, отрицательно $(и\ \lambda \neq -1)$, если M находится вне $\overline{M_1M_2}$, и равно 0, если $M = M_1$ $(\lambda = -1)$.

Пример . Зная координаты точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и отношение λ, в котором точка M делит направленный отрезок $\overline{M_1 M_2}$, найти координаты точки M .

Решение: Пусть O – начало координат. Обозначим: $\overline{OM_1} = \bar{r}_1, \overline{OM_2} = \bar{r}_2, \overline{OM} = \bar{r}$. Так как

$$\overline{M_1 M} = \bar{r} - \bar{r}_1, \overline{MM_2} = \bar{r}_2 - \bar{r},$$

то

$$\bar{r} - \bar{r}_1 = \lambda(\bar{r}_2 - \bar{r}),$$

Откуда (так как $\lambda \neq -1$)

$$\bar{r} = \frac{\bar{r}_1 + \lambda \bar{r}_2}{1 + \lambda}.$$

Полученная формула и дает решение задачи в векторной форме.

Переходя в этой формуле к координатам, получим

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \qquad (6)$$

Пример 3. Даны вершины треугольника $A(1,-1,-3)$, $B(2,1,-2)$ и $C(-5,2,-6)$. Вычислить длину биссектрисы его внутреннего угла при вершине A.

Решение. Найдем разложение вектора $\overline{AE}$ по базису из векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.

Пусть $\overline{e}_1 = \overline{AB}/\left|\overline{AB}\right|$ и $\overline{e}_2 = \overline{AC}/\left|\overline{AC}\right|$ –орты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$. Тогда вектор $\overline{AE}$ сонаправлен с вектором $\overline{e} = \overline{e}_1 + \overline{e}_2$ (ср. с задачей 2.47), т.е. существует число $\lambda > 0$ такое, что

$$\overline{AE} = \lambda\overline{e} = \lambda\left(\frac{\overline{AB}}{\left|\overline{AB}\right|} + \frac{\overline{AC}}{\left|\overline{AC}\right|}\right). \qquad (7)$$

С другой стороны,

$$\overline{AE} = \overline{AC} + \overline{CE} = \overline{AC} + \mu\overline{CB} = \overline{AC} + \mu\left(\overline{AB} - \overline{AC}\right) =$$
$$= \mu\overline{AB} + (1-\mu)\overline{AC},\ \mu > 0$$

(8)

Формулы (7) и (8) представляют собой два разложения вектора $\overline{AE}$ по базису из векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$. В силу единственности разложения вектора по базису имеем

$$\frac{\lambda}{\left|\overline{AB}\right|} = \mu \text{ и } \frac{\lambda}{\left|\overline{AC}\right|} = 1 - \mu. \qquad (9)$$

Решая систему (9), находим

$$\lambda = \frac{1}{1/\left|\overline{AC}\right| + 1/\left|\overline{AB}\right|} = \frac{\left|\overline{AB}\right| \cdot \left|\overline{AC}\right|}{\left|\overline{AB}\right| + \left|\overline{AC}\right|},$$

Так что формула (7) принимает вид

$$\overline{AE} = \frac{\left|\overline{AC}\right|}{\left|\overline{AB}\right| + \left|\overline{AC}\right|}\overline{AB} + \frac{\left|\overline{AB}\right|}{\left|\overline{AB}\right| + \left|\overline{AC}\right|}\overline{AC}. \qquad (10)$$

Из условий задачи находим:

$\overline{AB}(1,2,1)$ и $\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{6}$, $\overline{AC}(-6,3,-3)$ и $\left|\overline{AC}\right| = 3\sqrt{6}$, и на основании (10) получаем

$$\overline{AE} = \frac{3}{4}\overline{AB} + \frac{1}{4}\overline{AC},$$

откуда

$\overline{AE}\left(-\frac{3}{4}, \frac{9}{4}, 0\right)$ и $\left|\overline{AE}\right| = \frac{3}{4}\sqrt{10}$.

Скалярное произведение векторов.

Скалярным произведением ненулевых векторов $\overline{a}_1$ и $\overline{a}_2$ называется число

$$(\overline{a}_1, \overline{a}_2) = |\overline{a}_1||\overline{a}_2|\cos\left(\overline{a}_1 \hat{,} \overline{a}_2\right).$$

Для скалярного произведения наряду с обозначением $(\overline{a}_1, \overline{a}_2)$ используется также обозначение $\overline{a}_1\overline{a}_2$.

Геометрические свойства скалярного произведения:

1) $\overline{a}_1 \perp \overline{a}_2 \Leftrightarrow \overline{a}_1\overline{a}_2 = 0$ (условие перпендикулярности векторов);

2) если $\varphi = \left(\overline{a}_1 \hat{,} \overline{a}_2\right)$, то

$$0 \le \varphi < \pi/2 \Leftrightarrow \overline{a}_1\overline{a}_2 > 0$$

$$\pi/2 < \varphi \le \pi \Leftrightarrow \overline{a}_1\overline{a}_2 < 0.$$

Алгебраические свойства скалярного произведения:

1) $\bar{a}_1\bar{a}_2 = \bar{a}_2\bar{a}_1$;

2) $(\lambda\bar{a}_1)\bar{a}_2 = \lambda(\bar{a}_1\bar{a}_2)$;

3) $\bar{a}(\bar{b}_1 + \bar{b}_2) = \bar{a}\bar{b}_1 + \bar{a}\bar{b}_2$.

Если векторы $\bar{a}_1(X_1, Y_1, Z_1)$ и $\bar{a}_2(X_2, Y_2, Z_2)$ представлены своими координатами в прямоугольном базисе, то скалярное произведение равно

$$\bar{a}_1\bar{a}_2 = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2.$$

Из этой формулы, в частности, следует формула для определения косинуса угла между векторами

$$\cos\left(\bar{a}_1 \,\hat{,}\, \bar{a}_2\right) = \frac{\bar{a}_1\bar{a}_2}{|\bar{a}_1|\,|\bar{a}_2|} = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}\,\sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}.$$

Векторное произведение векторов. *Упорядоченная тройка некомпланарных векторов* $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ *называется* ***правой***, *если наблюдателю, находящемуся внутри телесного угла, образованного этими векторами, кратчайшие повороты от* $\bar{e}_1$ *к* $\bar{e}_2$ *и от* $\bar{e}_2$ *к* $\bar{e}_3$ *кажутся происходящими против часовой стрелки. В противном случае тройка* $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ *называется* ***левой*** (см. рис.1, рис.2.).

Векторным произведением *вектора* $\bar{a}_1$ *на вектор* $\bar{a}_2$, *называется вектор, обозначенный символом* $[\bar{a}_1, \bar{a}_2]$ *(или* $\bar{a}_1 \times \bar{a}_2$*), определяемый следующими тремя условиями*:

1) *длина вектора* $[\bar{a}_1, \bar{a}_2]$ *равна площади параллелограмма, построенного на векторах* $\bar{a}_1$ *и* $\bar{a}_2$, *т.е.* $\left|[\bar{a}_1, \bar{a}_2]\right| = |\bar{a}_1| \cdot |\bar{a}_2| \sin\left(\bar{a}_1 \hat{,} \bar{a}_2\right)$;

2) *вектор* $[\bar{a}_1, \bar{a}_2]$ *перпендикулярен плоскости векторов* a_1 *и* a_2

3) *упорядоченная тройка* $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $[\bar{a}_1, \bar{a}_2]$ *правая* (см. рис.3).

Из определения векторного произведения следует, что

$$\bar{a}_1 \parallel \bar{a}_2 \Leftrightarrow [\bar{a}_1, \bar{a}_2] = 0.$$

Алгебраические свойства векторного произведения:

1) $\left[\bar{a}_1, \bar{a}_2\right] = -\left[\bar{a}_2, \bar{a}_1\right]$;

2) $\left[\lambda\bar{a}_1, \bar{a}_2\right] = \lambda\left[\bar{a}_1, \bar{a}_2\right]$;

3) $\left[\bar{a}_1 + \bar{a}_2, \bar{b}\right] = \left[\bar{a}_1, \bar{b}\right] + \left[\bar{a}_2, \bar{b}\right]$.

Если $\bar{a}_1\left(X_1, Y_1, Z_1\right)$ и $\bar{a}_2\left(X_2, Y_2, Z_2\right)$ – векторы, заданные своими координатами в правом прямоугольном базисе, то разложение векторного произведения $\left[a_1, a_2\right]$ в том же базисе имеет вид

$$\left[\bar{a}_1, \bar{a}_2\right] = \left(Y_1 Z_2 - Z_1 Y_2\right)\bar{i} + \left(Z_1 X_2 - X_1 Z_2\right)\bar{j} + \left(X_1 Y_2 - Y_1 X_2\right)\bar{k},$$

или, в символической записи (с использованием понятия определителя 3-го порядка)

$$\left[\bar{a}_1, \bar{a}_2\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}.$$

Смешанное произведение векторов. *Смешанным произведением упорядоченной тройки векторов* a_1, a_2, a_3 *называется число* $[a_1, a_2]a_3$.

Геометрические свойства смешанного произведения:

1) если V – объем параллелепипеда, построенного на векторах a_1, a_2 и a_3, то

$$[a_1, a_2]a_3 = \begin{cases} V, & \text{если ттройк } (a_1, a_2, a_3) \text{ правая;} \\ -V, & \text{если ттройк } (a_1, a_2, a_3) \text{ ллевая;} \end{cases}$$ (см. рис.1, рис.2)

2) для того, чтобы три вектора $(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3)$ были компланарны, необходимо и достаточно выполнение условия $[\overline{a}_1, \overline{a}_2]\overline{a}_3 = 0$.

Основное алгебраическое свойство смешанного произведения состоит в том, что циклическая перестановка векторов не меняет его величины, т.е.

$$[\overline{a}_1, \overline{a}_2]\overline{a}_3 = [\overline{a}_2, \overline{a}_3]\overline{a}_1 = [\overline{a}_3, \overline{a}_1]\overline{a}_2 .$$

Это свойство позволяет ввести обозначение $[a_1, a_2]a_3 = a_1 a_2 a_3$ (результат не зависит от того, как расставить квадратные скобки в правой части). Смешанное произведение через координаты векторов в правом прямоугольном базисе записывается в виде:

$$\overline{a}_1\overline{a}_2\overline{a}_3 = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}.$$

Векторное и смешанное произведение векторов и их приложения.

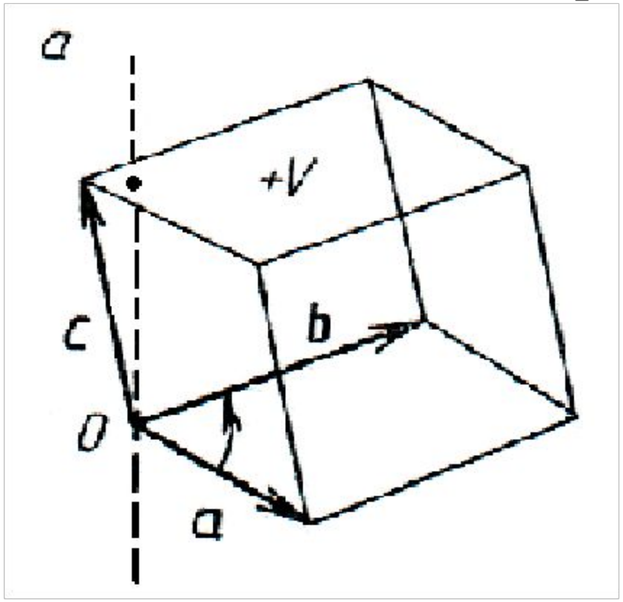


Рис.1

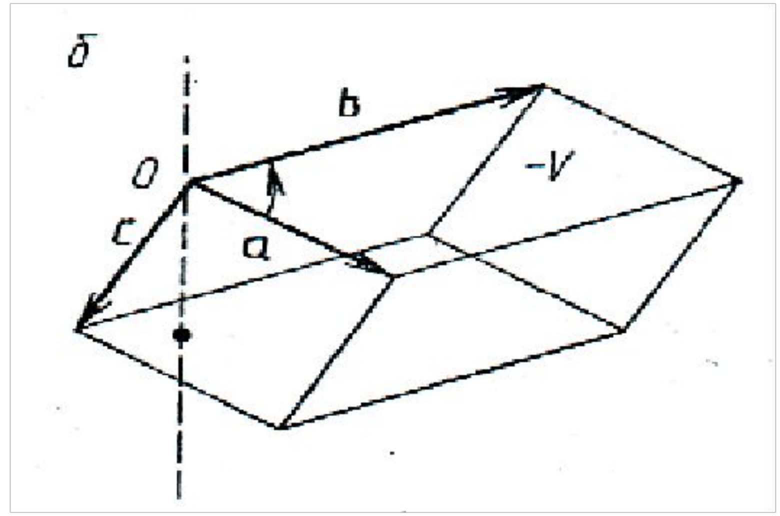


Рис.2

Пример . Даны векторы $\overline{a} = (1, 3, 1)$, $\overline{b} = (-2, 4, -1)$, $\overline{c} = (2, 4, -6)$. Требуется установить, компланарны ли данные векторы, в случае их некомпланарности выяснить, какую тройку (правую или левую) они образуют, и вычислить объем построенного на них параллелепипеда.

Решение: Вычислим

$$\overline{a}\overline{b}\,\overline{c} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & -1 \\ 2 & 4 & -6 \end{vmatrix} = -78.$$

Из значения смешанного произведения следует, что векторы некомпланарны, образуют левую тройку и $V = 78$.

С помощью векторного произведения можно вычислить вращающий момент M силы F, приложенной в точке B тела, закрепленного в точке A: $M = \overrightarrow{AB} \times F$ (см. рис.4.)

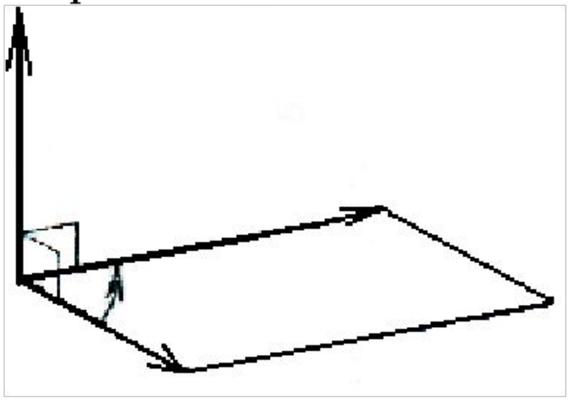


Рис.3

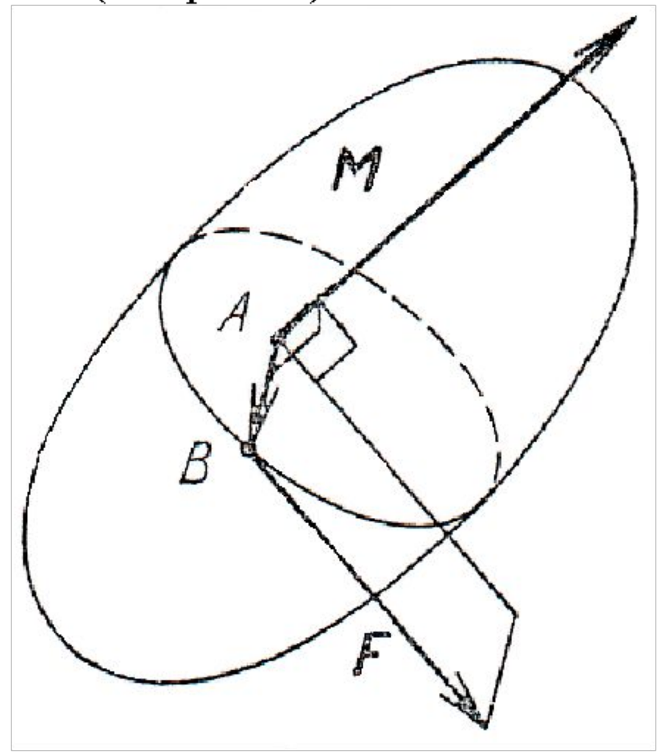


Рис.4

Пример . Вычислить координаты вращающего момента M силы $\overline{F} = (3,2,1)$, приложенной к точке $A(-1,2,4)$, относительно начала координат O.

Решение: Имеем

$$M = \overrightarrow{OA} \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-6, 13, -8).$$