Дифференциальные уравнения

- Определение дифференциального уравнения (ДУ). Общее и частное решение ДУ. Задача Коши.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

- ДУ с разделяющимися переменными. Алгоритм решения.
- Однородные ДУ. Алгоритм решения.
- Линейные ДУ. Алгоритм решения методом Бернулли
- ДУ Бернулли. Алгоритм решения.
- ДУ в полных дифференциалах. Алгоритм решения.

Дифференциальные уравнения

Определение

Уравнение, связывающее независимую переменную x с неизвестной функцией y(x) и ее производными до некоторого порядка n включительно, называется дифференциальным уравнением n-ого порядка.

Примеры

дифференциальное уравнение

1-ого порядка	2-ого порядка	3-его порядка
$y' + 2y = x^2$	$y'' = xy$	$y''' + 2y' = 0$

Дифференциальные уравнения

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

ОБЫКНОВЕННОЕ	В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ
искомая функция зависит от одной переменной	искомая функция зависит от нескольких переменных

Будем рассматривать обыкновенные дифференциальные уравнения

Дифференциальные уравнения

ОБЩИЙ ВИД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ n-ОГО ПОРЯДКА

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

F – некоторая функция от n+2 переменных, $n \geq 1$

x – независимая переменная, y(x) – искомая функция,

$y'(x), ..., y^{(n)}(x)$ - ее производные

Определение

Дифференциальное уравнение n-ого порядка называется разрешенным относительно старшей производной, если оно имеет вид:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$$

Дифференциальные уравнения

Определение

Решением дифференциального уравнения (1) называется функция y(x), имеющая производные до n-ого порядка включительно, и такая, что ее подстановка в уравнение (1) обращает его в тождество

Пример

Решением уравнения $y' = 2y$ является функция $y(x) = e^{2x}$

$$y' = (e^{2x})' = 2e^{2x}$$

$$y = e^{2x}$$

$$\Rightarrow 2e^{2x} = 2e^{2x}$$

Пример

$$\boxed{y'' = x}$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} \Rightarrow \frac{dy'}{dx} = x \Rightarrow dy' = xdx \Rightarrow y' = \frac{x^2}{2} + c_1$$

$$y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2} + c_1 \Rightarrow dy = \frac{x^2}{2}dx + c_1 dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2$$ - общее решение

$$c_1 = const, c_2 = const$$

$$c_1 = 2, c_2 = 3 \Rightarrow y = \frac{x^3}{6} + 2x + 3$$ - частное решение

Дифференциальные уравнения

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ИМЕЕТ БЕСКОНЕЧНОЕ МНОЖЕСТВО РЕШЕНИЙ

Общее решение дифференциального уравнения зависит от произвольных постоянных, число которых равно порядку дифференциального уравнения

Частное решение дифференциального уравнения получается из общего путем придания конкретных значений произвольным постоянным

Дифференциальные уравнения

Задача о нахождении решения некоторого дифференциального уравнения называется **задачей интегрирования** данного дифференциального уравнения

График решения дифференциального уравнения называется **интегральной кривой**

Определение

Общим решением дифференциального уравнения (1)

n-ого порядка называется такое его решение

$$y = \varphi(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

которое является функцией переменной x и n $c_1, c_2, \ldots, c_n$

произвольных независимых постоянных

Пример

Из статистических данных известно, что для некоторого региона число новорожденных и число умерших за единицу времени пропорциональны численности населения с коэффициентами пропорциональности k_1 и k_2 соответственно.

<u>Найти</u> закон изменения численности населения с течением времени (то есть описать протекание демографического процесса)

Решение

Пусть y=y(t) – число жителей региона в момент времени t.

Число родившихся в момент времени t равно k1y, а число умерших равно k2y

Тогда прирост населения Δy за время Δt равен разности между числом родившихся и умерших за это время: $\Delta y = k_1 y\Delta t - k_2 y\Delta t = (k_1 - k_2)y\Delta t$

Обозначим $k = k_1 - k_2 \Rightarrow \Delta y = ky\Delta t$ или $\dfrac{\Delta y}{\Delta t} = ky$

Решение

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$ получим уравнение $y' = ky$

Решим это уравнение:

$$\frac{dy}{dt} = ky \Rightarrow \frac{dy}{y} = kdt \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int kdt \Rightarrow \ln|y| = kt + c_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|y| = kt + \ln|c| \Rightarrow e^{\ln|y|} = e^{kt + \ln|c|} \Rightarrow y = ce^{kt}$$

С – постоянная, определяемая начальным условием (численностью населения в начальный момент времени) $y(0) = M \Rightarrow y(t) = Me^{kt}$

Дифференциальные уравнения

Определение

Отыскание частного решения дифференциального уравнения (1) n-ого порядка, удовлетворяющего n начальным условиям вида: $y(x_0) = y_0$

$$y'(x_0) = y_0{}^1$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

называется **задачей Коши** $y^{(n-1)}(x_0) = y_0{}^{(n-1)}$

По n начальным условиям определяются значения всех n произвольных постоянных, входящих в общее решение диффер. уравнения n –ого порядка

Дифференциальные уравнения 1 порядка

ОБЩИЙ ВИД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ 1-ОГО ПОРЯДКА

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (2)$$

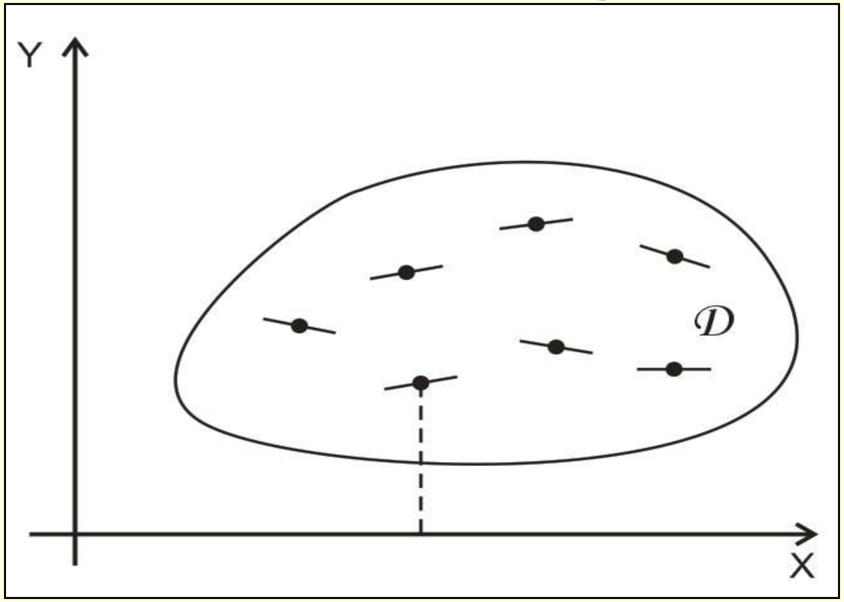
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ 1-ОГО ПОРЯДКА, РАЗРЕШЕННОЕ ОТНОСИТЕЛЬНО СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ

$$y' = f(x, y) \qquad (3)$$

f – некоторая функция двух переменных

Геометрический смысл уравнения (3)

D – множество точек плоскости OXY, на котором определена функция f(x,y), причем D – окрестность (вместе с каждой своей точкой содержит и некоторую окрестность этой точки)



$$y' = tg\alpha = f(x,y)$$

Уравнение (3) каждой точке (x,y) плоскости OXY сопоставляет направление касательной к интегральной кривой y=y(x), проходящей через эту точку

Уравнение (3) задает поле направлений в области D

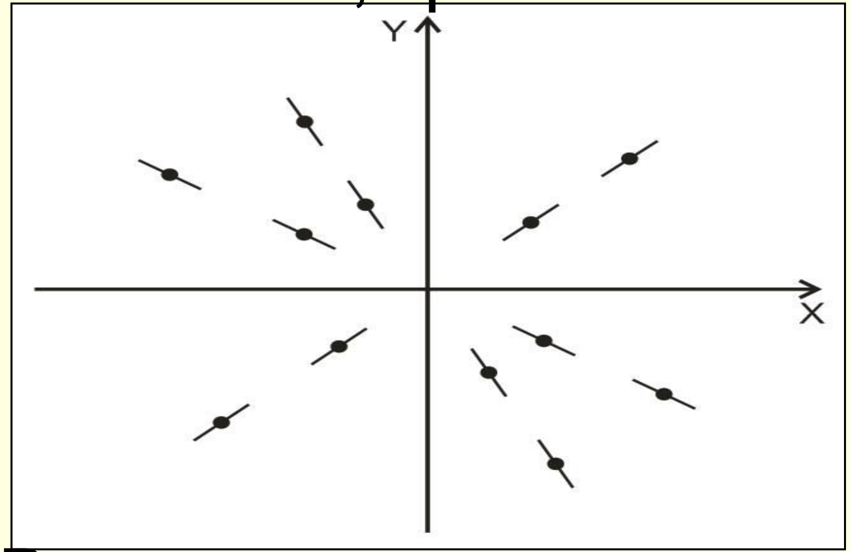
Решить уравнение (3) $\Rightarrow$ найти семейство кривых, отвечающих заданному полю направлений

Пример

$$y' = \frac{y}{x}$$

D – множество точек (x,y), где $x \neq 0$

Поле направлений можно построить на всей плоскости, кроме оси OY.



В каждой точке (x,y) угловой коэффициент касательной совпадает с угловым коэффициентом прямой, проходящей через данную точку и начало координат

Вдоль этих прямых угловой коэффициент постоянен

$\frac{y}{x} = c \Rightarrow$ интегральными кривыми этого уравнения являются прямые y=cx, где c – произв. постоянная

Дифференциальные уравнения

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ИМЕЕТ БЕСКОНЕЧНОЕ МНОЖЕСТВО РЕШЕНИЙ $y = \varphi(x, c)$

ДЛЯ ВЫДЕЛЕНИЯ КОНКРЕТНОГО РЕШЕНИЯ, МОЖНО ЗАДАТЬ НАЧАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ $y(x_0) = y_0$ **(4)**

Задача о нахождении решений дифференциального уравнения (3), удовлетворяющих начальному условию (4), называется задачей Коши

Дифференциальные уравнения

Теорема

(о существовании и единственности решения задачи Коши)

Если в уравнении $y' = f(x, y)$ функция f(x,y) и ее частная производная $f'_y(x, y)$ непрерывны в некоторой области D, содержащей точку (x_0, y_0), то существует единственное решение $y = \varphi(x)$этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$

Геометрическая интерпритация теоремы

При выполнении условий теоремы существует единственная интегральная кривая дифференциального уравнения, проходящая через точку (x_0, y_0)

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С РАЗДЕЛЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0 \quad (5)$$

$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = 0$$ **- ОБЩИЙ ИНТЕГРАЛ**

Пример

уравнение с разделенными переменными

$$e^x dx + (y-1)dy = 0$$

общий интеграл

$$\int e^x dx + \int (y-1)dy = 0 \Rightarrow e^x + \frac{y^2}{2} - y = c$$

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

$$P_1(x)\cdot Q_1(y)dx + P_2(x)\cdot Q_2(y)dy = 0 \qquad (6)$$

Уравнение (6) сводится к уравнению (5) путем почленного деления на $Q_1(y)\cdot P_2(x) \neq 0$

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = 0$$

$$\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = 0$$ **- ОБЩИЙ ИНТЕГРАЛ**

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Замечание

При проведении почленного деления дифференциального уравнения на $Q_1(y)\cdot P_2(x)$ могут быть потеряны некоторые решения. Поэтому следует отдельно решить уравнение $Q_1(y)\cdot P_2(x)=0$ и установить те решения дифференциального уравнения, которые не могут быть получены из общего решения – **особые решения**.

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

$$y' = p(x)\cdot g(y)$$

Данное уравнение сводится к уравнению с разделенными переменными

$$y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = p(x)\cdot g(y)$$

$$\frac{dy}{g(y)} = p(x)dx$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int p(x)dx$$

Пример

$$\boxed{y' = -\frac{y}{x},\, y(4) = 1}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = c_1 - \ln|x| = \ln c - \ln|x|$$

$$y = \frac{c}{x}$$ - общее решение

$$y(4) = 1 \Rightarrow \frac{c}{4} = 1 \Rightarrow c = 4 \Rightarrow y = \frac{4}{x}$$ - частное решение

Пример

$$\boxed{(ye^x+9y)y'-e^x(1+y^2)=0}$$

$$\frac{y}{1+y^2}dy=\frac{e^x}{e^x+9}dx,\qquad \begin{matrix}1+y^2\neq 0\\ e^x+9\neq 0\end{matrix}$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|1+y^2\right|=\ln(e^x+9)+c_1$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|1+y^2\right|=\ln(e^x+9)+\ln c\Rightarrow\sqrt{1+y^2}=c(e^x+9)$$

Однородные дифференциальные уравнения 1-ого порядка

Определение

Функция f(x,y) называется однородной функцией n-ого порядка, если $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$

Пример

$f(x, y) = x^2 - 2xy$ -однородная функция 2 порядка

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 x^2 - 2\lambda x \cdot \lambda y = \lambda^2 (x^2 - 2xy) = \lambda^2 f(x, y)$$

Определение

Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ называется однородным, если функция f(x,y) есть однородная функция нулевого порядка, т.е. $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$

Однородные дифференциальные уравнения 1-ого порядка

Покажем

Однородное дифференциальное уравнение можно представить в виде:

$$y' = \varphi(\frac{y}{x}) \quad \textbf{(8)}$$

Действительно

Если f(x,y) – однородная функция нулевого порядка, то $f(x, y) = f(\lambda x, \lambda y)$

Положим $\lambda = \dfrac{1}{x} : f(x, y) = f(\dfrac{x}{x}, \dfrac{y}{x}) = f(1, \dfrac{y}{x}) =$

$= \varphi(\dfrac{y}{x})$

Однородные дифференциальные уравнения 1-ого порядка

Однородное уравнение (8) преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{y}{x} = u \Rightarrow y = u \cdot x \Rightarrow y' = u' \cdot x + u$$

Подставим в уравнение (8):

$$u' \cdot x + u = \varphi(u)$$

$u' \cdot x = \varphi(u) - u$ - уравнение с разделяющимися переменными

Найдя его общее решение, следует заменить в нем u на $\frac{y}{x}$. Получим общее решение исходного уравнения.

Однородные дифференциальные уравнения 1-ого порядка

Однородные уравнения часто задаются в дифференциальной форме:

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

Это дифференциальное уравнение будет однородным, если P(x,y) и Q(x,y) – однородные функции одинакового порядка:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}=-\frac{P(\frac{x}{x},\frac{y}{x})}{Q(\frac{x}{x},\frac{y}{x})}=-\frac{(\frac{1}{x})^n P(x,y)}{(\frac{1}{x})^n Q(x,y)}$$

Пример

$$\boxed{y' = \frac{\sqrt{x^2 - y^2} + y}{x}}$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\sqrt{\lambda^2 x^2 - \lambda^2 y^2} + \lambda y}{\lambda x} = \frac{\sqrt{x^2 - y^2} + y}{x} = f(x, y)$$

$$\frac{y}{x} = u \Rightarrow y = u \cdot x \Rightarrow y' = u' \cdot x + u \quad (*)$$

$$\frac{\sqrt{x^2 - y^2} + y}{x} = \frac{\sqrt{x^2 - x^2 u^2} + xu}{x} = \sqrt{1 - u^2} + u \quad (**)$$

Пример

$$u'\cdot x+u=\sqrt{1-u^2}+u\Rightarrow u'\cdot x=\sqrt{1-u^2}$$

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{dx}{x},\qquad x\neq 0,\qquad \sqrt{1-u^2}\neq 0$$

$$\arcsin u=\ln|x|+c$$

$$u=\sin(\ln|x|+c)$$

$$y=x\cdot\sin(\ln|x|+c),\ \sqrt{1-(\frac{y}{x})^2}=0$$

$x=\pm y$ -особое решение

Линейные дифференциальные уравнения 1-ого порядка

Определение

Дифференциальное уравнение первого порядка называется линейным, если его можно записать в виде

$$y' + p(x)y = g(x) \qquad \textbf{(9)}$$

где p(x) и g(x) – заданные функции.

Особенность: Искомая функция y и ее производная y' входят в уравнение, не перемножаясь между собой

МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦ. УРАВНЕНИЯ (9)

МЕТОД БЕРНУЛЛИ

МЕТОД ЛАГРАНЖА

Метод Бернулли

Решение уравнения (9) ищется в виде

$\boxed{y = u \cdot v}$, где $u = u(x), v = v(x)$ - неизвестные

функции от x, причем одна из них произвольна (но $\neq 0$)

$$\boxed{y' = u' \cdot v + u \cdot v'}$$

Подставим в (9): $\boxed{u' \cdot v + u \cdot v' + p(x)uv = q(x)}$

$$\boxed{u' \cdot v + u(v' + p(x)v) = q(x)} \quad \textbf{(10)}$$

Подберем функцию v(x) так, чтобы $\boxed{v' + p(x)v = 0}$

$$\frac{dv}{dx} = -p(x)v \Rightarrow \ln|v| = -\int p(x)dx + c$$

Метод Бернулли

Так как функция v(x) подбирается свободно, то можно принять c=0

$$\boxed{v = e^{-\int p(x)dx}}$$

Подставим в (10): $u' \cdot v = q(x)$ или $u' \cdot e^{-\int p(x)dx} = q(x)$

$$\boxed{u' = q(x) \cdot e^{\int p(x)dx}}$$

$$\frac{du}{dx} = q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \Rightarrow \boxed{u = \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + c}$$

$$\boxed{y = \left(\int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + c\right) \cdot e^{-\int p(x)dx}}$$

Пример

$$\boxed{y' + \frac{2y}{x} = 5x^2}$$

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$u' \cdot v + u \cdot v' + \frac{2}{x} uv = 5x^2 \Rightarrow u' \cdot v + u(v' + \frac{2}{x} v) = 5x^2$$

$$v' + \frac{2}{x} v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{2}{x} dx \Rightarrow \ln|v| = -2\ln|x| = \ln\frac{1}{x^2}$$

$$\boxed{v = \frac{1}{x^2}} \qquad u' \cdot \frac{1}{x^2} = 5x^2 \Rightarrow u' = 5x^4 \Rightarrow \boxed{u = x^5 + c}$$

$$\boxed{y = (x^5 + c)\frac{1}{x^2} = x^3 + \frac{c}{x^2}}$$

Дифференциальные уравнения Бернулли

Определение

Дифференциальное уравнение Бернулли - это уравнение вида

$$y' + p(x)y = g(x) \cdot y^n \quad \textbf{(11)}$$

где $n \in R; n \neq 0, n \neq 1$

n=0 уравнение (11) становится линейным дифференциальным уравнением первого порядка

n=1 уравнение (11) имеет вид дифференциального уравнения с разделяющимися переменными

$$y' = (g(x) - p(x))y$$

В дальнейшем будем считать, что $n \neq 0, n \neq 1$

Метод Бернулли

Разделим уравнение (11) на $y^n \neq 0$

$$\boxed{y^{-n} \cdot y' + p(x) y^{1-n} = g(x)}$$

Выполним замену. Обозначим через $z = y^{1-n} \Rightarrow$

$$\Rightarrow z' = (1-n) y^{-n} \cdot y' \Rightarrow y^{-n} \cdot y' = \frac{1}{1-n} \cdot z'$$

Линейное дифференциальное уравнение 1-ого порядка относительно z

$$\boxed{\frac{1}{1-n} \cdot z' + p(x) \cdot z = g(x)} \quad \textbf{(12)}$$

Решая его методом Бернулли, получим общее решение z=z(x,c)

$$\boxed{y = z^{\frac{1}{1-n}} = (z(x,c))^{\frac{1}{1-n}}}$$

Пример

$$\boxed{y' - y = \frac{e^{6x}}{y^2}}$$

Уравнение Бернулли

$$y' - y = e^{6x} \cdot y^{-2}$$

$$\boxed{y^2 y' - y^3 = e^{6x}}$$

$$z = y^3 \Rightarrow z' = 3y^2 y' \Rightarrow y^2 y' = \frac{1}{3} z'$$

$$\frac{1}{3} z' - z = e^{6x} \Rightarrow \boxed{z' - 3z = 3e^{6x}}$$

$$z = u \cdot v \Rightarrow z' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$u' \cdot v + u \cdot v' - 3uv = 3e^{6x}$$

$$u' \cdot v + u(v' - 3v) = 3e^{6x}$$

Пример

$$v' - 3v = 0 \Rightarrow \frac{1}{3v}dv = dx \Rightarrow \frac{1}{3}\ln|v| = x \Rightarrow \sqrt[3]{v} = e^x$$

$$\boxed{v = e^{3x}}$$

$$e^{3x} \cdot u' = 3e^{6x} \Rightarrow u' = 3e^{3x}$$

$$\boxed{u = e^{3x} + c}$$

$$\boxed{z = e^{3x}(e^{3x} + c) = e^{6x} + ce^{3x}}$$

$$\boxed{y = \sqrt[3]{z} = e^x(e^{3x} + c)^{\frac{1}{3}}}$$

Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

Определение

Уравнение вида

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \quad \textbf{(13)}$$

называется уравнением в полных дифференциал.,
если левая часть этого уравнения является полным дифференциалом функции u=u(x,y), т.е.

$$du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

Если (13) является уравнением в полных дифференциалах, то его можно записать как

$du(x,y) = 0 \Rightarrow u(x,y) = c$ - общий интеграл уравнения (13) (c=const)

Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

Для того, чтобы $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ являлось полным дифференциалом функции u=u(x,y) необходимо и достаточно выполнение следующего условия

$$\boxed{\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}} \qquad \textbf{(14)}$$

Пусть условие (14) выполнено. Тогда

$$du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

$$du(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}dy \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} = P(x,y) \\ \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y} = Q(x,y) \end{cases} \qquad \textbf{(15)}$$

Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

Проинтегрируем первое уравнение в (15) по x

$$\boxed{u(x,y)=\int P(x,y)dx+c(y)}$$

Найдем c(y). Для этого вычислим частную производную полученного уравнения по переменной y

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\int P(x,y)dx)+c'(y)=Q(x,y)$$

$$c'(y)=Q(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}(\int P(x,y)dx) \qquad \textbf{(16)}$$

Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

Проинтегрируем (16). Получим

$$c(y) = \int (Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}(\int P(x,y)dx))dy + c$$

$$c = const$$

$$u(x,y) = \int P(x,y)dx + \int (Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}(\int P(x,y)dx))dy + c$$

Приравнивая полученное выражение к константе с, записывают общий интеграл уравнения (13)