

*Лекции 6.* Магнитное поле в  
вакууме

## *Вопросы:*

- Векторные характеристики магнитного поля.
- Закон Био - Савара.
- Принцип суперпозиции магнитных полей.
- Теорема Гаусса для магнитного поля в интегральной и дифференциальной формах.
- Циркуляция и ротор вектора индукции магнитного поля.
- Расчет магнитного поля соленоида и тороида.

# Векторные характеристики магнитного поля

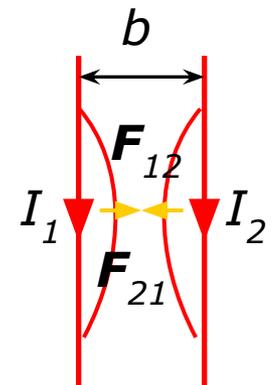
- *Силовое взаимодействие электрических токов*

Эксперимент, проведенный Ампером в 1820 г., показал, что проводники с токами взаимодействуют между собой с силой (из расчета на единицу длины каждого из параллельных проводников) пропорциональной величинам токов в них и обратно пропорциональной расстоянию между ними, т. е.

$$F_{ед} = k \cdot \frac{2 \cdot I_1 \cdot I_2}{b} \quad (1)$$

где коэффициент пропорциональности в системе СИ  $k = \frac{\mu_0}{4\pi}$ ,  
а  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  [Гн/м] – магнитная постоянная.

Причем одинаково направленные токи – притягиваются, а противоположно направленные – отталкиваются (см. рис.). Сейчас выражение (1) рассматривается как одна из форм закона Ампера.



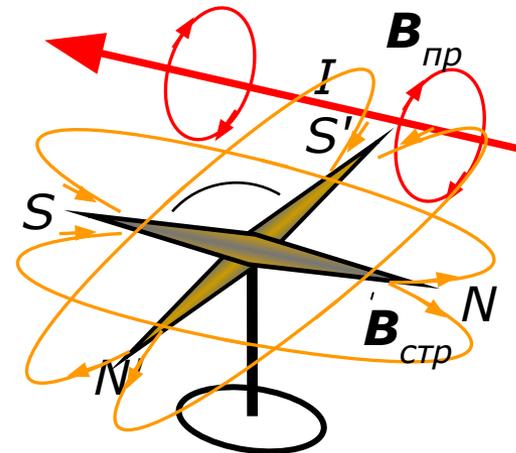
# Векторные характеристики магнитного поля

- *Силовое взаимодействие электрических токов*

Здесь речь идет об особой форме силового взаимодействия токов (или направленных потоков заряженных частиц), осуществляемого через особое поле, сосредоточенное в пространстве и названное **магнитным полем**.

Название «магнитное поле» появилось в 1820 г. после того, как Эрстед экспериментально установил ориентирующее действие проводника с током на магнитную стрелку компаса. В опыте Эрстеда провод (с током) располагался над магнитной стрелкой, и при включении тока  $I$  – стрелка устанавливалась перпендикулярно к проводу с током (см. рис.).

Таким образом, магнитное поле имеет направленный характер и должно характеризоваться векторной величиной.



# Векторные характеристики магнитного поля

- *Силовое взаимодействие электрических токов*

Логично было бы по аналогии с напряженностью электрического поля  $\mathbf{E}$  назвать основную силовую характеристику магнитного поля – напряженностью, однако по историческим причинам, ее называли **магнитной индукцией** и обозначили через вектор  $\mathbf{B}$ . Единицей измерения магнитной индукции в СИ является 1 [Тл].

Магнитное поле действует только на движущийся со скоростью  $\mathbf{v}$  заряд  $q$ . Это действие проявляет себя в **магнитной силе**, которая обладает следующими особенностями (установлены экспериментально):

1) в любой точке пространства направление и модуль этой силы  $\mathbf{F}_{\text{маг}}$  зависят от скорости  $\mathbf{v}$  заряда, в то же время можно говорить о постоянстве отношения  $\frac{F_{\text{маг}}}{|q| \cdot v}$ ;

2) магнитная сила  $\mathbf{F}_{\text{маг}}$  всегда перпендикулярна скорости  $\mathbf{v}$  заряженной частицы;

# Векторные характеристики магнитного поля

- *Силовое взаимодействие электрических токов*

3) так как  $\mathbf{F}_{\text{маг}} \perp \mathbf{v}$ , то работы над зарядом магнитная сила не совершает (по определению работа:  $\delta A = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ ).

Из всего сказанного можно заключить, что магнитную силу можно представить в виде векторного произведения:

$$\mathbf{F}_{\text{маг}} = q \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = q \cdot v \cdot B \cdot \sin(\mathbf{v}, \mathbf{B}) \quad (2)$$

*Замечание:* Когда движущийся заряд  $q$  находится одновременно под действием электрического и магнитного полей, то говорят, что на него действует **электромагнитная сила Лоренца** (или **обобщенная сила Лоренца**):

$$\mathbf{F} = q \cdot \mathbf{E} + q \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (3)$$

где  $\mathbf{F}_{\text{эл}} = q \cdot \mathbf{E}$  – электрическая сила,  $\mathbf{F}_{\text{маг}} = q \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$  – магнитная сила Лоренца.

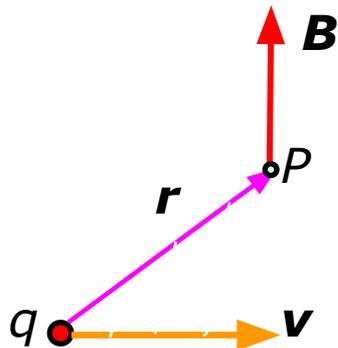
# Векторные характеристики магнитного поля

- *Магнитное поле движущегося заряда*

Опыт показывает, что само магнитное поле порождается движущимися зарядами. В случае движения заряда со скоростью  $\mathbf{v}$  в пространстве появляется выделенное направление – направление вектора  $\mathbf{v}$ . Поэтому можно ожидать, что магнитное поле, создаваемое движущимся зарядом, обладает осевой симметрией. Здесь предполагается равномерное движение заряда  $q$  с постоянной нерелятивистской скоростью  $\mathbf{v}$ .

Экспериментально был получен закон, определяющий магнитное поле  $\mathbf{B}$  точечного заряда  $q$ , движущегося со скоростью  $\mathbf{v}$  (постоянной, нерелятивистской  $v \ll c$ ):

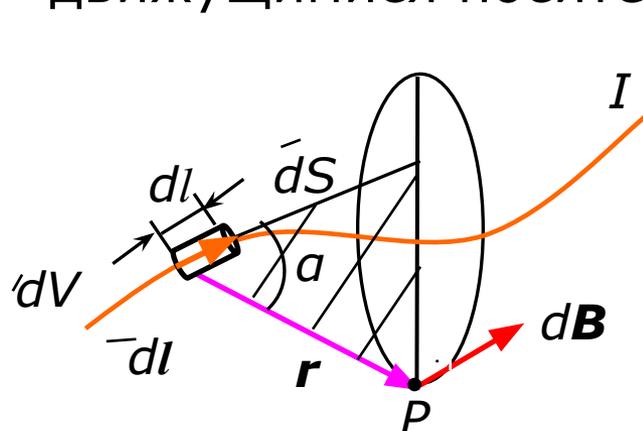
$$\mathbf{B}_{(\bullet P)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{r})}{r^3} \quad (4)$$



где  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор, проведенный от заряда в точку  $P$  наблюдения поля (причем конец вектора  $\mathbf{r}$  – неподвижен в данной системе отсчета, а его начало движется со скоростью  $\mathbf{v}$ ).

# Закон Био - Савара

Рассмотрим вопрос о нахождении магнитного поля, создаваемого произвольным проводом с током. Пусть малый элемент провода длиной  $dl$  с сечением  $dS$  определяет объем  $dV$  (см. рис.), заполненный носителями тока с малым зарядом  $dq = \rho \cdot dV$ , где  $\rho$  - объемная плотность заряда носителей. Известно, что плотность тока в данной точке сечения  $S$  определяется как:  $\mathbf{j} = e \cdot n \cdot \mathbf{u} = \rho \cdot \mathbf{u}$ . Используя формулу (4) для  $\mathbf{B}$  точечного заряда и полагая  $\mathbf{v} = \mathbf{u}$  (при этом  $\mathbf{j} = \rho \cdot \mathbf{v}$ ), получаем выражение для элементарного магнитного поля  $d\mathbf{B}$  в некоторой точке  $P$  пространства, создаваемого движущимися носителями в объеме  $dV$ :


$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{(\mathbf{j} \times \mathbf{r})}{r^3} \cdot dV \quad (5)$$

где выражение  $\mathbf{j} \cdot dV$  принято называть объемным токовым элементом.

# Закон Био - Савара

В случае, когда ток  $I$  течет по тонкому проводу постоянного малого сечения  $\Delta S$ , то тогда  $j \cdot dV = j \cdot \Delta S \cdot dl = I \cdot dl$ . Введя вектор  $d\mathbf{l}$  в направлении тока, можно записать в векторном виде  $\mathbf{j} \cdot dV = I \cdot d\mathbf{l}$ , где выражение справа принято называть линейным токовым элементом. Произведя в (5) замену согласно последнему равенству, получаем:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot (d\mathbf{l} \times \mathbf{r})}{r^3} \quad (6)$$

Модуль вектора  $d\mathbf{B}$  определяется как  $dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl}{r^2} \cdot \sin \alpha$

Формулы (5) и (6) выражают экспериментально установленный в 1820 г. французскими физиками Био и Саваром закон, названный впоследствии их именами – **закон Био-Савара.**

# Принцип суперпозиции магнитных полей

Опыт показывает, что для магнитного поля, как и для электрического, справедлив **принцип суперпозиции**. Магнитное поле  $\mathbf{B}$ , порождаемое несколькими движущимися зарядами (или несколькими токами), равно векторной сумме магнитных полей  $\mathbf{B}_i$ , порождаемых каждым зарядом (или током) в отдельности:

$$\mathbf{B} = \sum \mathbf{B}_i \quad (7)$$

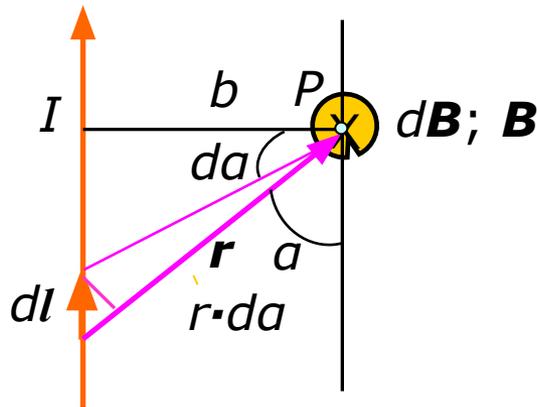
Французский математик Лаплас проанализировал экспериментальные данные Био и Савара, вывел формулу (6) и предложил вычислять магнитное поле любого тока как суперпозицию полей (согласно (7)), создаваемых отдельными элементарными участками токов. В зависимости от конфигурации тока расчет результирующего магнитного поля проводится интегрированием либо выражения (5) для объемного токового элемента, либо выражения (6) для линейного токового элемента:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{(\mathbf{j} \times \mathbf{r})}{r^3} \cdot dV, \text{ либо } \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{I \cdot (d\mathbf{l} \times \mathbf{r})}{r^3} \quad (8)$$

# Принцип суперпозиции магнитных полей

Расчет по формулам (8) – сложен, однако, он значительно упрощается, если распределение тока имеет определенную симметрию. Далее рассмотрим ряд примеров по применению закона Био-Савара-Лапласа.

Пример 1. Магнитное поле прямого тока (тока, текущего по тонкому проводу бесконечной длины).



Согласно (6) в произвольной точке  $P$  векторы  $d\mathbf{B}$  от всех элементов тока имеют одинаковое направление – за плоскость рисунка. Поэтому сложение элементарных векторов для получения полного  $\mathbf{B}$  можно заменить сложением их модулей:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl}{r^2} \cdot \sin \alpha.$$

С учетом геометрических соотношений:

$$r = \frac{b}{\sin \alpha}, \quad dl = \frac{r \cdot d\alpha}{\sin \alpha} = \frac{b \cdot d\alpha}{\sin^2 \alpha}$$

получаем  $dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot b \cdot \sin^2 \alpha \cdot d\alpha}{b^2 \cdot \sin^2 \alpha} \cdot \sin \alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha$  где угол  $\alpha$  изменяется в пределах  $[0; \pi]$ .

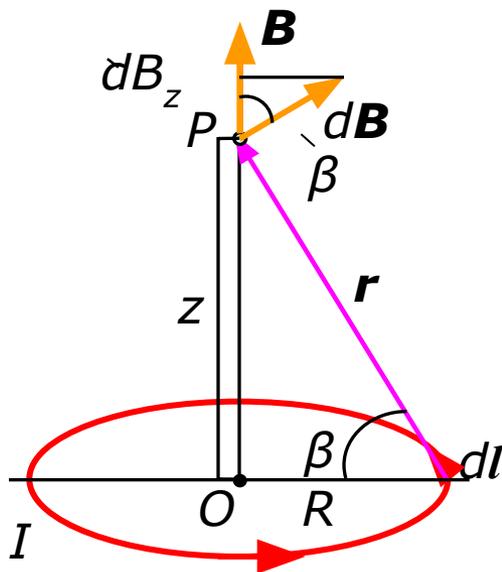
# Принцип суперпозиции магнитных полей

Следовательно, результирующее поле определяем интегрированием:

$$B = \int dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{b} \cdot \int_0^\pi \sin \alpha \cdot d\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{b} \cdot [-\cos \alpha]_0^\pi = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2 \cdot I}{b} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{b}$$

Силовые линии магнитной индукции прямого тока представляют собой систему охватывающих провод с током  $I$  концентрических окружностей, направление которых определяется по правилу «правого винта».

Пример 2. Магнитное поле на оси  $z$  кругового тока (тока, текущего по тонкому проводу в форме кольца радиуса  $R$ ).



На рисунке представлен элементарный вектор  $d\mathbf{B}$  от линейного токового элемента  $I \cdot d\mathbf{l}$  (направлен за плоскость рисунка). От всех симметрично (относительно оси  $z$ ) расположенных элементов кругового тока получается «конус» векторов  $d\mathbf{B}$ , и поэтому легко сообразить, что результирующий вектор  $\mathbf{B}$  в точке  $P$  (с координатой  $z$ ) будет направлен вверх по оси.

# Принцип суперпозиции магнитных полей

Это значит, что для нахождения модуля  $\mathbf{B}$  достаточно сложить все проекции векторов  $d\mathbf{B}$  на ось  $z$ , т. е.  $-dB_z = dB \cdot \cos\beta$ . С учетом, что в данном примере угол  $a = \pi/2$ , а  $\sin a = 1$ , и используя формулу (6), получаем выражение проекции  $dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl}{r^2} \cdot \cos\beta$ . Заменяя  $\cos\beta = R / r$  и  $r^2 = z^2 + R^2$ , получаем результат интегрированием по всем  $dl$ :

$$B = \int dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl}{r^2} \cdot \cos\beta \cdot \int dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot R \cdot 2\pi R}{\sqrt{z^2 + R^2}^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\pi \cdot R^2 \cdot I}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

В частности, в центре витка с током  $I$  (точка  $O$ ) с координатой  $z = 0$

$= 0$ ) имеем поле  $B_{/z=0} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\pi \cdot R^2 \cdot I}{R^3} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot R}$  а на очень большом расстоянии  $z \gg R$  получаем

$$B_{/z \gg R} \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\pi \cdot R^2 \cdot I}{z^3} = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot R^2}{2 \cdot z^3}$$

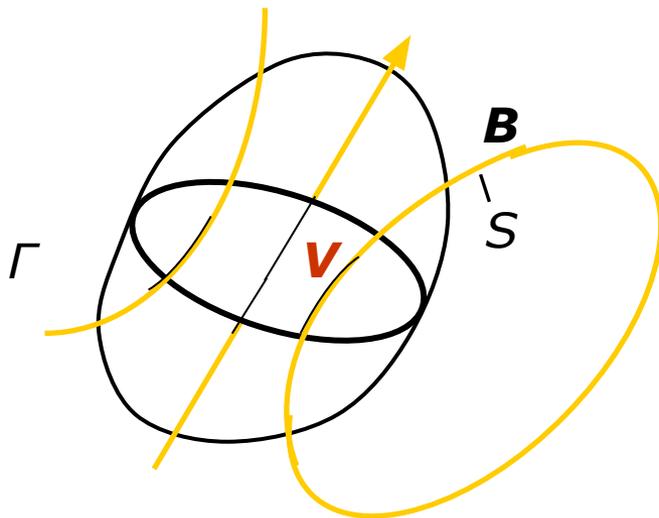
# Теорема Гаусса для магнитного поля в интегральной и дифференциальной формах

## ■ Интегральная форма

Поток вектора индукции магнитного поля сквозь любую замкнутую поверхность равен нулю:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (9)$$

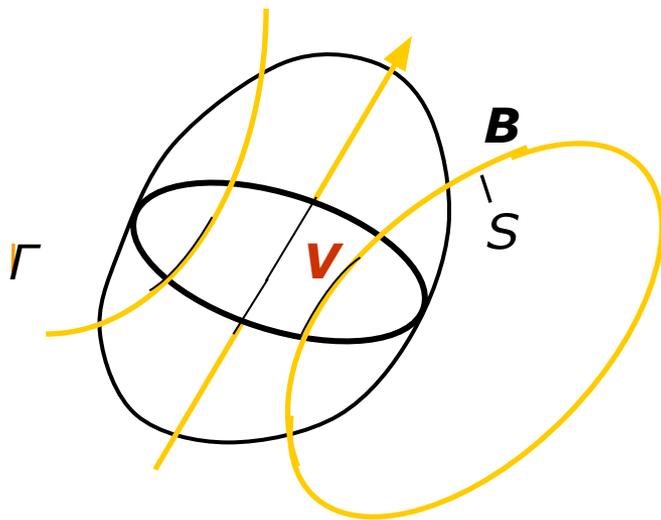
Эта теорема является фундаментальным законом для магнитного поля (она выполняется для любых магнитных полей) и выражает собой в постулативной форме тот экспериментальный факт, что линии вектора  $\mathbf{B}$  не имеют ни начала, ни конца – они замкнуты сами на себе (где-то, вообще говоря, на бесконечности).



Иначе можно трактовать теорему Гаусса для  $\mathbf{B}$ , как отсутствие в природе «магнитных зарядов» (т. е. зарядов, имеющих такое же значение, как и электрические заряды).

# Теорема Гаусса для магнитного поля в интегральной и дифференциальной формах

Число линий  $\mathbf{B}$ , входящих в объем  $V$ , ограниченный замкнутой поверхностью  $S$ , равно числу линий  $\mathbf{B}$ , выходящих из этого объема. Следствием из этого является того, что магнитный поток не зависит от формы поверхности и определяется только ее размером  $S$ . Иначе говоря, магнитный поток не зависит от формы поверхности, «натянутой» на контур  $\Gamma$ .



*Замечание.* Размерность магнитного потока в СИ  
 $1 \text{ Вб} = 1 \text{ Тл} \cdot 1 \text{ м}^2$ .

# Теорема Гаусса для магнитного поля в интегральной и дифференциальной формах

- *Дифференциальная форма*

Используя теорему Остроградского-Гаусса (для перехода от интеграла по поверхности к интегралу по объему)  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int \nabla \cdot \vec{B} \cdot d\vec{V}$  учетом (9), приходим к дифференциальной форме теоремы Гаусса для **B**:

Дивергенция вектора  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  индукции магнитного поля всюду (10) равна нулю, т.е. магнитное поле не имеет источников (в форме «сосредоточенных зарядов») и является **вихревым** (или соленоидальным) **полем**.

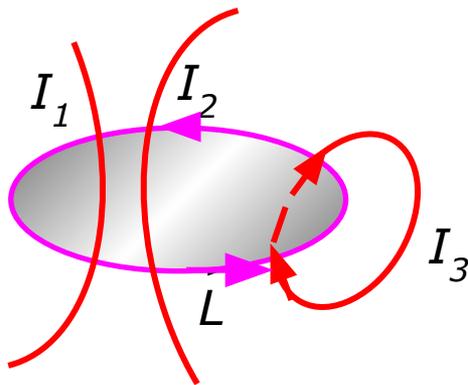
# Циркуляция и ротор вектора индукции магнитного поля

Магнитное поле, как и электрическое поле, обладает двумя важнейшими свойствами. Эти свойства связаны с понятиями «поток» и «циркуляция» вектора  $\mathbf{B}$  и выражают основные законы магнитного поля.

- *Вывод выражения для циркуляции вектора  $\mathbf{B}$*

Докажем, что: циркуляция вектора магнитной индукции по произвольному контуру  $L$  равна произведению алгебраической суммы токов, охватываемых контуром, на магнитную постоянную  $\mu_0$ . т. е.

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \cdot \sum_i I_i \quad (11)$$



При этом ток  $I_i$  в сумме считается положительным, если его направление связано с направлением обхода контура правилом «правого винта». Так на представленном рисунке токи  $I_1$  и  $I_3$  – положительные, а ток  $I_2$  – отрицательный.

# Циркуляция и ротор вектора индукции магнитного поля

- Вывод выражения для циркуляции вектора  $\mathbf{B}$

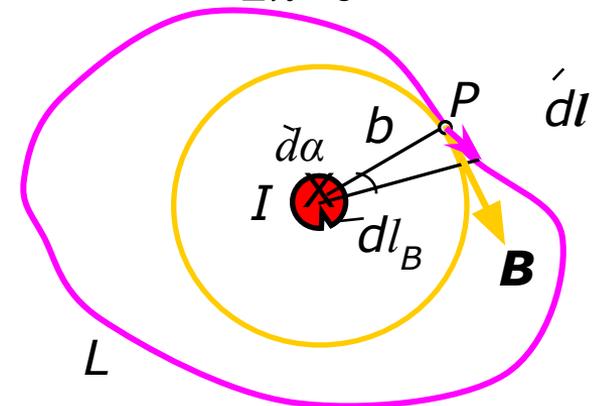
Выражение вида (11) получим исходя из закона Био-Савара для случая прямого тока. Пусть ток  $I$  направлен за плоскость рисунка. В каждой точке  $P$  контура  $L$  вектор  $\mathbf{B}$  направлен по касательной к окружности радиуса  $b$ , проходящей через эту точку. Заменим в выражении для циркуляции произведение  $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$  на  $B \cdot dl_B$  (здесь  $dl_B$  - проекция элемента контура  $d\mathbf{l}$  на направление  $\mathbf{B}$ ). Из рисунка видно, что  $dl_B \approx b \cdot d\alpha$  (так как  $d\mathbf{l}$ ,  $d\alpha$  - малы); тогда, подставив выражение для магнитного поля

прямого тока  $B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi b}$ , получаем  $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \cdot dl_B = \frac{\mu_0 b I}{2\pi b} d\alpha = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi} d\alpha$ , а последующее интегрирование

по  $\alpha$  в пределах  $[0; 2\pi]$  дает выражение для циркуляции

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} d\alpha = \mu_0 \cdot I,$$

что и требовалось доказать.



# Циркуляция и ротор вектора индукции магнитного поля

## ■ Ротор вектора $\mathbf{B}$

Если ток  $I$  в формуле (11) распределен по объему, где расположен контур  $L$ , то его можно представить через плотность тока  $\mathbf{j}$  как  $I = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$  (интеграл по поверхности  $S$ , ограниченной контуром  $L$ ). Тогда уравнение (11) принимает вид:

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \int_S j_n \cdot dS. \quad (12)$$

Преобразовав левую часть (12) по теореме Стокса (связь циркуляции вектора  $\mathbf{B}$  с потоком вектора-rot  $\mathbf{B}$ , т. е.  $\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S}$ ), получаем равенство:

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \int_S j_n \cdot dS$$

которое должно выполняться при произвольном выборе поверхности  $S$ , а это возможно только тогда, когда подынтегральные функции в каждой точке имеют одинаковые значения. Таким образом, получаем:

$$(\nabla \times \mathbf{B})_n = \mu_0 j_n \quad (11). \text{Замечание. } (\nabla \times \mathbf{B}) \equiv \text{rot } \mathbf{B}$$

# Циркуляция и ротор вектора индукции магнитного поля

- *Ротор вектора  $\mathbf{B}$*

Из (11) видно, что  $\text{rot } \mathbf{B}$  совпадает по направлению с вектором плотности тока  $\mathbf{j}$ .

Тот факт, что циркуляция  $\mathbf{B}$  (или  $\text{rot } \mathbf{B}$ ), вообще говоря, не равны нулю, означает, что магнитное поле – не потенциально (в отличие от электростатического поля, для которого  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ ). Такое векторное поле принято называть **вихревым** (или **соленоидальным**) **полем**.

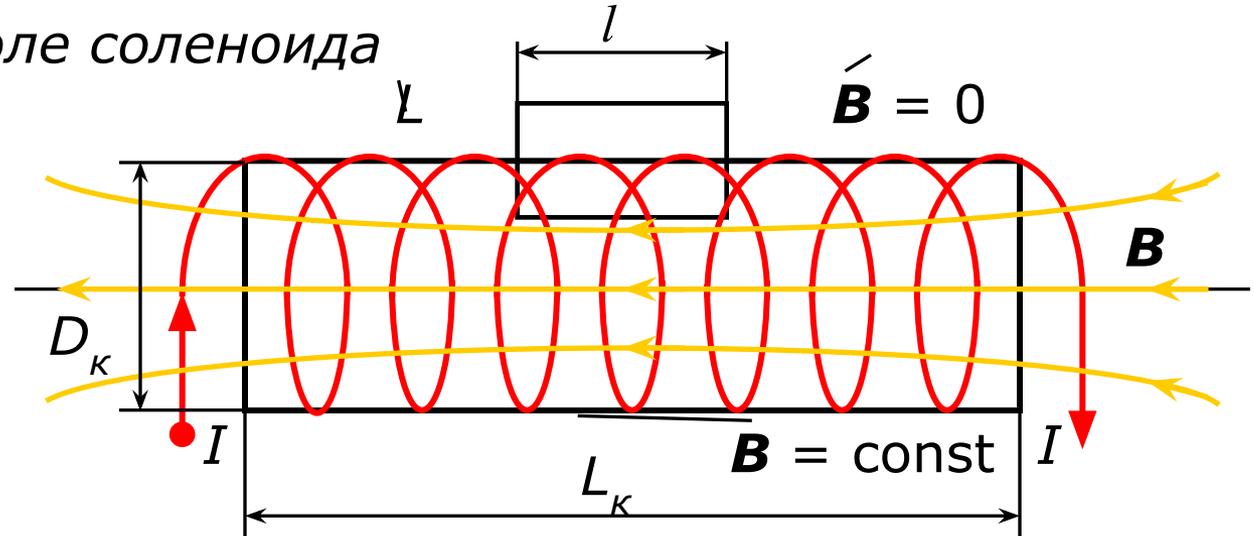
# Расчет магнитного поля соленоида и тороида

Выражение для циркуляции вектора  $\mathbf{B}$  (9) в магнитостатике играет примерно ту же роль, что и теорема Гаусса для вектора  $\mathbf{E}$  (или вектора  $\mathbf{D}$ ) в электростатике. Поле  $\mathbf{B}$  определяется всеми действующими в пространстве токами, а циркуляция  $\mathbf{B}$  – только теми токами, которые охватывает данный контур. Поэтому в ряде случаев (при наличии специальной симметрии у поля) выражение (9) оказывается весьма эффективным для расчета магнитной индукции. Это бывает оправдано, когда вычисление циркуляции  $\mathbf{B}$  можно свести, выбрав разумно контур  $L$ , к простому произведению индукции  $B$  (или проекции  $B_l$ ) на длину контура или его часть.

Если же это не удастся, то расчет  $\mathbf{B}$  ведут по закону Био-Савара с применением принципа суперпозиции.

# Расчет магнитного поля соленоида и тороида

- *Магнитное поле соленоида*



Пусть на единицу длины соленоида приходится  $n$ -витков провода с током  $I$ . Если шаг винтовой линии достаточно мал, то каждый виток можно приблизительно считать замкнутым витком с током  $I$  (как круговой ток). Будем также считать, что сечение провода очень мало, и ток в соленоиде течет по его наружной поверхности, т. е. по каркасу катушки  $D_K$ .

Опыт показывает, что чем длиннее соленоид ( $L_K \gg D_K$ ), тем меньше индукция магнитного поля снаружи. В пределе – **для бесконечно длинного соленоида** – снаружи  $B = 0$  и все поле сосредоточено внутри соленоида; причем силовые линии  $B$  внутри расположены равномерно и параллельно оси соленоида, т. е. поле в соленоиде однородно  $B = \text{const}$  при  $I = \text{const}$ .

# Расчет магнитного поля соленоида и тороида

- *Магнитное поле соленоида*

Поэтому, если выбрать контур в виде прямоугольника (см рис.) со стороной  $l$ , охватывающий ток  $(n \cdot I \cdot l)$ , то циркуляция  $\mathbf{B}$  в этом случае будет:  $B \cdot l = \mu_0 \cdot n \cdot I \cdot l$ . Отсюда получаем искомую индукцию в соленоиде:

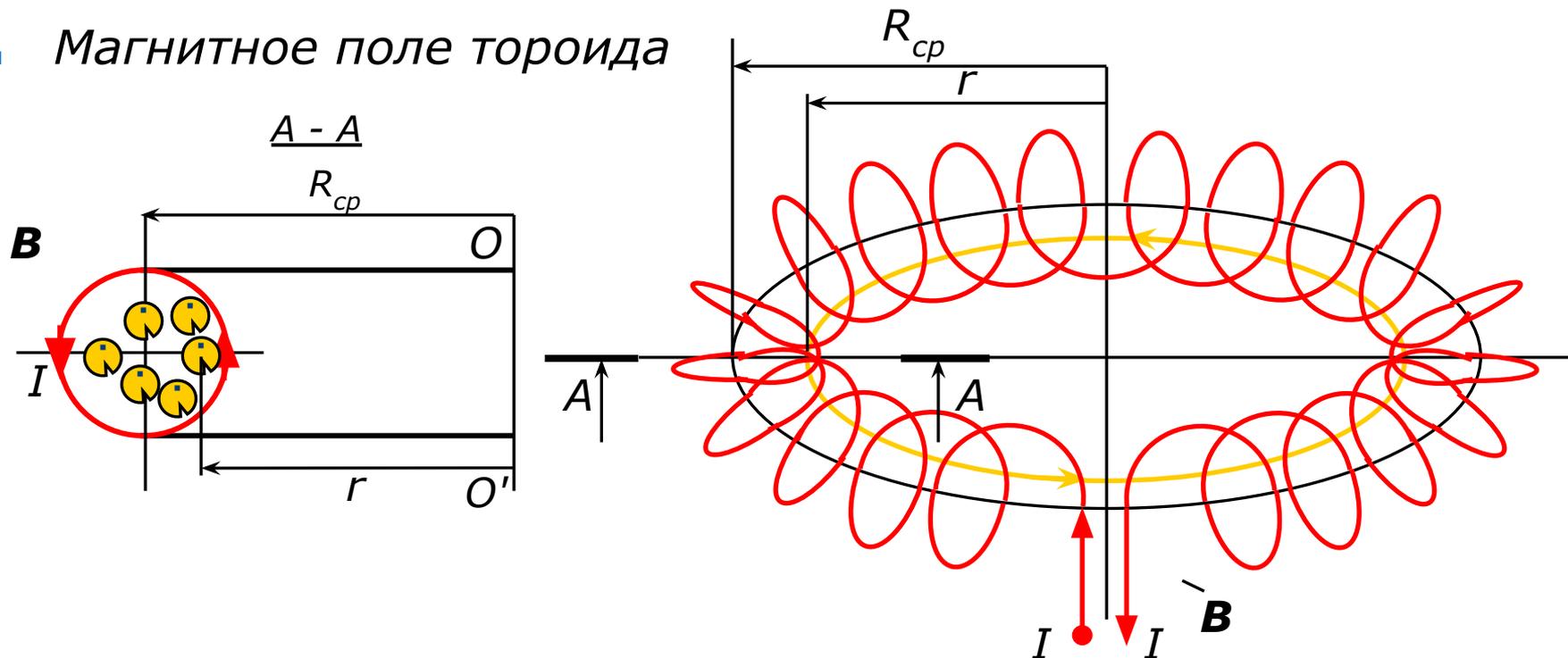
$$B = \mu_0 \cdot n \cdot I \quad (13)$$

- *Магнитное поле тороида*

Тороид представляет собой магнитную систему в форме катушки с проводом, плотно навитым на тороидальный каркас круглого сечения. Пусть  $R_{cp}$  – средний радиус тора,  $N$  – число витков в обмотке тороида,  $I$  – ток в обмотке, тогда из соображений симметрии следует, что линии магнитной индукции  $\mathbf{B}$  здесь будут представлять собой окружности с центрами на оси  $OO'$  тороида. Поэтому в качестве контура интегрирования следует выбрать одну из этих окружностей (с радиусом  $r$ ).

# Расчет магнитного поля соленооида и тороида

- *Магнитное поле тороида*



Такой контур охватывает общий ток величиной  $(N \cdot I)$ , а циркуляция  $\mathbf{B}$  в этом случае будет  $B \cdot 2\pi \cdot r = \mu_0 \cdot N \cdot I$ . Из последнего уравнения определяем искомое поле, которое из-за своей конфигурации принято называть азимутальным:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{N \cdot I}{r} \quad (14)$$

# Расчет магнитного поля соленоида и тороида

- *Магнитное поле тороида*

*Замечания:* Если круглый контур проходит вне тора (за пределами его сечения), то никаких токов он не охватывает, циркуляция  $B \cdot 2\pi \cdot r = 0$  и, следовательно, вне тороида  $B = 0$ .

Если устремить число витков  $N$  и радиус тора  $R_{cp}$  в бесконечность, то в пределе из формулы (13) получим выражение для поля соленоида, т. е.

$$B_{R \rightarrow \infty} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{N \cdot I}{R} \cong \mu_0 \cdot n \cdot I$$

Для реального тороида, у которого витки не параллельны оси  $OO'$ , образуется наряду с азимутальным еще и полоидальное поле.