

Теоретическая механика

Статика

Лекция № 5

5.1 Трение

Силы трения

С явлением трения мы знакомы с детства. В разных случаях мы говорим: «В походе не натрите ноги»; в школе — «Сотрите с доски записи».

- Первые исследования трения были проведены итальянским ученым Леонардо да Винчи более 400 лет тому назад, но результаты его работы не были опубликованы.
- Законы трения открыли французские ученые Гильом Амонтон (1699 г.) и Шарль Огюстен Кулон (1785 г.).

Гийом Амонтон



- **Guillaume Amontons**
- День рождения: **31.08.1663**
- Место рождения: **Париж,**
- Дата смерти: **11.10.1705**
- Место смерти: **Париж,**
- Гражданство:
- Французский физик и механик, член Французской академии наук (French Academy of Sciences), первооткрыватель концепции абсолютного нуля ($-273\text{ }^{\circ}\text{C}$); **один из основателей трибологии,** давший свое имя одному из физических явлений в области трения и изобретатель барометра.

Шарль Огюстен Кулон



- (1736-1806) — выдающийся французский инженер и физик, один из основателей электростатики. Исследовал деформацию кручения нитей, установил ее законы. Изобрел (1784) крутильные весы и открыл (1785) закон, названный его именем. Установил законы сухого трения. Экспериментальные исследования Кулона имели основополагающее значение для формирования учения об электричестве и магнетизме. Член Парижской академии наук.

Трибология - наука о трении

Трибология (от греч. *tribo* – растираю) - наука, занимающаяся изучением трения и износа узлов машин и механизмов. Результаты научной деятельности трибологов касаются явлений, возникающих при контакте двух перемещающихся относительно друг друга поверхностей. Как правило, целью трибологических исследований и разработок является уменьшение износа и предупреждение повреждений трущихся поверхностей путем применения соответствующих смазочных материалов и иными способами. Трибология граничит с такими смежными дисциплинами, как теоретическая механика, металловедение, сопротивление материалов, физика, химия и т.п.

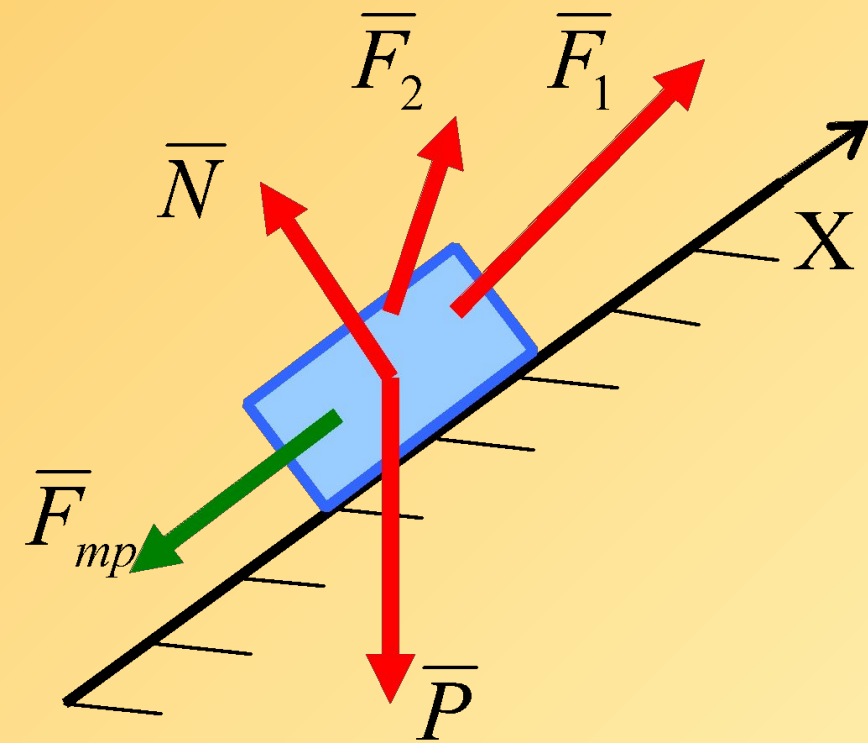
5.1.1 Трение скольжения

При стремлении сдвинуть одно тело по поверхности другого, в плоскости соприкосновения тел возникает сила сопротивления их относительному движению, называемая **силой трения скольжения**.

В теоретической механике рассматривается только **сухое трение**, когда между трущимися поверхностями отсутствует смазка.

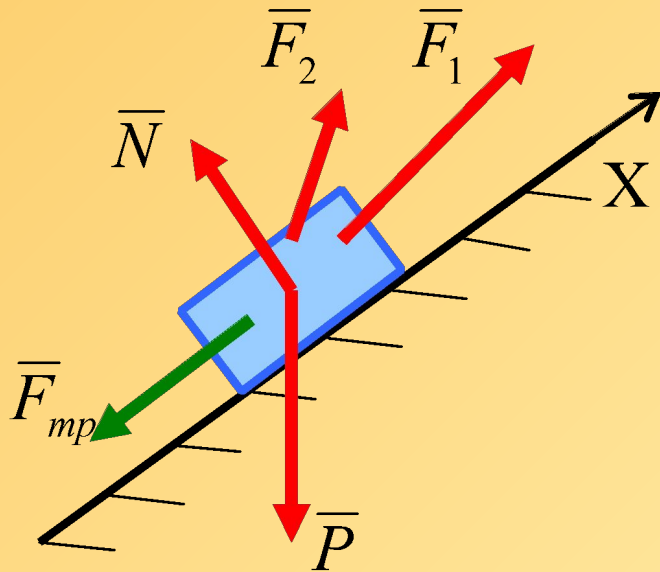
Различают силу трения скольжения **при покое** и **при движении**.

Законы трения скольжения (законы Амонтона-Кулона)



- **Сила трения** всегда направлена в сторону, **противоположную** возможному или реальному движению под действием приложенных сил.

Сила трения при покое



$$\sum F_X = 0; \Rightarrow$$

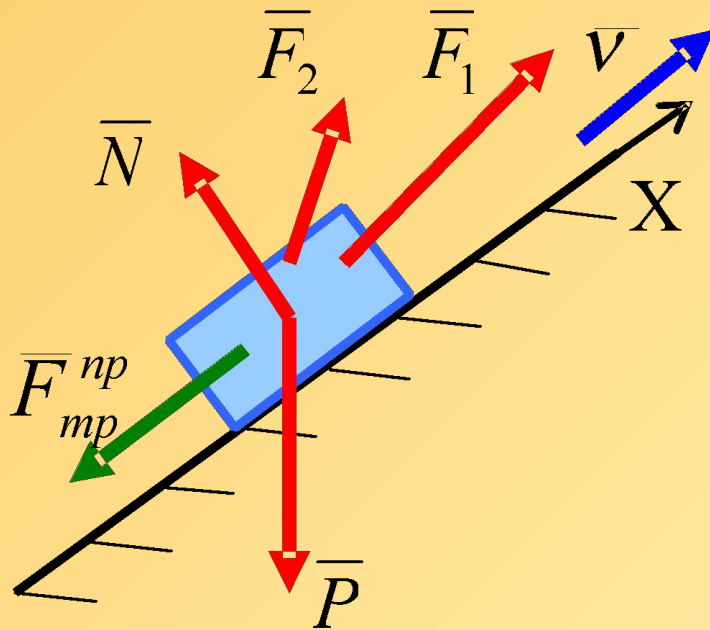
$$-F_{mp} + \sum F_{kX} = 0; \Rightarrow$$

$$F_{mp} = \sum F_{kX}; \Rightarrow$$

$$0 \leq |F_{mp}| \leq |F_{mp}^{np}|.$$

- **При покое** сила трения зависит от приложенных к телу сил, ее модуль заключен между нулем и предельным (max) значением, достигаемом в момент выхода из состояния покоя (в начале движения).

Сила трения при движении

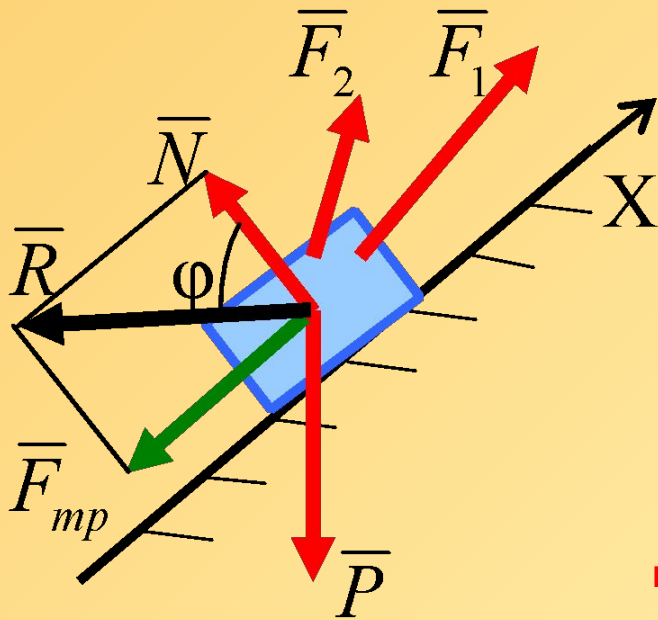


$$F_{тр}^{np} = fN$$

При движении предельная сила трения $\bar{F}_{тр}^{np}$ равна произведению коэффициента трения скольжения f на силу нормального давления N .

- Значение предельной силы трения $\bar{F}_{тр}^{np}$ в довольно широких пределах **не зависит от размеров** соприкасающихся при трении поверхностей.
- $\bar{F}_{тр}^{np}$ **от скорости зависит незначительно**. В приближенных расчетах принимают $\bar{F}_{тр}^{np} = const$.
- **Коэффициент трения скольжения f** определяют экспериментально, так как он зависит от материала и физического состояния трущихся поверхностей.

Угол трения



$$\bar{R} = \bar{F}_{mp} + \bar{N}$$

$$\bar{N} \leq \bar{R} \leq \bar{R}_{np}$$

$$0 \leq \varphi \leq \varphi_0$$

Угол φ_0 называют **углом трения**

- При движении:

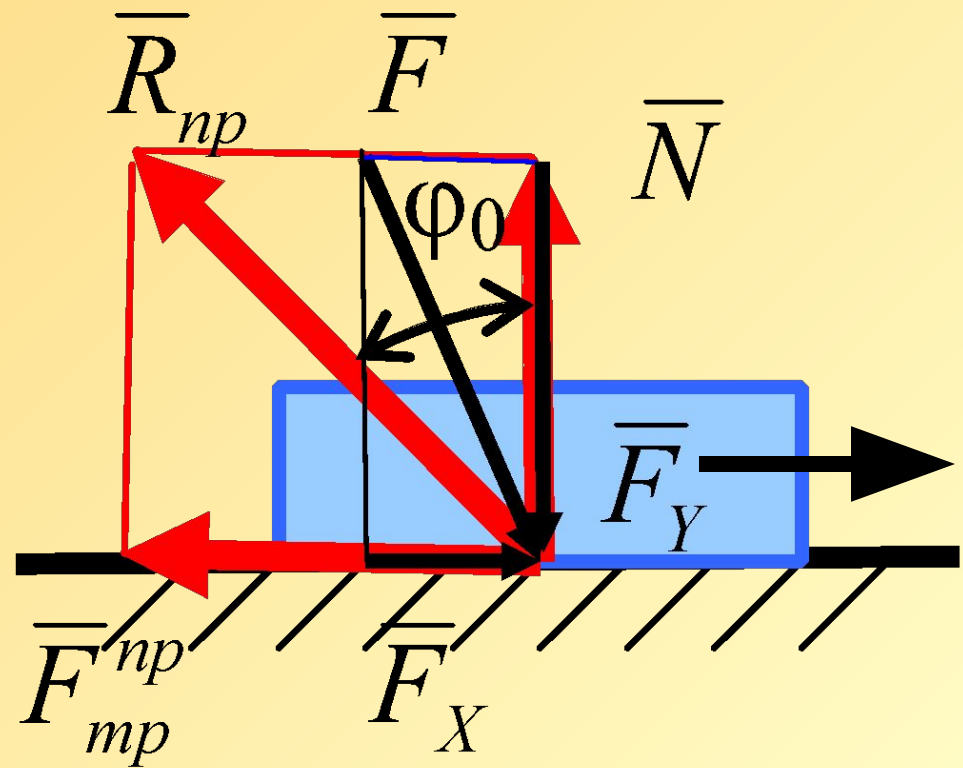
$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{F_{mp}^{np}}{N} = \frac{fN}{N} = f$$

Явление самоторможения (заклинивания)

- $\bar{F}_Y = \bar{N}$
(по закону равенства действия и противодействия, аксиома 5, §1)

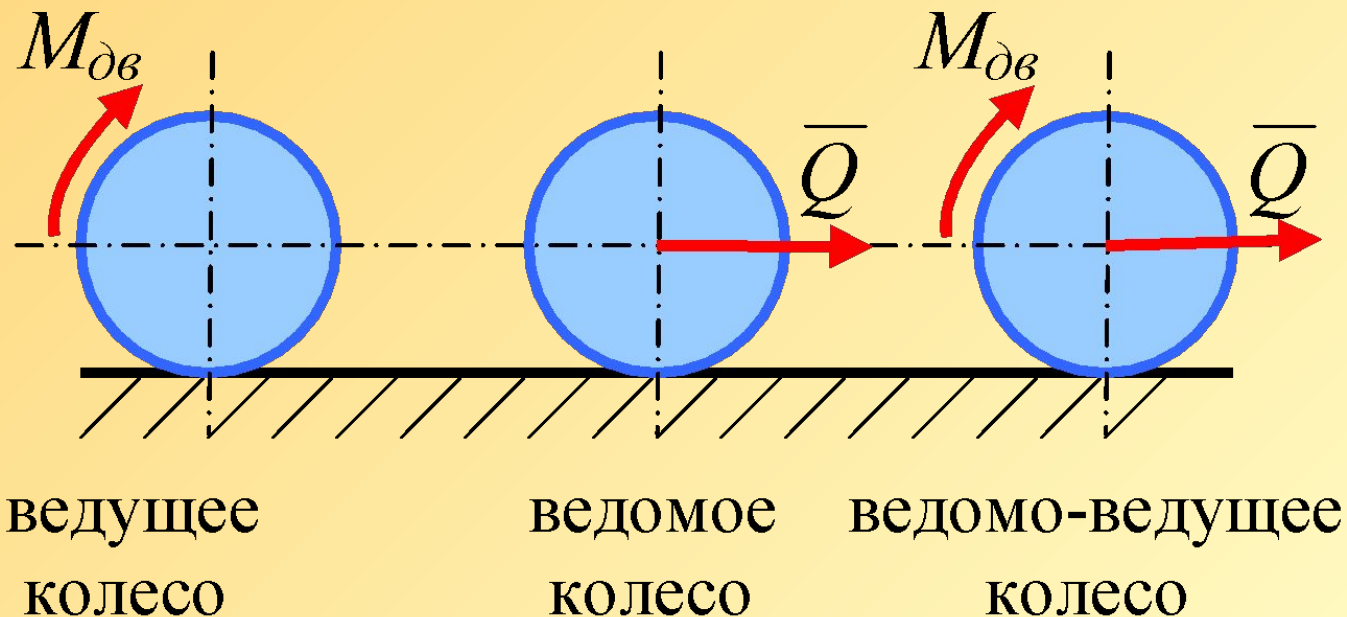
\bar{F}_X (сдвигающая сила) при $\varphi < \varphi_0$

всегда будет меньше предельной силы трения $\bar{F}_{тр}^{np}$



5.1.2 Трение качения

При качении жесткого колеса (катка) по мало деформируемой поверхности возникает **сила трения качения**. В зависимости от силдвигающих колеса различают: **ведущие, ведомые и ведомо-ведущие колеса**.



Ведомое колесо

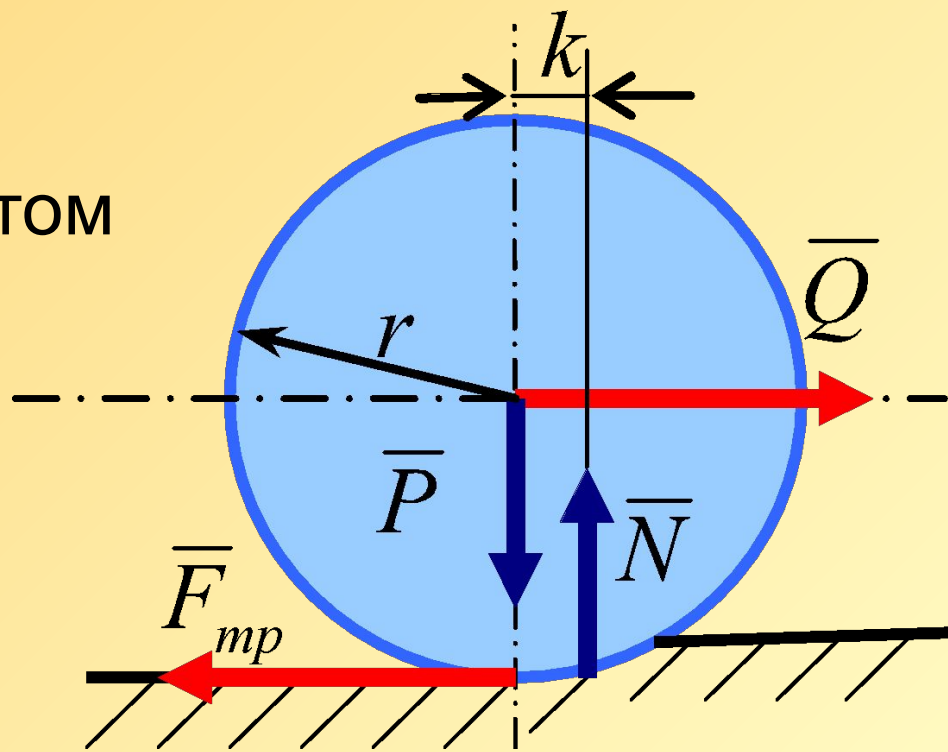
Движущая сила \bar{Q}

Сила трения \bar{F}_{mp} образует с силой \bar{Q}

движущую пару с моментом

$$\bar{M}_{дв} = Q \cdot r = F_{mp} \cdot r$$

\bar{N} смещается вперед на расстояние k см – это **коэффициент трения качения**



Пара сопротивления движению

$$M_C = N \cdot k \quad M_C = M_{дв}$$

$$F_{mp} = \frac{k}{r} N. \quad k/r \ll f$$

Ведущее колесо

Движущий момент

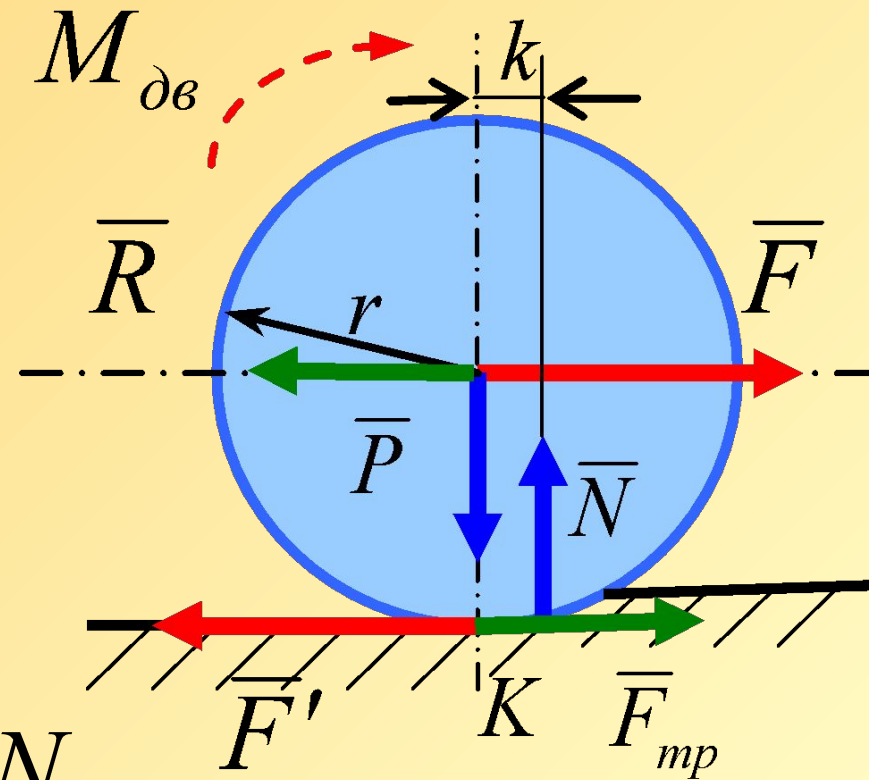
$$M_{\partial v} = Fr = F'r$$

направлена вперед по движению и образует вместе с силой сопротивления \bar{R} пару

$$M_{mp} = F_{mp} \cdot r$$

Пара сил \bar{P} и \bar{N} с моментом

$$M_C = k \cdot N$$



Качение колеса возможно, если

$$M_{дв} \geq (M_{тр} + M_C) \Rightarrow$$

$$F \cdot r \geq (f \cdot N \cdot r + k \cdot N) \Rightarrow$$

$$F \geq \left(F_{тр}^{np} + \frac{k}{r} N \right) \quad \text{так как } f \gg \frac{k}{r} \quad \text{то}$$

ведущее колесо **не буксует**, если $F \geq F_{тр}^{np}$

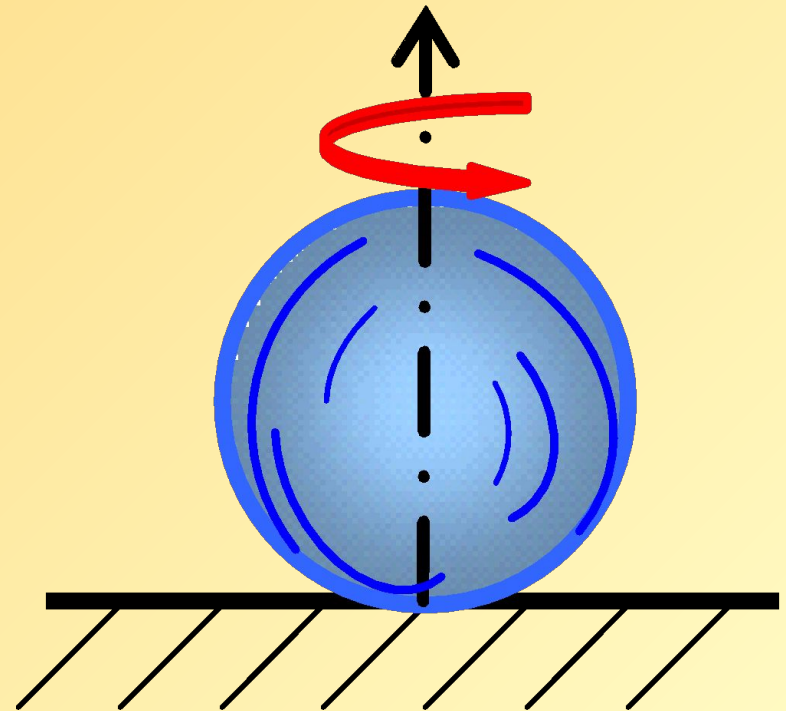
Законы трения качения:

- Сила трения качения равна $F_{mp} = \frac{k}{r} N$.
- Момент сил сопротивления $M_C = k \cdot N$ препятствующий качению жесткого колеса в широких пределах не зависит от радиуса колеса.
- Коэффициент трения качения k зависит от материала катка, плоскости соприкосновения, физического состояния поверхности.
- В первом приближении считают, что k зависит от угловой скорости колеса (катка) и скорости его скольжения по плоскости.
- Законы трения качения справедливы для не очень больших нормальных давлений и не слишком легко деформируемых материалов катка и поверхности.

5.1.3 Трение верчения

В случае, когда активные силы стремятся вращать тело (шар) вокруг нормали к общей касательной поверхности, возникает трение верчения.

Коэффициент трения верчения значительно меньше коэффициента трения качения



Коэффициент трения скольжения

Коэффициент трения качения (см.)

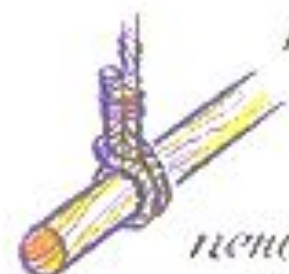
сталь / точильный камень



резина / гудрон



шина / сухой асфальт



пеньковый канат / дуб

шина / сухая шпательная



0,2 стальное колесо / деревянный настил



0,09



0,08 } деревянный каток / деревянный настил

0,07

0,06

0,05 ← стальное колесо / рельсы



0,04 } деревянное колесо / рельсы

0,03

0,02 ← шины / асфальт



0,01



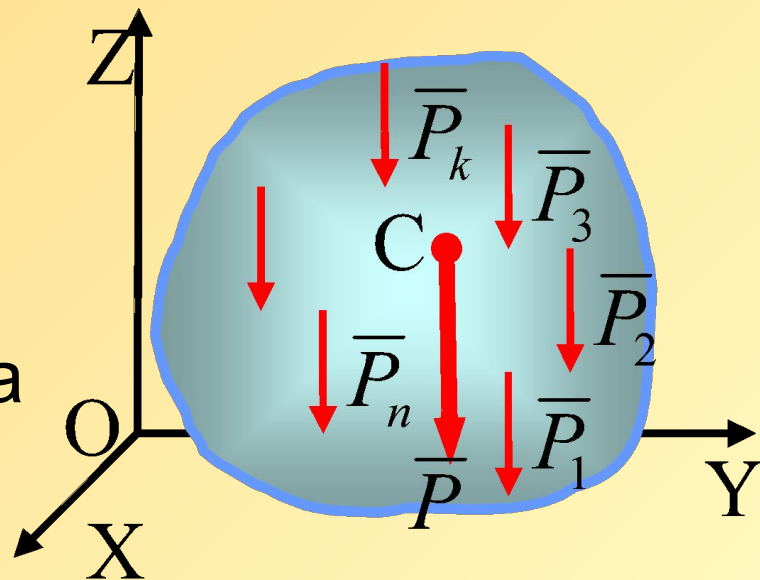
5.2 Центр тяжести твердого тела

Центр (точка C) системы параллельных сил тяжести $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_k, \dots, \bar{P}_n$ всех точек тела называется

центром тяжести твердого тела, а сумма сил тяжести всех его точек называется **силой**

тяжести, действующей на него

$$\bar{P} = \sum \bar{P}_k$$



Координаты центра тяжести твердого тела:

$$X_C = \frac{1}{P} \sum P_k \cdot X_k; \quad Y_C = \frac{1}{P} \sum P_k \cdot Y_k; \quad Z_C = \frac{1}{P} \sum P_k \cdot Z_k$$

Для однородного

тела:

$$X_C = \frac{1}{V} \sum V_k \cdot X_k; Y_C = \frac{1}{V} \sum V_k \cdot Y_k; Z_C = \frac{1}{V} \sum V_k \cdot Z_k$$

где V - объем всего тела;

V_k - объем k -й частицы.

Для однородной тонкой

пластины:

$$X_C = \frac{1}{S} \sum S_k \cdot X_k; Y_C = \frac{1}{S} \sum S_k \cdot Y_k,$$

где S - площадь пластины;

S_k - площадь k -ой части

пластины.

Для линии:

$$X_C = \frac{1}{L} \sum L_k \cdot X_k; Y_C = \frac{1}{L} \sum L_k \cdot Y_k; Z_C = \frac{1}{L} \sum L_k \cdot Z_k$$

где L - длина всей линии;

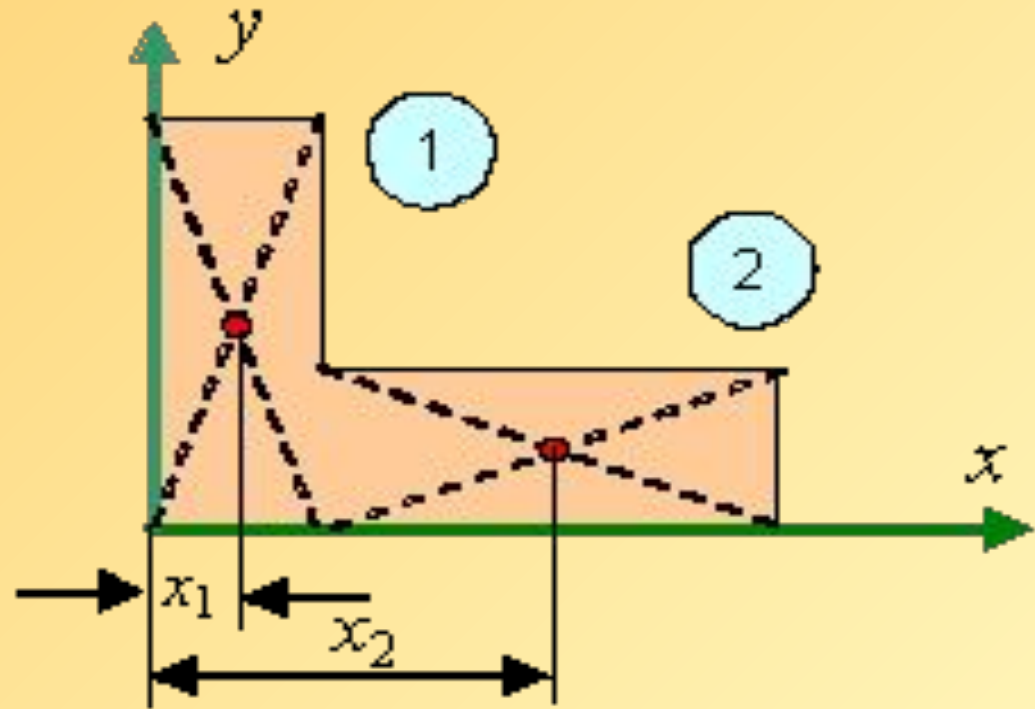
L_k - длина k -ой части

линии.

Способы определения координат центров тяжести тел:

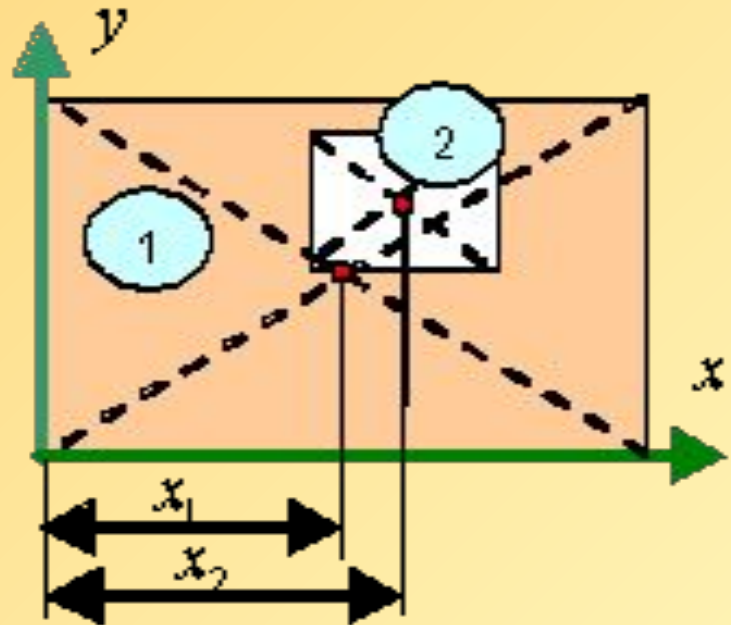
- **Теоретические:** симметрия; разбиение; дополнение; интегрирование.
- **Экспериментальные:** метод подвешивания; метод взвешивания.

1. Метод разбиения – сложная фигура разбивается на совокупность простых фигур, для которых известны положения центра тяжести или легко определяются:



$$x_C = \frac{\sum x_i S_i}{\sum S_i} = \frac{x_1 S_1 + x_2 S_2}{S_1 + S_2}$$

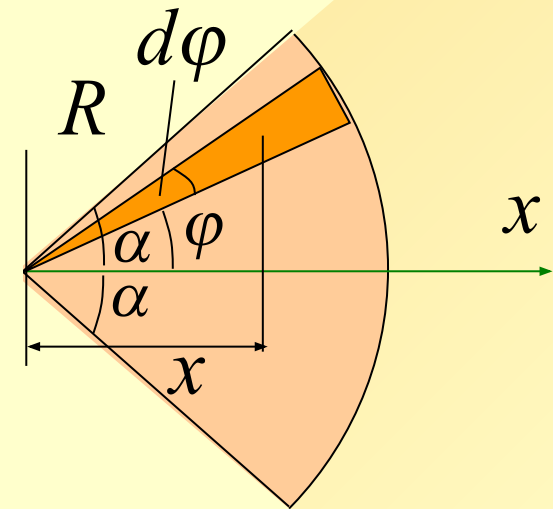
2. Метод отрицательных площадей – так же, как и в методе разбиения, сложная фигура разбивается на совокупность простых фигур, для которых известны положения центра тяжести или легко определяются, но при наличии отверстий или пустот удобно их представление в виде “отрицательных” областей.



Например, следующая фигура вместо разбиения на 4 обычных прямоугольника, может быть представлена как совокупность двух прямоугольников, один из которых имеет отрицательную площадь:

$$x_C = \frac{\sum x_i S_i}{\sum S_i} = \frac{x_1 S_1 + x_2 (-S_2)}{S_1 + (-S_2)}$$

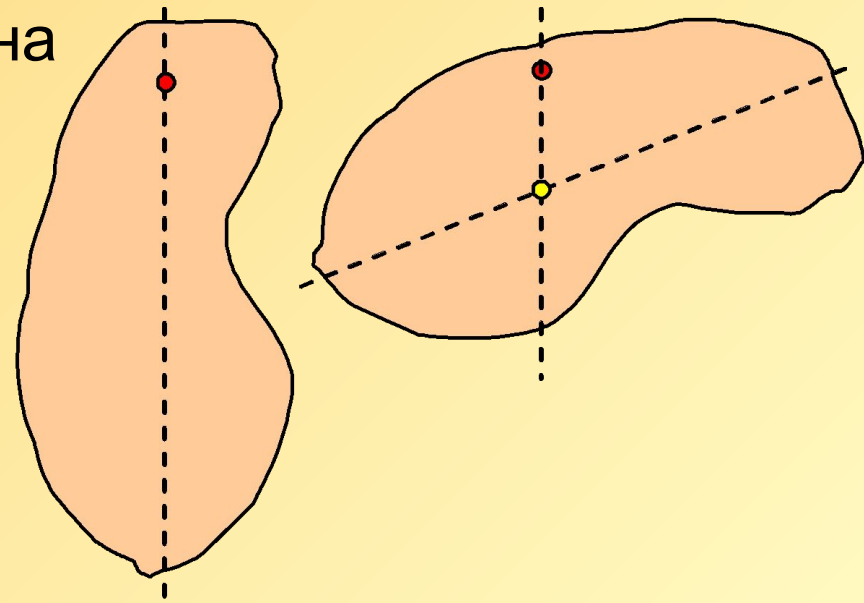
3. Метод симметрии – при наличии у фигуры оси или плоскости симметрии центр тяжести лежит на этой оси или в этой плоскости. С учетом этого свойства уменьшается количество координат центра тяжести, подлежащих определению. Например, определение положения центра тяжести кругового сектора.



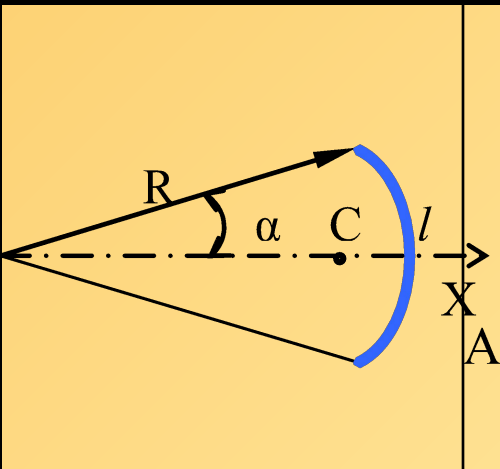
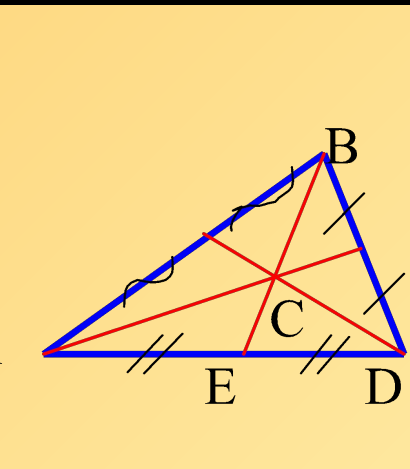
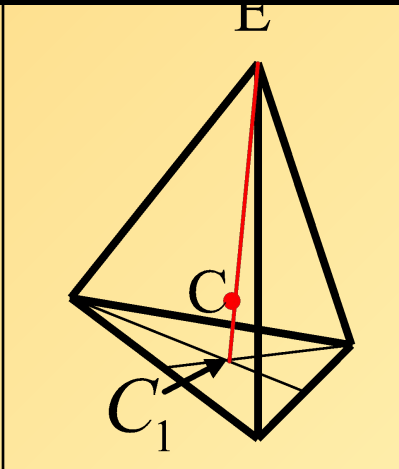
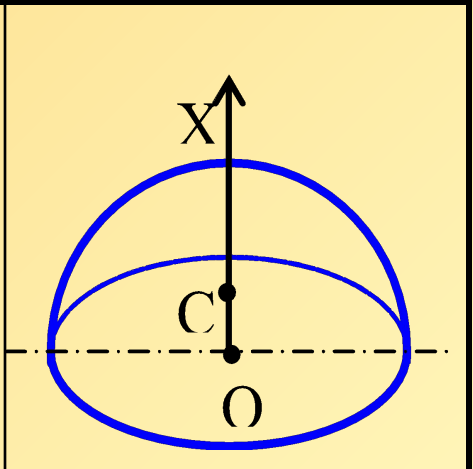
4. Метод интегрирования – при наличии у фигуры достаточно простого контура, описываемым известным уравнением (окружность, парабола и т.п.), выбирается элементарная площадка или полоска и выполняется аналитическое интегрирование. См. например, определение положения центра тяжести треугольника или кругового сектора. При более сложном контуре, который может быть разбит на более простые граничные отрезки используется предварительно метод разбиения. При сложностях с аналитическим интегрированием используются численные методы интегрирования.

5. Метод подвешивания –

экспериментальный метод, основанный на том, что при подвешивании тела или фигуры за какую-либо произвольную точку центр тяжести находится на одной вертикали с точкой подвеса. Для определения положения центра тяжести плоской фигуры достаточно ее подвесить поочередно за две любые точки и прочертить соответствующие вертикали, например, с помощью отвеса, и точка пересечений этих прямых соответствует положению центра тяжести фигуры.



Координаты центра тяжести однородных тел:

			
<p>Дуга окружности</p> $X_C = \frac{Rl \sin \alpha}{\alpha}$	<p>Площадь треугольника</p> $EC = \frac{BE}{3}$	<p>Объем пирамиды, конуса</p> $CC_1 = \frac{EC_1}{4}$	<p>Объем полушара</p> $X_C = OC = \frac{3R}{8}$

5.3 Статическая устойчивость

5.3.1 Устойчивость при опрокидывании

При равновесии

$$\sum M_A = 0; \Rightarrow G \cdot a - F \cdot d = 0;$$

$M_{уд} = G \cdot a$ - удерживающий момент;

$M_{опр} = F \cdot d$ - опрокидывающий момент.

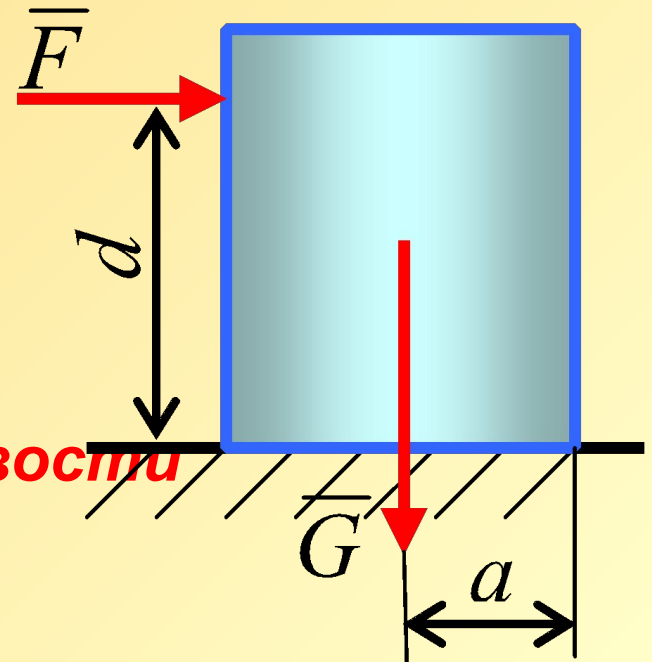
При устойчивом состоянии

$$M_{уд} > M_{опр}$$

На границе устойчивости

$$M_{уд} = M_{опр}$$

$$k = \frac{M_{уд}}{M_{опр}} - \text{коэффициент устойчивости}$$



5.3.2 Устойчивость трактора на склоне

$$M_{y\partial} = M_{\text{вр}} + G \cdot \cos \alpha \cdot X_C;$$

$$M_{\text{опр}} = k \cdot N + G \cdot \sin \alpha \cdot Y_C \quad M_{y\partial} > M_{\text{опр}}$$