Тепломассообмен 6

Нестационарная теплопроводность:

- Охлаждение (нагревание) пластины
- Охлаждение (нагревание) цилиндра
- Регулярный режим

Внутренняя задача

- Частный случай (*A*):

$Bi \to \infty$ (практически *Bi* >100): *Bi* – число (критерий) Био: соотношение конвективной теплоотдачи снаружи и теплопроводности внутри тела.

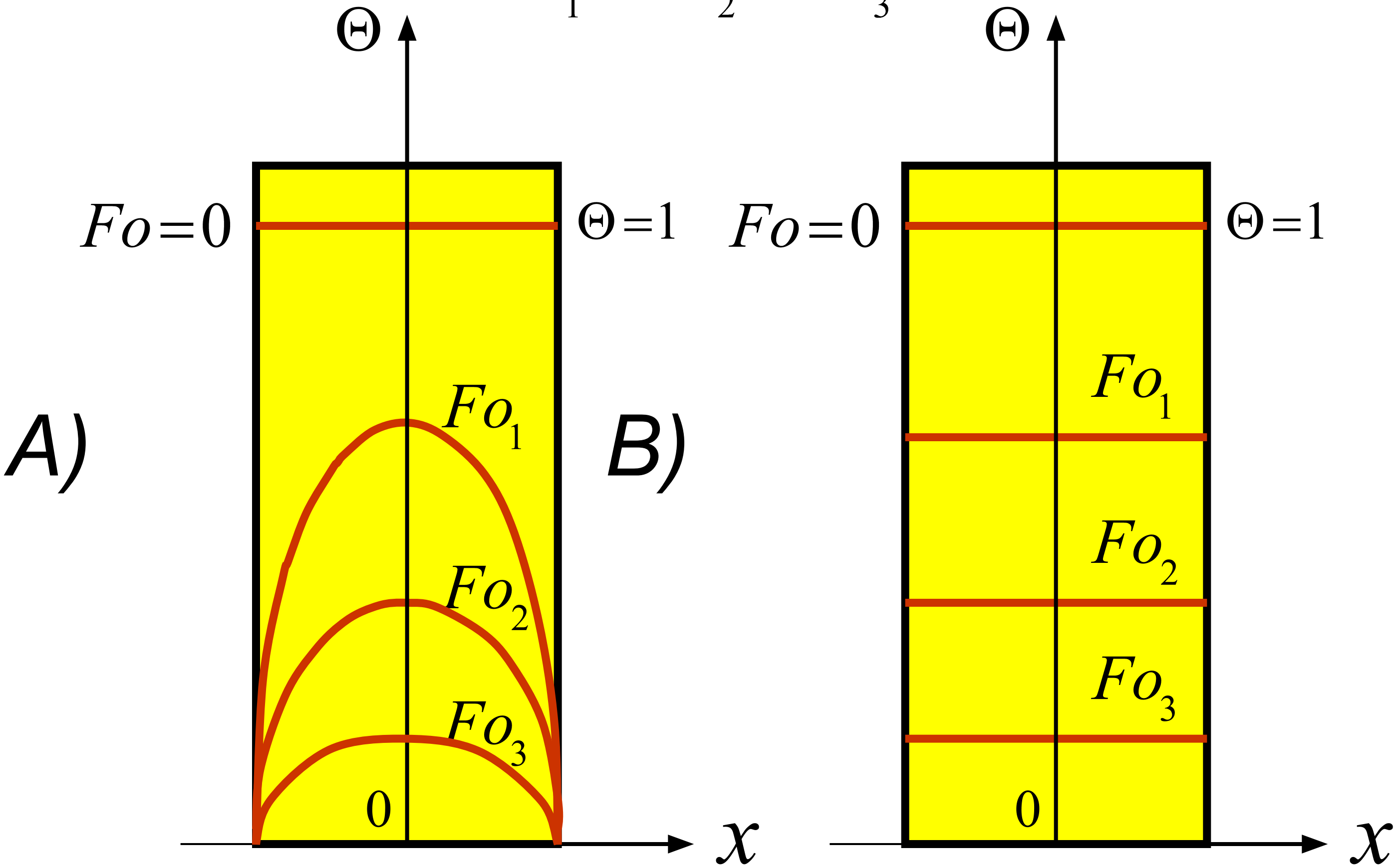
$$\boxed{(Bi = \frac{\delta/\lambda}{1/\alpha}) \to \infty; \frac{1}{\alpha} \to 0; \alpha \to \infty,}$$

В данном случае очень интенсивное наружное охлаждение, поэтому температура поверхности пластины, погруженной в жидкость, сразу становится равной температуре жидкости.

Распределение температур в пластине зависит от ее теплопроводности λ и геометрических размеров δ , то есть от условий внутри пластины (внутренняя задача).

A) Внутренняя задача $Bi \to \infty$
B) Внешняя задача $Bi \to 0$

$$Fo_1 < Fo_2 < Fo_3$$



Внешняя задача

- Частный случай *(В):*

$Bi \to 0$ (практически *Bi* < 0,1),

теплопроводность (λ) значительная.

$$\boxed{Bi = \left(\frac{\delta / \lambda}{1/\alpha}\right) \to 0; \alpha \to 0;}$$

Из-за высокого коэффициента теплопроводности пластины температуры в ней быстро выравниваются. Охлаждение слабое и все зависит от внешнего коэффициента конвективной теплоотдачи α (внешняя задача).

Обозначения: δ - половина толщины пластины, м;

λ - теплопроводность пластины, Вт/(мК);

α - коэффициент конвективной теплоотдачи, Вт/(м²К).

Средний случай

- Частный случай *(С):* $0{,}1 \le Bi \le 100.$

Интенсивность охлаждения зависит и от внутреннего термического сопротивления (δ/λ) и внешнего - $(1/\alpha)$.

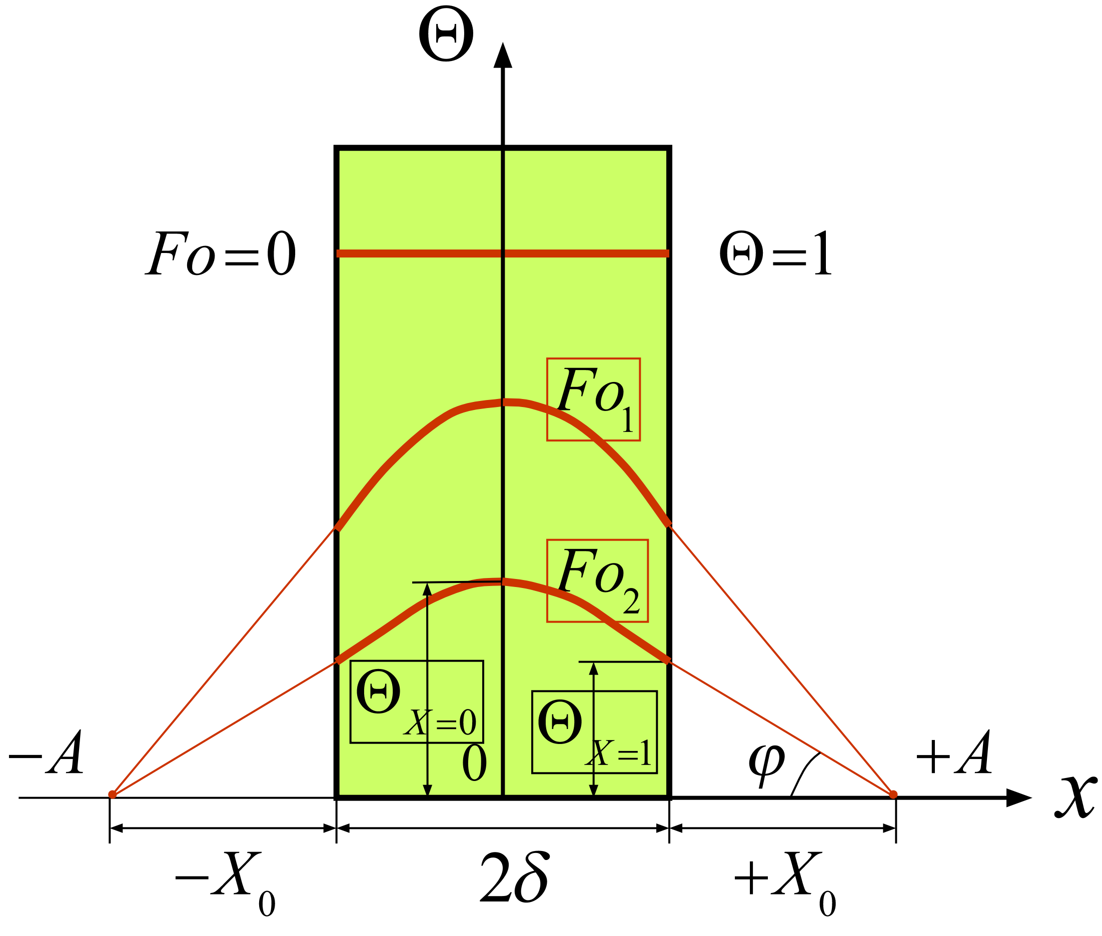
Распределение температур в пластине для этого случая показано на следующем слайде.

Из уравнения (13 ТМО 4) следует, что для любого момента времени τ распределение температур имеет вид симметричной кривой с максимумом на оси пластины *(X=0).*

Касательные к кривым в точках $X = \pm 1$ проходят через точки *+A* и *–A* на расстоянии $\pm X = 1/Bi$ и тангенс угла наклона этих касательных (см. следующий слайд).

$$tg\varphi = \frac{\Theta_{X=1}}{X_0}$$

Температурное поле в пластине



Теплота, отданная от пластины к жидкости

Теплота, отданная с обеих сторон пластины к окружающей ее жидкости за время от $\tau = 0$ до $\tau = \infty$, равна изменению внутренней энергии пластины, Дж: $\boxed{Q_n = 2\delta f \rho c (t_0 - t_{ж}),}$ (1)

где $2\delta f = V \rightarrow$ объем пластины, м³; $V\rho = m \rightarrow$ ее масса, кг;

δ - половина толщины пластины, м; f - ее поперечное сечение, м²; ρ - плотность материала пластины, кг/м³;

c – теплоемкость материала пластины, Дж/(кгК).

Тогда за любой промежуток времени от $\tau = 0$ до τ_1 или в безразмерной форме: (от *Fo = 0* до Fo_1).

За это время внутренняя энергия пластины изменится на, Дж:

$$Q = Q_n - Q_1 = 2\delta f \rho c (t_0 - t_{ж})\left(1 - \frac{t_1^{ср} - t_{ж}}{t_0 - t_{ж}}\right), \qquad (2)$$

Средняя по толщине пластины безразмерная избыточная температура

или

$$Q = Q_n(1 - \Theta_1^{cp}), \quad (3)$$

где $\boxed{\Theta_1^{cp} = \dfrac{t_1^{cp} - t_{ж}}{t_0 - t_{ж}} \rightarrow}$ средняя по толщине пластины безразмерная избыточная температура в момент времени τ_1.

В соответствии с теоремой о среднем, средняя безразмерная избыточная температура пластины найдется как:

$$\Theta^{cp} = \frac{1}{X}\int_0^X \Theta\, dx, \quad (4)$$

где Θ по уравнению (13 ТМО 4), тогда при $Fo \geq 0{,}3$ можно ограничиться только первым членом ряда, то есть:

$$\Theta_1^{cp} = \frac{2\sin^2 \mu_1}{\mu_1^2 + \mu_1 \sin\mu_1 \cos\mu_1} \exp(-\mu_1^2 Fo). \quad (5)$$

Охлаждение (нагревание) бесконечного цилиндра

Бесконечный цилиндр $(\ell >> 2r_0)$ радиусом r_0 отдает теплоту окружающей его жидкости при:

$$\alpha = Const; t_{ж} = Const; \quad \tau = 0 \rightarrow t = t_0 = Const.$$

Дифференциальное уравнение теплопроводности в полярных (цилиндрических) координатах для бесконечного цилиндра:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \theta}{\partial r}\right). \quad (26)$$

Начальные условия: при $\boxed{\tau = 0; 0 \le r \le r_0 \rightarrow \theta = \theta_0 = t_0 - t_{ж} = Const}$

Граничные условия: при $r = 0; \tau > 0 \rightarrow \left(\frac{\partial \theta}{\partial r}\right)_{r=0} = 0;$

$$r = r_0; \tau > 0 \rightarrow \left(\frac{\partial \theta}{\partial r}\right)_{r=r_0} = -\frac{\alpha}{\lambda}\theta_{r=r_0}.$$

Числа подобия для охлаждения (нагревания) цилиндра

Решение в общем виде: $\boxed{\Theta = f(R, Bi, Fo),}$ (8)

где $R = \dfrac{r}{r_0} \rightarrow$ безразмерный радиус цилиндра;

$Bi = \dfrac{\alpha r_0}{\lambda} \rightarrow$ число (критерий) Био, который представляет собой соотношение конвективной теплоотдачи снаружи и теплопроводности внутри цилиндра.

$Fo = \dfrac{a\tau}{r_0^2} \rightarrow$ число (критерий) Фурье – безразмерное время.

По аналогии с пластиной, при $Bi \rightarrow 0$ (практически при *Bi* <0,1) степенные ряды становятся настолько быстро сходящимися, что можно ограничиться только первым членом ряда μ_1.

Безразмерные избыточные температуры

Безразмерные избыточные температуры:

- на оси цилиндра $\Theta_{R=0} = N_0(Bi)\exp(-\mu_1^2 Fo);$ (9)
- на поверхности цилиндра $\Theta_{R=1} = P_0(Bi)\exp(-\mu_1^2 Fo).$ (10)

Функции $N_0(Bi); P_0(Bi)$ табулированы и приведены в справочниках.

По аналогии с бесконечной пластиной зависимости (9) и (10) линейные в логарифмических координатах и по ним можно найти:

$$\Theta_{r=0} = \frac{t_{r=0} - t_{ж}}{t_0 - t_{ж}};\Theta_{r=r_0} = \frac{t_{r=r_0} - t_{ж}}{t_0 - t_{ж}},$$

или в безразмерном виде, по графикам:

$$\Theta_{R=0} = \Phi_1(Bi, Fo);\Theta_{R=1} = \Phi_2(Bi, Fo).$$

Теплота, отданная от цилиндра к окружающей его жидкости

Теплота, отданная цилиндром за время от $\tau = 0$ до $\tau = \infty$, равна изменению внутренней энергии цилиндра, Дж:

$$Q_ц = \pi r_0^2 \ell \rho c (t_0 - t_ж), \quad (11)$$

а за время от $\tau = 0$ до $\tau = \tau_1$: $Q = Q_ц (1 - \Theta_1^{ср}), \quad (12)$

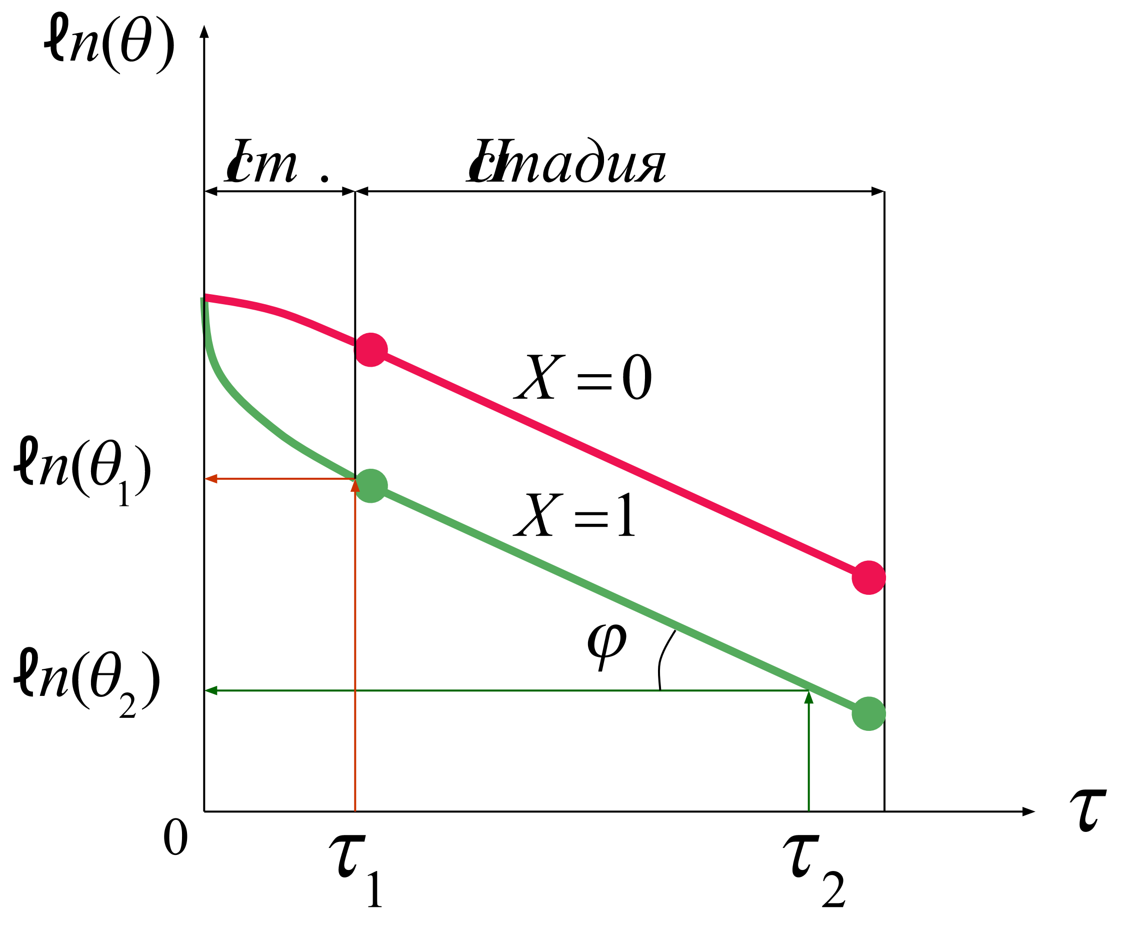
где $\Theta_1^{ср} = \dfrac{t_1^{ср} - t_ж}{t_0 - t_ж} \rightarrow$ средняя по цилиндру безразмерная избыточная температура в момент времени τ_1.

При $Fo \geq 0,25$:

$$\Theta_1^{ср} = \frac{4Bi^2}{\mu_1^2(\mu_1^2 + Bi^2)} \exp(-\mu_1^2 Fo). \quad (13)$$

Аналогично есть решение и для охлаждения (нагревания) шара.

Регулярный режим охлаждения



Регулярный режим охлаждения (нагревания) тел

Анализ решений для охлаждения (нагревания) тел разной формы показывает, что все они представляют сумму бесконечного ряда, члены которого соответствуют быстро убывающим экспоненциальным функциям.

Например, для бесконечной пластины

при $\alpha = Const; t_{ж} = Const$ было получено:

$$\boxed{\theta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) e^{-\mu_n^2 \frac{a\tau}{\delta^2}}, \quad (1)}$$

где $A_n \rightarrow$ константа для каждого члена ряда, которая находится из начальных условий.

Множитель $\cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) = U_n$ зависит только от координаты *X*.

I – неупорядоченная стадия охлаждения

Комплекс $\frac{\mu_n^2 a}{\delta^2} = m_n \to$ является постоянным, положительным, вещественным числом: $m_1 < m_2 < m_3 < \ldots < m_n$, где $n = 1,2,3,\ldots$

Тогда уравнение (1) запишется в виде:

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n U_n e^{-m_n \tau}. \quad (2)$$

Уравнение (2) справедливо для тел разной геометрии, которая учитывается видом сомножителей A_n, U_n.

При малых значениях времени от $\tau = 0$ до $\tau = \tau_1$ изменение температур зависит от начального распределения температур в теле.

В этом случае поле температур будет определяться не только первым, но и последующими членами ряда (2) «I – неупорядоченная стадия охлаждения».

II стадия охлаждения – регулярный режим

Но начиная с некоторого момента времени $\tau > \tau_1$ начальные условия играют второстепенную роль, процесс определяется интенсивностью охлаждения и физическими свойствами тела.

Тогда температурное поле достаточно точно описывается только первым членом ряда «II стадия охлаждения – регулярный режим»,

для которого:

$$\theta = A_1 U_1 e^{-m_1 \tau} \quad (3)$$

Логарифмируя (3) и опуская индексы, получим:

$$\ell n\theta = -m\tau + \ell n(AU), \quad \text{или} \quad \ell n\theta = -m\tau + c(x, y, z), \quad (4)$$

то есть в полулогарифмических координатах эта зависимость – прямолинейная.

III стадия охлаждения – стационарный режим

При длительном охлаждении ($\tau \to \infty$ или $Fo \to \infty$) все точки тела принимают одинаковую температуру, равную температуре окружающей жидкости $t_{ж}$.

Это III стадия охлаждения – стационарный режим.

Для регулярного режима после дифференцирования уравнения (2) имеем:

$$\frac{1}{\theta}\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = -m = Const, \qquad (5)$$

то есть относительная скорость изменения температуры равняется константе *«m»,* не зависящей от координат и времени.

«m», 1/с – темп охлаждения.

Темп охлаждения

Если есть экспериментальный график изменения избыточной температуры тела во времени (см. слайд 13), то темп охлаждения в стадии регулярного режима, 1/с:

$$m = \frac{\ell n\theta_1 - \ell n\theta_2}{\tau_2 - \tau_1} = tg\varphi. \quad (6)$$

Зависимость темпа охлаждения от физических свойств тела, его геометрии, размеров и условий теплообмена на поверхности можно найти из теплового баланса.

Изменение внутренней энергии тела, Дж:

$$dQ = -c\rho V \frac{\partial\theta_v^{cp}}{\partial\tau} d\tau, \quad (7)$$

где $\theta_v^{cp} \rightarrow$ средняя по объему избыточная температура, К.

Теплота (7) отдается от поверхности тела к окружающей его жидкости.

Первая теорема Кондратьева

По уравнению конвективной теплоотдачи, Дж:

$$dQ = \alpha^{cp}\theta_F^{cp} F d\tau. \quad (8)$$

Здесь $\theta_F^{cp} \rightarrow$ средняя по поверхности избыточная температура; $\alpha^{cp} \rightarrow$ средний коэффициент теплоотдачи.

Приравнивая (7) и (8) с учетом того, что $c\rho V = C$ – полная теплоемкость тела, Дж/кг; $\theta_F / \theta_v = \psi \rightarrow$ коэффициент неравномерности распределения температуры в теле, имеем:

$$-\frac{1}{\theta_v^{cp}}\frac{\partial\theta_v^{cp}}{\partial\tau} = m = \psi\frac{\alpha^{cp}F}{C}, \quad (9)$$

то есть при $\alpha^{cp} = Const$ темп темп охлаждения однородного изотропного тела (относительная скорость охлаждения) пропорционален коэффициенту теплоотдачи, поверхности тела и обратно пропорционален его полной теплоемкости (первая теорема Кондратьева).

Коэффициент неравномерности распределения температуры

Итак коэффициент неравномерности распределения температуры в теле из (9):

$$m = \psi(1\;0)\frac{\alpha^{cp}}{C}.$$

Как же он зависит от числа Био?

А) $Bi \to 0$

(практически *Bi* < 0,1) – внешняя задача: распределение температур не зависит от геометрических размеров тела и его физических свойств

$$\boxed{\theta_F^{cp} = \theta_v^{cp} \to \psi = \frac{\theta_F^{cp}}{\theta_v^{cp}} = 1.}$$

Диапазон изменения коэффициента ψ

в) $Bi \to \infty$

(практически *Bi* > 100) – внутренняя задача:

распределение температур зависит только от геометрических размеров тела и его физических свойств.

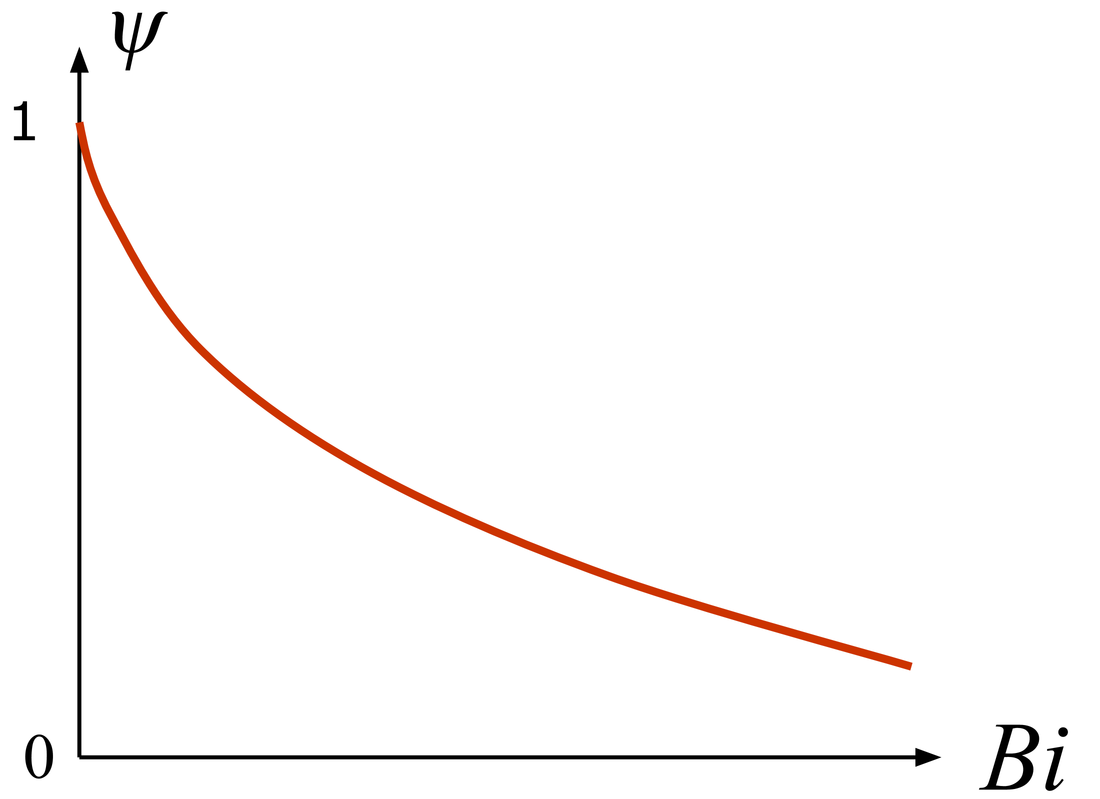
Из-за высокого внешнего коэффициента теплоотдачи

$$\boxed{\alpha \to \infty; t^{\cdot}_{\text{ж}} = t \;\; ; \psi = 0}$$

Следовательно, в общем случае, коэффициент ψ будет изменяться от (1 при *Bi* = 0) до (0 при *Bi* = ∞).

См. следующий слайд.

Зависимость $\psi = f(Bi)$



Вторая теорема Кондратьева

При $Bi \to \infty; (\alpha^{cp} \to \infty)$ темп охлаждения тела *«m»* становится пропорциональным его коэффициенту температуропроводности "a"
(вторая теорема Кондратьева)

$$\boxed{a = km_{\infty}.} \qquad (11)$$

Коэффициент пропорциональности зависит только от геометрии и размеров тела.

Для бесконечной пластины:

$$m = \frac{\mu^2 a}{\delta^2} \to \mu = \delta\sqrt{\frac{m}{a}}, \qquad (12)$$

где $\delta \to$ половина толщины пластины,
тогда с учетом того, что: $\Longrightarrow$ $ctg\,\mu = \frac{\mu}{Bi},$
получим:

$$\boxed{\begin{array}{l} Bi \to \infty; ctg\,\mu \to 0; \mu \to \pi/2; \\ Bi \to 0; ctg\,\mu \to \infty; \mu \to 0 \end{array}}$$

то есть в диапазоне *Bi* = 0 - ∞:

$$\mu = 0 - \pi/2$$

Регулярные режимы I, II, III родов

При $Bi \to \infty$ (практически при Bi>100) из (12) для

$\mu = \pi / 2$: $m = (\pi / 2\delta)^{-2} a$, то есть $a = (\pi / 2\delta)^{-2} m_{\infty} = k m_{\infty}$ (13)

откуда: $k = (\pi / 2\delta)^{-2}$

- коэффициент пропорциональности для пластины.

Есть также свои выражения для цилиндра и шара.

На основе теории регулярного режима разработаны экспериментальные методы определения теплопроводности и коэффициентов температуропроводности тел.

При: $t_{ж} = Const$ - регулярный режим I рода;

$t_{ж} = t_{ж0} + b\tau$ - регулярный режим II рода;

$t_{ж} = t_{ж0} + t_{m} \cos(\pi \nu \tau)$ - регулярный режим III рода (ν - частота и t_m - амплитуда колебаний температуры жидкости).