

**Федеральное агентство по образованию
Нижегородский государственный технический университет
им. Р.Е. АЛЕКСЕЕВА**

С.Н. Охулков

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

**Кафедра “Теоретическая и общая
электротехника”**

**Для студентов электротехнических
специальностей всех форм обучения**

Автозаводская высшая школа управления и технологий

Очная и заочная форма обучения

- Автомобили и автомобильное хозяйство
- Автомобиле- и тракторостроение
- Технология машиностроения

г. Нижний Новгород, ул. Лескова, 68, т. (831) 256-02-10

Тема 5

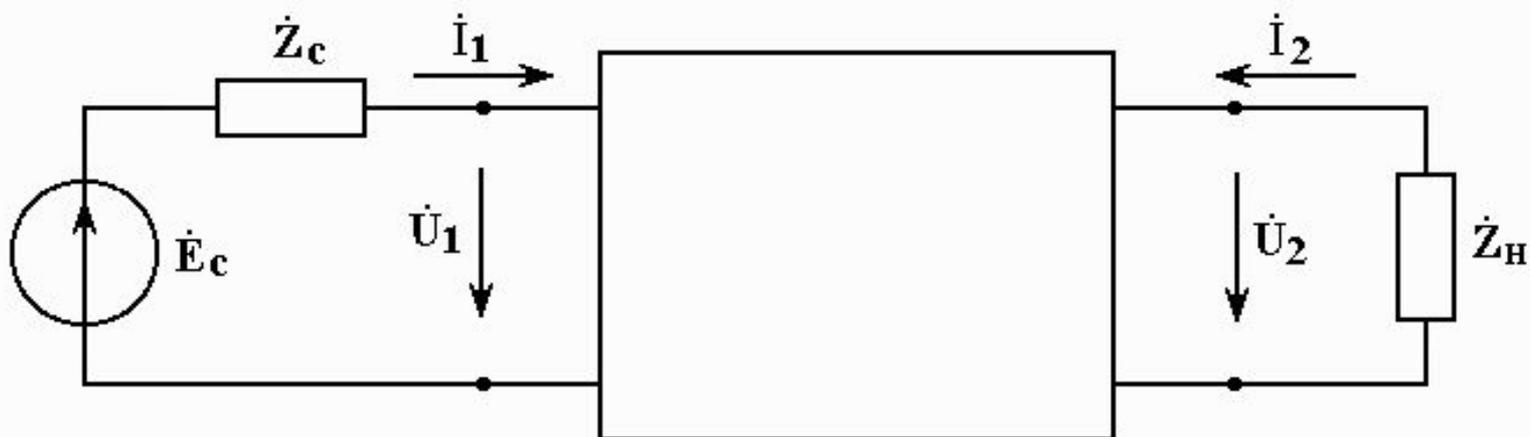
**ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ
ЧЕТЫРЁХПОЛЮСНИКОВ
ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ
ПЕРЕМЕННОГО ТОКА**

Четырехполюсник –

**это устройство, имеющее четыре контакта:
два входных контакта используются для
подключения источника сигнала
и два выходных - для подключения нагрузки**

[см. схему](#)

Четырехполюсник



Четырехполюсники широко применяются в системах информации. Четырехполюсниками являются усилители, фильтры, линии связи и т.д.

*Четырехполюсник, содержащий только линейные элементы, называется **линейным.***

*Если внутри четырехполюсника есть **нелинейные** или **параметрические** элементы, то четырехполюсник будет **нелинейным** или **параметрическим.***

*Четырехполюсник, не содержащий источников
напряжения или тока,
называется*

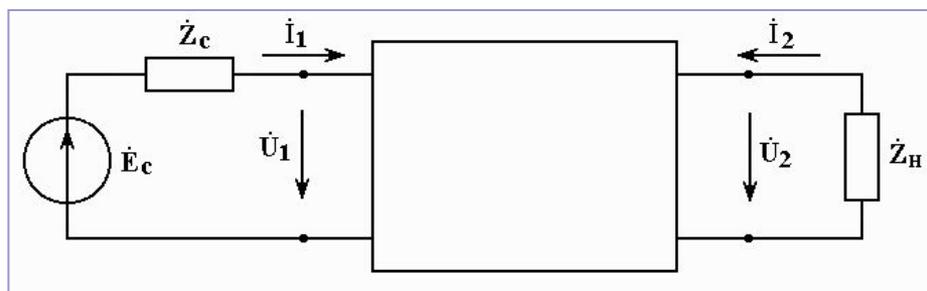
ПАССИВНЫМ

АКТИВНЫЕ

**четырехполюсники
содержат источники напряжения или тока**

Рассмотрим уравнения линейных четырехполюсников

Пусть заданы входной I_1 и выходной I_2 токи четырехполюсника



Входные и выходные напряжения U_1 и U_2 будут функциями этих токов:

$$U_1 = f_1(I_1, I_2)$$

$$U_2 = f_2(I_1, I_2)$$

Так как четырехполюсник линейный, то в силу принципа суперпозиции функции в вышеуказанных уравнениях будут линейными:

$$\begin{aligned} U_1 &= Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2; \\ U_2 &= Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2. \end{aligned}$$

Эти соотношения называют уравнениями четырехполюсника с Z-параметрами.

Коэффициенты Z_{11} , Z_{12} , Z_{21} , Z_{22} имеют размерность сопротивлений.

Если заданы напряжения
четырёхполюсника U_1 и U_2 ,
то можно получить уравнения:

$$\begin{aligned} I_1 &= Y_{11}U_1 + Y_{12}U_2; \\ I_2 &= Y_{21}U_1 + Y_{22}U_2. \end{aligned}$$

**Это соотношение называют
уравнениями четырёхполюсника с Y -параметрами**

**Коэффициенты Y_{11} , Y_{12} , Y_{21} , Y_{22}
имеют размерность проводимостей**

При заданных I_1 и U_2
получаем уравнения с
 h -параметрами:

$$\begin{aligned}U_1 &= h_{11}I_1 + h_{12}U_2; \\I_2 &= h_{21}I_1 + h_{22}U_2.\end{aligned}$$

где h_{11} имеет размерность сопротивления;
 h_{22} имеет размерность проводимости;
 h_{12} , h_{21} – безразмерные коэффициенты.

**Коэффициенты пропорциональности Z , Y , h
характеризуют внутреннюю структуру
четырёхполюсника,
которая проявляется через взаимосвязь
входных и выходных токов и напряжений.**

Из анализа уравнений четырехполюсника легко получить физический смысл параметров четырехполюсника.

Для Z-параметров:

$$Z_{11} = U_1/I_1,$$

при $I_2 = 0$ – входное сопротивление при холостом ходе на выходе;

$$Z_{12} = U_1/I_2,$$

при $I_1 = 0$ – сопротивление обратной связи;

$$Z_{21} = U_2/I_1,$$

при $I_2 = 0$ – сопротивление прямой передачи;

$$Z_{22} = U_2/I_2,$$

при $I_1 = 0$ – выходное сопротивление при холостом ходе на входе.

Для Y-параметров:

$$Y_{11} = I_1/U_1,$$

при $U_2 = 0$ – входная проводимость при коротком замыкании на выходе;

$$Y_{12} = I_1/U_2,$$

при $U_1 = 0$ – проводимость обратной связи;

$$Y_{21} = I_2/U_1,$$

при $U_2 = 0$ – проводимость прямой передачи;

$$Y_{22} = I_2/U_2,$$

при $U_1 = 0$ – выходная проводимость при коротком замыкании на входе.

Для h-параметров:

$$h_{11} = U_1/I_1,$$

при $U_2 = 0$ – входное сопротивление при коротком замыкании на выходе;

$$h_{12} = U_1/U_2,$$

при $I_1 = 0$ – коэффициент обратной связи по напряжению;

$$h_{21} = I_2/I_1,$$

при $U_2 = 0$ – коэффициент прямой передачи по току;

$$h_{22} = I_2/U_2,$$

при $I_1 = 0$ – выходная проводимость при холостом ходе на входе.

Название параметра указывает на способ его экспериментального определения или расчета методом комплексных амплитуд

**Четырехполюсники
в основном используются
в системах передачи сигналов.**

**Для анализа прохождения сигналов через
четырехполюсник вводятся
передаточные функции
*четырехполюсника.***

Передаточные функции четырехполюсника

$$K_U = \dot{U}_2 / \dot{U}_1$$

– комплексный коэффициент передачи по напряжению

$$K_I = \dot{I}_2 / \dot{I}_1$$

– комплексный коэффициент передачи по току

$$K_P = P_{\text{ВЫХ}} / P_{\text{ВХ}}$$

– коэффициент передачи активной мощности

$$Z_{\text{ВХ}} = \dot{U}_1 / \dot{I}_1$$

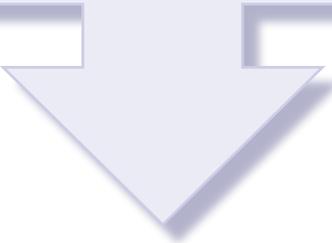
– комплексное входное сопротивление

$$Z_{\text{ВЫХ}} = \dot{U}_2 / \dot{I}_2$$

– комплексное выходное сопротивление

Наиболее часто используемыми передаточными функциями являются коэффициент передачи по напряжению, входное и выходное сопротивление.

**Рассмотрим расчет этих функций
при известных параметрах
четырехполюсника**



Пусть известны Y-параметры четырехполюсника.

Используя уравнение $I_2 = Y_{21}U_1 + Y_{22}U_2$ и формулу закона Ома для нагрузки $U_2 = -Z_n I_2$, получим выражение для *комплексного коэффициента передачи по напряжению*:

$$K_U = -Y_{21} / (Y_{22} + Y_H)$$

где $Y_H = 1/Z_n$.

Используя формулу для входной проводимости $Y_{вх} = I_1/U_1$ и деля уравнение $I_1 = Y_{11}U_1 + Y_{12}U_2$ на напряжение U_1 , найдем *водную проводимость четырехполюсника*:

$$Y_{вх} = Y_{11} - Y_{12}Y_{21} / (Y_H + Y_{22})$$

Аналогично, выходная проводимость четырехполюсника:

$$Y_{вых} = Y_{22} - Y_{21}Y_{12} / (Y_{11} + Y_c)$$

где $Y_c = 1/Z_c$.

Рассмотрим методику расчета частотных характеристик линейных четырехполюсников.

Комплексный коэффициент передачи по напряжению $K_U(j\omega)$, в дальнейшем просто $K(j\omega)$, представляет собой запись двух характеристик: амплитудно-частотной (АЧХ) и фазочастотной (ФЧХ):

$$K(j\omega) = K_1(\omega) + jK_2(\omega) = K(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

Первая характеристика $K(\omega)$ выражается модулем комплексного коэффициента передачи, а вторая $\varphi(\omega)$ – его аргументом (фазой):

$$K(\omega) = \sqrt{K_1^2(\omega) + K_2^2(\omega)}$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{K_2(\omega)}{K_1(\omega)}$$

Для цепей с сосредоточенными параметрами частотные характеристики могут быть представлены в виде отношения двух полиномов:

$$K(j\omega) = \frac{A(j\omega)}{B(j\omega)} = \frac{\sum_{m=0}^M a_m (j\omega)^m}{\sum_{n=0}^N b_n (j\omega)^n}$$

Если обозначить $j\omega = p$, то вышеприведенное выражение можно записать в виде:

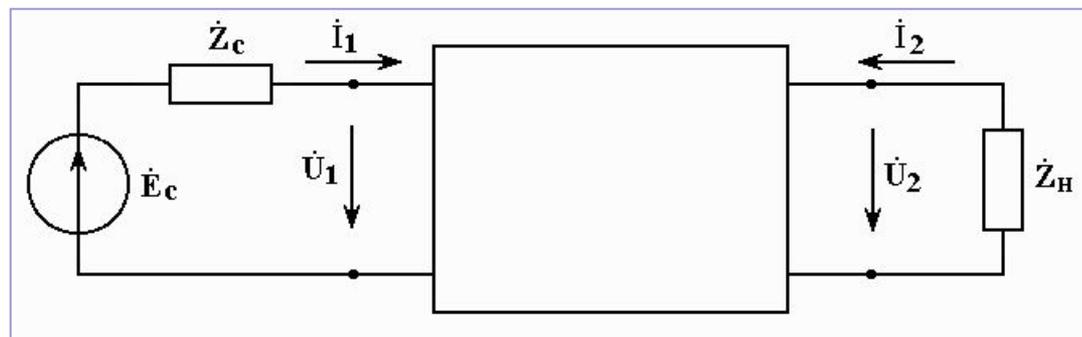
$$K(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{\sum_{m=0}^M a_m p^m}{\sum_{n=0}^N b_n p^n}$$

**Это выражение называется
операторным коэффициентом передачи**

Исследование свойств полиномов $A(p)$ и $B(p)$ позволяет ответить на многие вопросы, связанные с определением реакции линейной цепи на сложное воздействие. В этой лекции рассматриваются частотные характеристики в плане их применения к анализу цепей при синусоидальном воздействии.

Если $Z_c \ll Z_{11}$, а $Z_{22} \ll Z_n$
(см. схему),
то операторный коэффициент передачи приблизительно можно определить без учета сопротивлений источника сигнала и нагрузки:

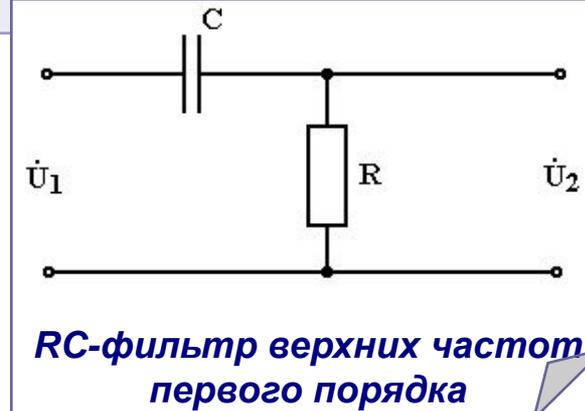
$$K(p) = \frac{Z_{22}(p)}{Z_{11}(p)} = \frac{Z_{\text{ВЫХ}}(p)}{Z_{\text{ВХ}}(p)}$$



Рассмотрим примеры определения частотных характеристик простейших четырехполюсников, для которых выполняется это условие

Пример 1

Найти выражения амплитудно-частотной и фазочастотной характеристик коэффициента передачи напряжения для четырехполюсника, изображенного справа.



Операторный коэффициент передачи по напряжению:

$$K(p) = \frac{R}{R + 1/pC} = \frac{pRC}{1 + pRC}$$

Комплексный коэффициент передачи ($p = j\omega$):

$$K(j\omega) = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

Комплексный коэффициент передачи в алгебраической форме:

$$K(j\omega) = \frac{\omega^2 R^2 C^2}{1 + \omega^2 R^2 C^2} + j \frac{\omega RC}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$

Модуль коэффициента передачи:

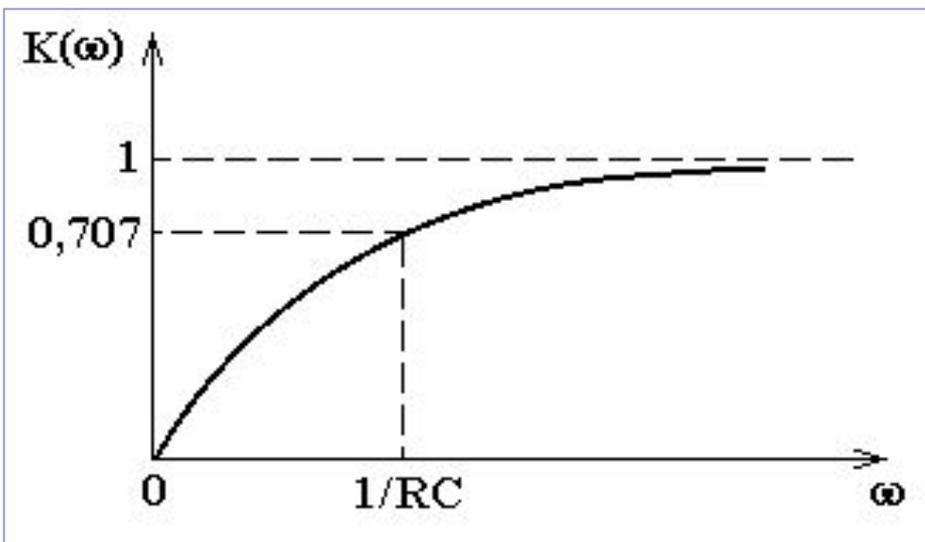
$$K(\omega) = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

Фазовый сдвиг между выходным и входным напряжением:

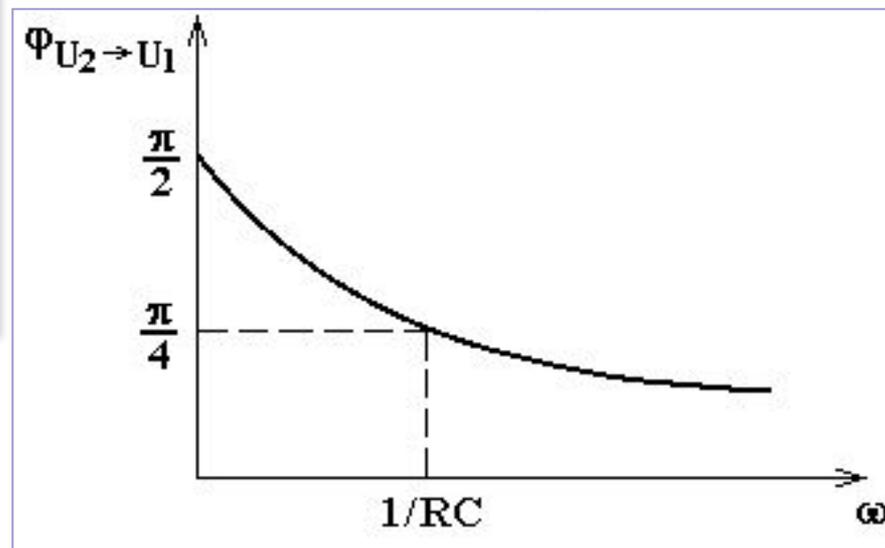
$$\varphi_{U_2 \rightarrow U_1} = -\arctg \frac{1}{\omega RC}$$

Продолжение примера 1

Графики, рассчитанные по полученным формулам



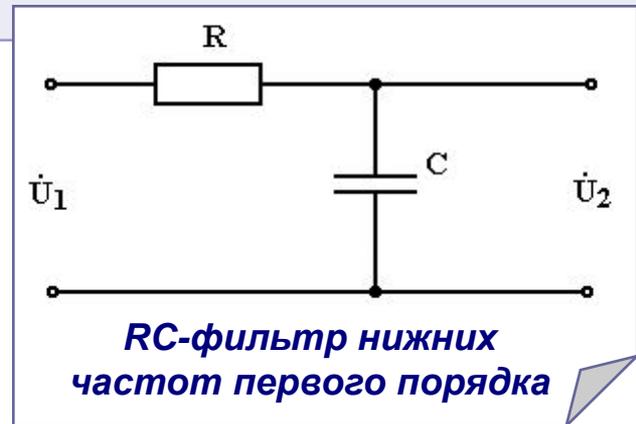
АЧХ RC-фильтра верхних частот первого порядка



ФЧХ RC-фильтра верхних частот первого порядка

Пример 2

Найти выражения амплитудно-частотной и фазочастотной характеристик коэффициента передачи напряжения для четырехполюсника, изображенного справа.



Операторный коэффициент передачи по напряжению:

$$K(p) = \frac{1/pC}{R + 1/pC} = \frac{1}{1 + pRC}$$

Комплексный коэффициент передачи ($p = j\omega$):

$$K(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Комплексный коэффициент передачи в алгебраической форме:

$$K(j\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2 R^2 C^2} - j \frac{\omega RC}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$

Модуль коэффициента передачи:

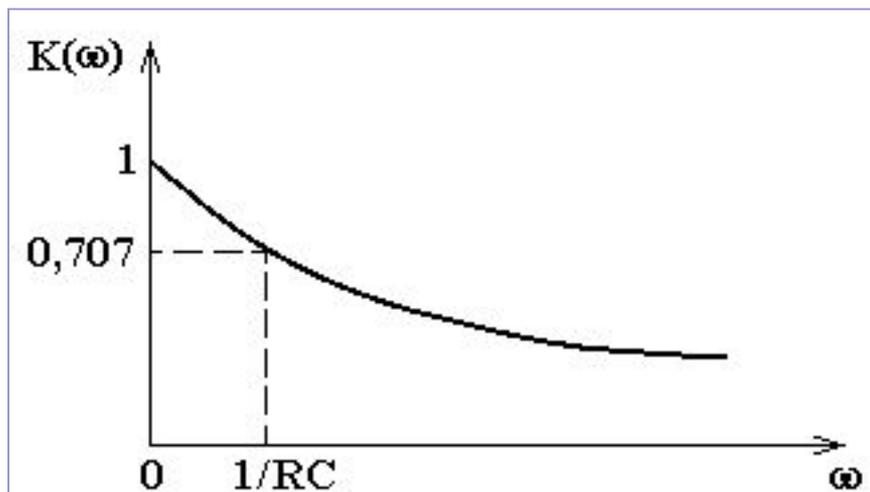
$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

Фазовый сдвиг между выходным и входным напряжением:

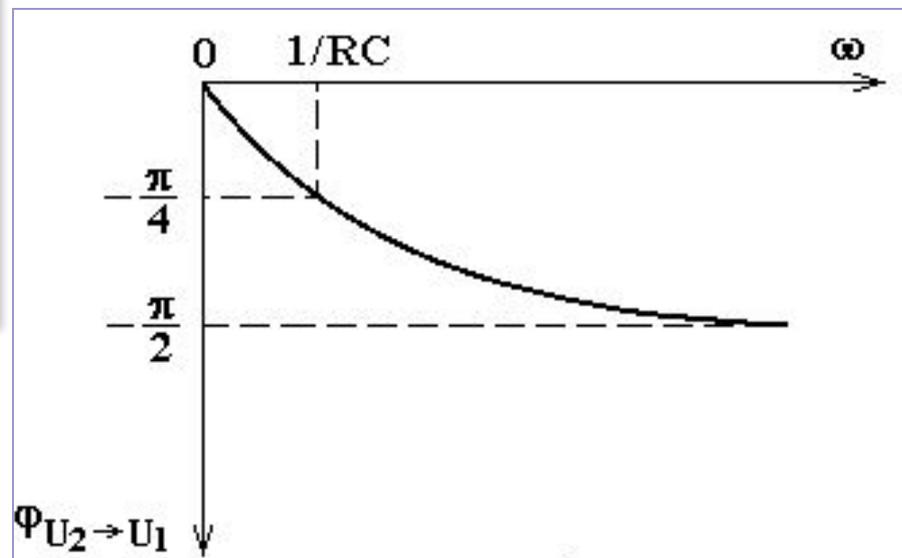
$$\varphi_{\vec{U}_2 \rightarrow \vec{U}_1} = -\text{arctg}(\omega RC)$$

Продолжение примера 2

Графики, рассчитанные по полученным формулам



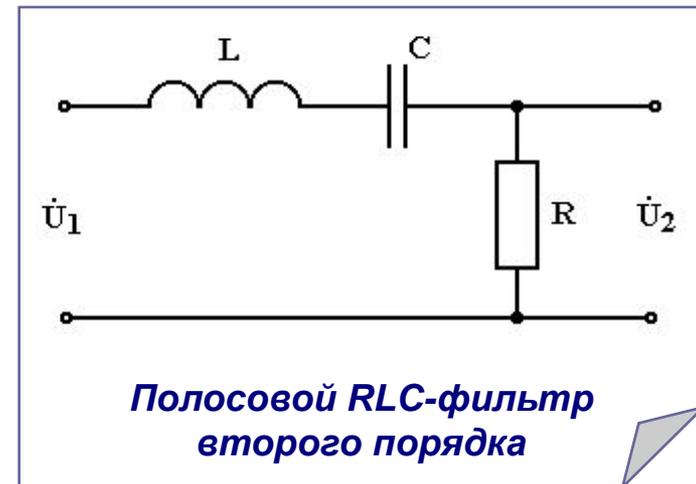
АЧХ RC-фильтра нижних частот первого порядка



ФЧХ RC-фильтра нижних частот первого порядка

Пример 3

Найти выражение амплитудно-частотной характеристики коэффициента передачи четырехполюсника, изображенного справа.



Операторный коэффициент передачи по напряжению:

$$K(p) = \frac{R}{pL + 1/pC + R} = \frac{pRC}{p^2LC + pRC + 1}$$

Комплексный коэффициент передачи ($p = j\omega$):

$$K(j\omega) = \frac{j\omega RC}{(1 - \omega^2 LC) + j\omega RC}$$

Продолжение примера 3

Для определения модуля коэффициента передачи $K(\omega)$ воспользуемся известным положением теории комплексных чисел о том, что произведение комплексного числа на комплексно-сопряженное число равно квадрату его модуля:

$$K^2(\omega) = \frac{j\omega RC}{(1 - \omega^2 LC) + j\omega RC} \cdot \frac{-j\omega RC}{(1 - \omega^2 LC) - j\omega RC}$$

$$K^2(\omega) = \frac{\omega^2 R^2 C^2}{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2}$$

$$K(\omega) = \frac{\omega RC}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

Очевидно, что коэффициент передачи на резонансной частоте

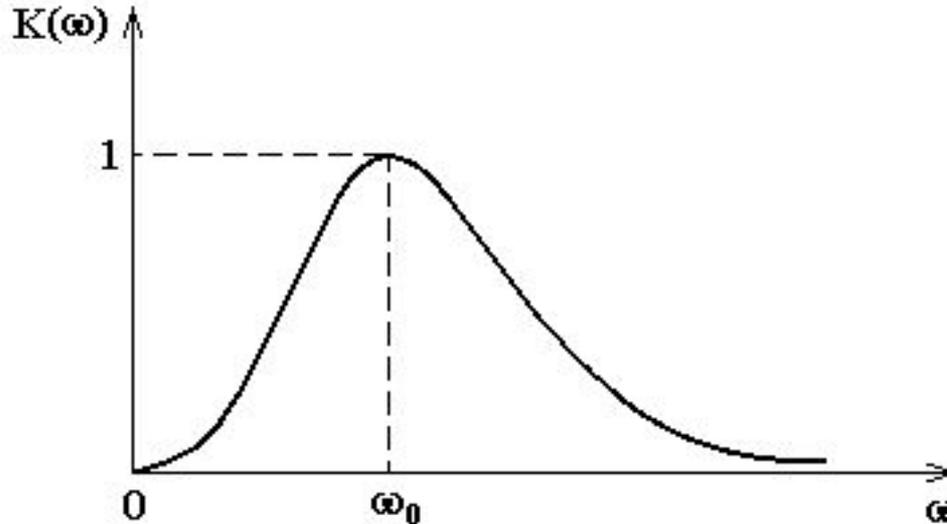
$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$$

будет максимальным, $K(\omega_0) = 1$.

Продолжение примера 3

АЧХ, рассчитанная по формуле

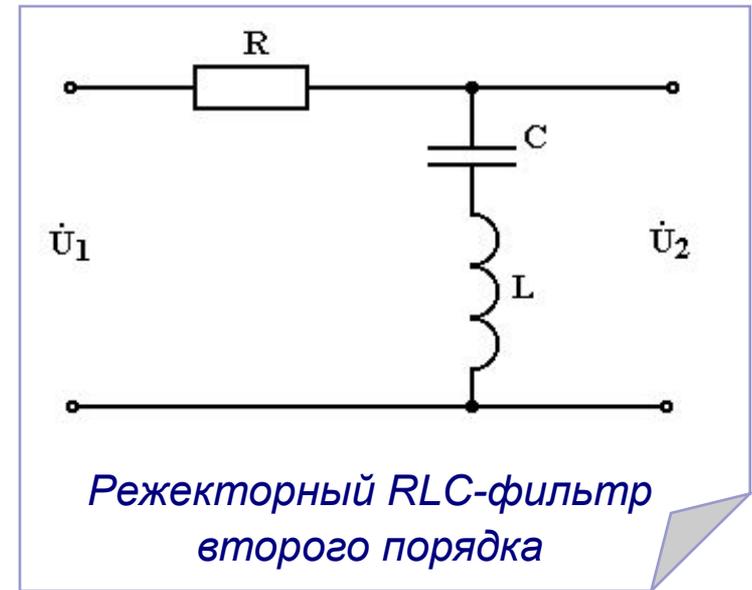
$$K(\omega) = \frac{\omega RC}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2}}$$



***АЧХ полосового RLC-фильтра
второго порядка***

Пример 4

Найти выражение амплитудно-частотной характеристики четырехполюсника, изображенного справа.



Операторный коэффициент передачи по напряжению:

$$K(p) = \frac{1/pC + pL}{R + 1/pC + pL} = \frac{p^2LC + 1}{p^2LC + pRC + 1}$$

Комплексный коэффициент передачи ($p = j\omega$):

$$K(j\omega) = \frac{1 - \omega^2LC}{(1 - \omega^2LC) + j\omega RC}$$

Модуль коэффициента передачи:

$$K(\omega) = \frac{|1 - \omega^2LC|}{\sqrt{(1 - \omega^2LC)^2 + \omega^2R^2C^2}}$$

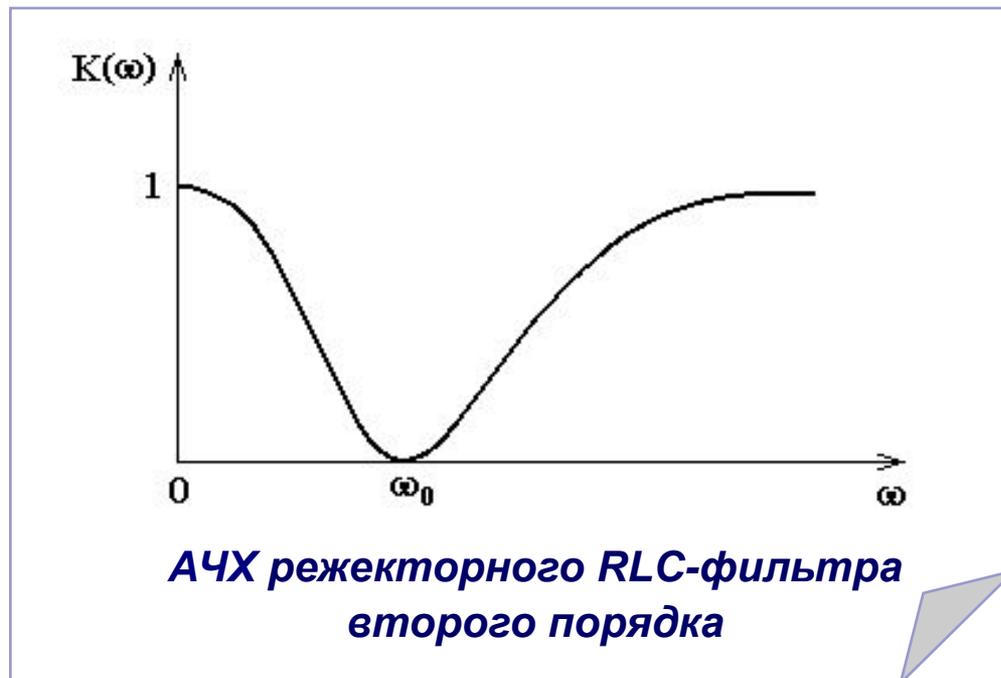
Продолжение примера 4

Очевидно, что коэффициент передачи на резонансной частоте

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$$

будет минимальным, $K(\omega_0) = 0$.

АЧХ, рассчитанная по формуле
$$K(\omega) = \frac{|1 - \omega^2 LC|}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2}}$$



В современных системах передачи информации широко используется частотный принцип разделения сигналов.

В соответствии с этим каждому сигналу соответствует своя полоса частот, которая определяется спектром сигнала.

Важнейшую роль при обработке сигналов в таких системах играют *электрические фильтры.*

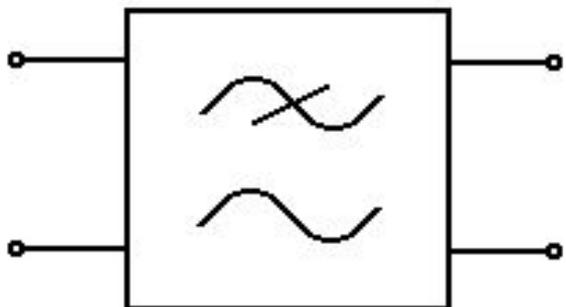
Электрический частотный фильтр

(в дальнейшем просто *фильтр*) –

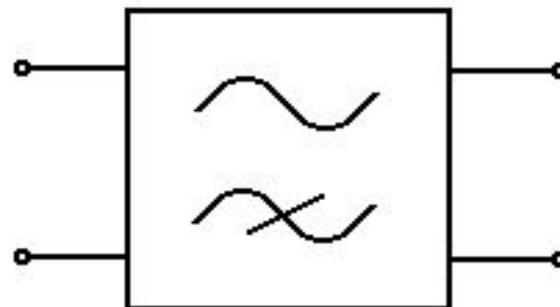
это четырехполюсник, коэффициент передачи которого зависит от частоты. Фильтр пропускает сигналы только в определенной полосе частот; сигналы (помехи), частоты которых не попадают в эту полосу, подавляются.

**По диапазону пропускаемых частот
фильтры делятся на
фильтры нижних частот (ФНЧ),
фильтры верхних частот (ФВЧ),
полосовые фильтры (ПФ),
режекторные (РФ) или заграждающие (ЗФ)
фильтры.**

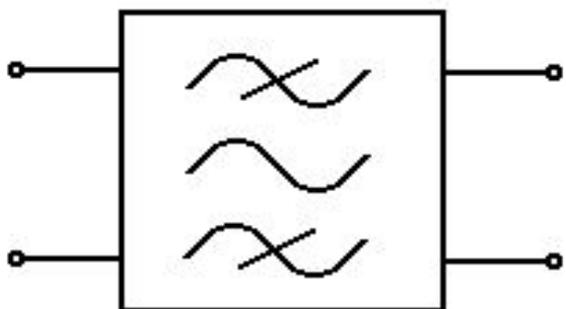
Условные обозначения (УГО) фильтров



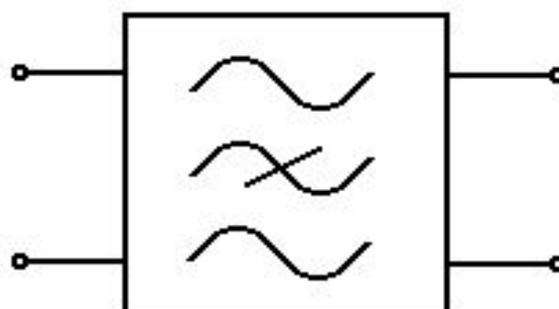
ФНЧ



ФВЧ



ПФ



РФ (3Ф)

Рекомендуемая литература

- 1. Алтунин Б.Ю., Панкова Н.Г. Теоретические основы электротехники:** Комплекс учебно - методических материалов: Часть 1 / Б.Ю. Алтунин, Н.Г. Панкова; НГТУ им. Р.Е. Алексеева. Н.Новгород, 2007.-130 с.
- 2. Алтунин Б.Ю., Кралин А.А. Электротехника и электроника:** комплекс учебно-методических материалов: Ч.1/ Б.Ю. Алтунин, А.А. Кралин; НГТУ им. Р.Е. Алексеева. Н.Новгород, 2007.-98 с.
- 3. Алтунин Б.Ю., Кралин А.А. Электротехника и электроника:** комплекс учебно-методических материалов: Ч.2/ Б.Ю. Алтунин, А.А. Кралин; НГТУ им. Р.Е. Алексеева. Н.Новгород, 2008.-98 с
- 4. Касаткин, А.С. Электротехника** /А.С. Касаткин, М.В. Немцов.-М.: Энергоатомиздат, 2000.
- 5. Справочное пособие по основам электротехники и электроники** /под. ред. А.В. Нетушила.-М.: Энергоатомиздат, 1995.
- 6. Манаев Е.И. Основы радиоэлектроники.**-3-е изд., перераб. И доп.-М.: Радио и связь, 1990.-512 с.: ил.
- 7. Новожилов, О. П. Электротехника и электроника:** учебник / О. П. Новожилов. – М.: Гардарики, 2008. – 653 с.

Тема 5 Закончена

Благодарю за внимание