СТАТИКА.

Статика – раздел теоретической механики, занимающийся изучением условий равновесия материальных тел.

Мат. точкой называется материальное тело, размеры которого в конкретных условиях можно не учитывать.

Силой называется мера механического взаимодействия тел, определяющая интенсивность и направление этого взаимодействия. Характеризуется тремя элементами: численным значением (модулем), направлением и точкой приложения. [F]= Н.

Системой сил называется совокупность нескольких сил действующих на тело.

Эквивалентными называются системы сил, под действием каждой из которых твердое тело находится в одинаковом кинематическом состоянии.

Равнодействующей системы сил называется сила **R**, эквивалентная этой системе.

Статика. Основные понятия и определения.

Уравновешивающей называется сила **F**, равная по модулю равнодействующей и направленная по линии ее действия в противоположную сторону.

Системой уравновешивающихся сил называется такая система, которая при приложении к твердому телу, находящемуся в покое, не выводит его из этого состояния.

Внешними называются силы, действующие на твердое тело или систему тел со стороны других тел. **Внутренними** называются силы взаимодействия между частицами твердого тела или между телами данной системы.

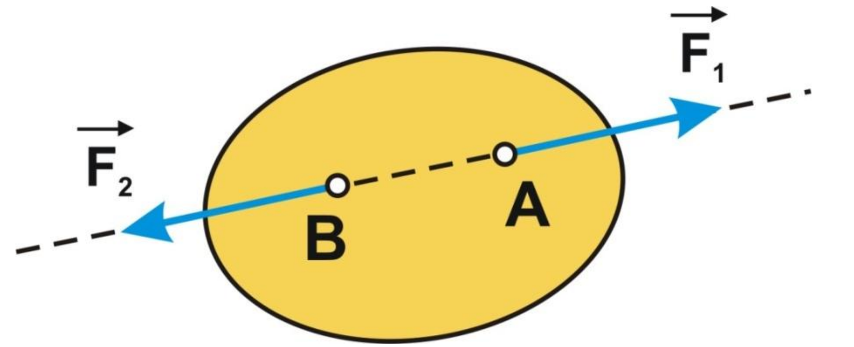
Свободным называется тело, если оно может перемещаться в пространстве в любом направлении. **Несвободным** называется тело, свобода которого ограничена связями.

Связями называются тела, ограничивающие свободу перемещения данного тела.

Реакцией связи называется сила, с которой связь действует на тело, препятствуя его перемещению в том или ином направлении.

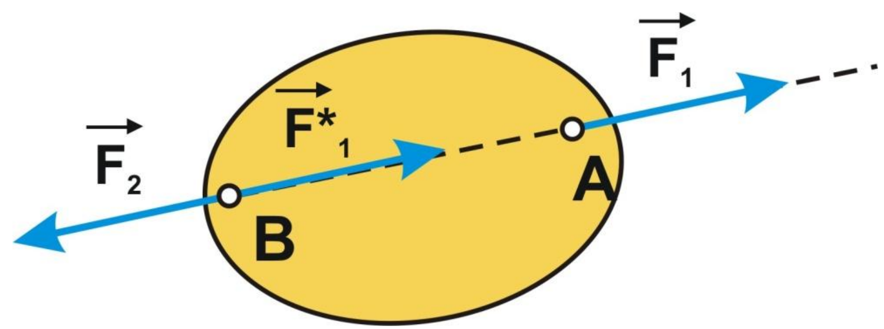
Аксиомы статики.

1. **Аксиома равновесия двух сил.** Абсолютно твердое тело находится в равновесии под действием двух сил тогда, когда эти силы равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны.



2. **Аксиома присоединения и исключения уравновешивающихся сил.** Не изменяя действия системы сил на абсолютно твердое тело, можно присоединить к этой системе или исключить из нее любую уравновешенную систему сил.

Следствие: Силу F, приложенную к какой-либо точке твердого тела A, можно, не изменяя ее действия, переносить в любую другую точку B, лежащую на линии действия этой силы.

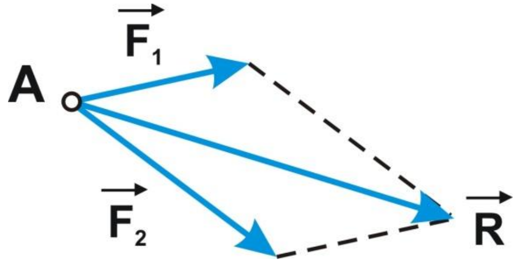


$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \qquad \vec{F}_1 = \vec{F}_1^*$$

Статика. Аксиомы статики.

3. **Аксиома параллелограмма сил.** Равнодействующая двух сил, пересекающихся в точке, приложена в той же точке и изображается диагональю параллелограмма, построенного на заданных силах.

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$



4. **Аксиома равенства действия и противодействия.** Силы, с которыми действуют друг на друга два тела, равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны.

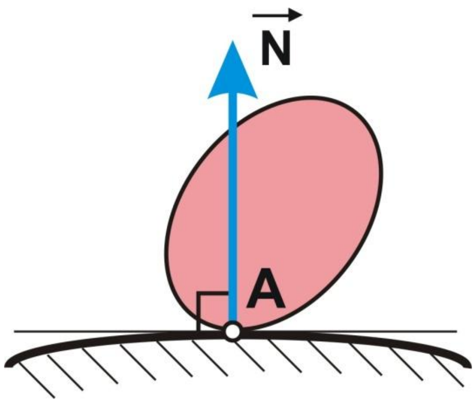
5. **Аксиома отвердевания.** Если деформируемое тело находится в равновесии, то это равновесие не нарушается и в том случае, если тело станет абсолютно твердым.

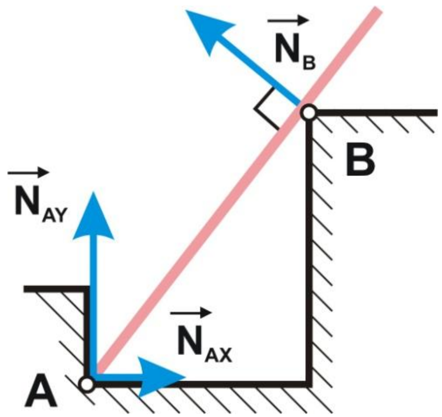
6. **Аксиома связей (принцип освобождаемости от связей).**

Всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если мысленно освободить его от связей и заменить их действие на тело реакциями этих связей.

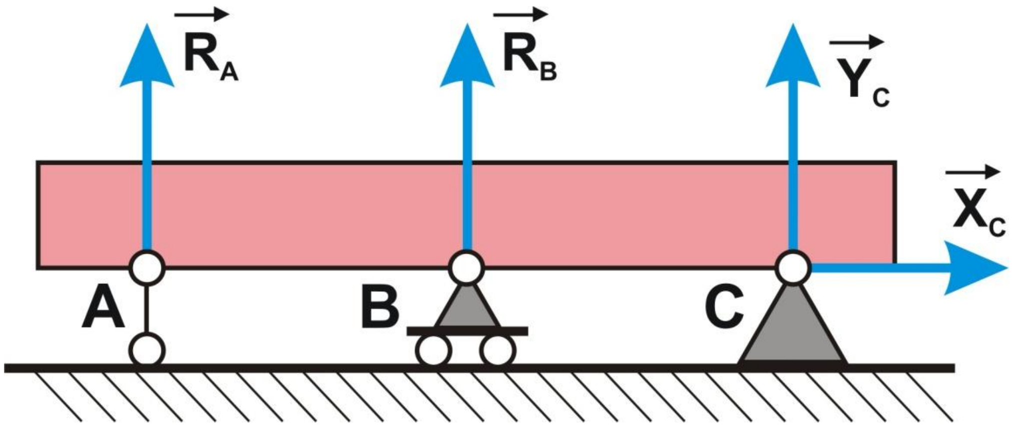
Связи и их реакции.

1. **Гладкая поверхность.**



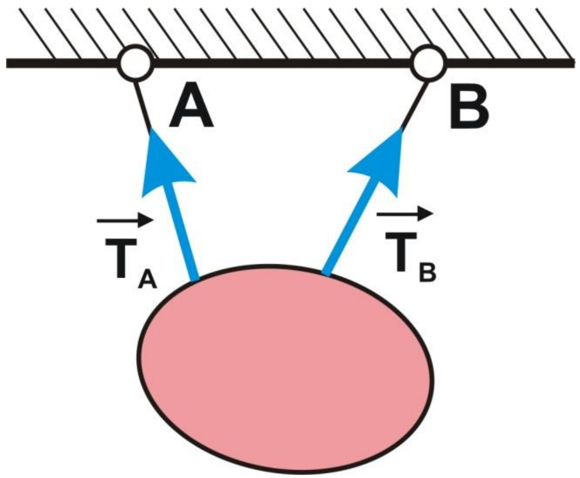


2. **Плоский шарнир.**
Шарнирно подвижная опора и шарнирно неподвижная опора

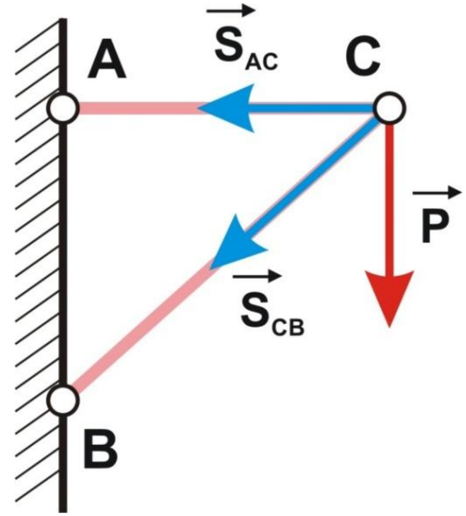


Статика. Связи и их реакции.

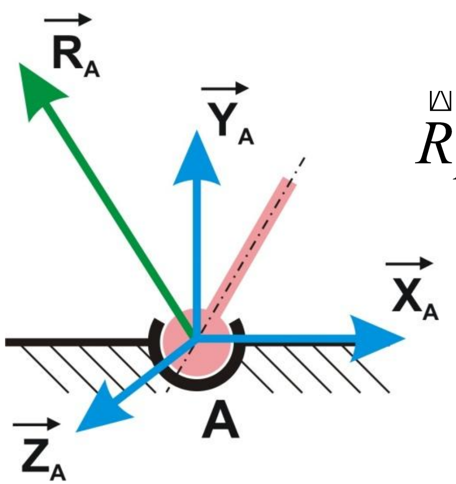
3. **Гибкая нить.**



4. **Невесомые стержни.**

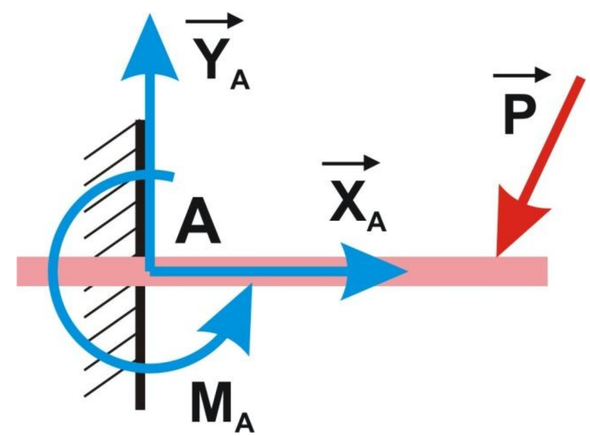


5. **Сферический шарнир.**

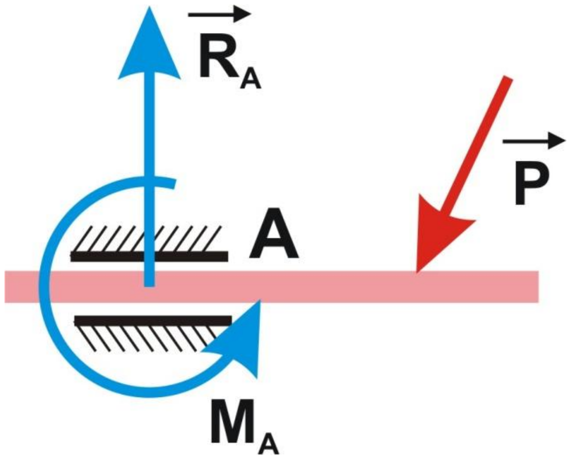


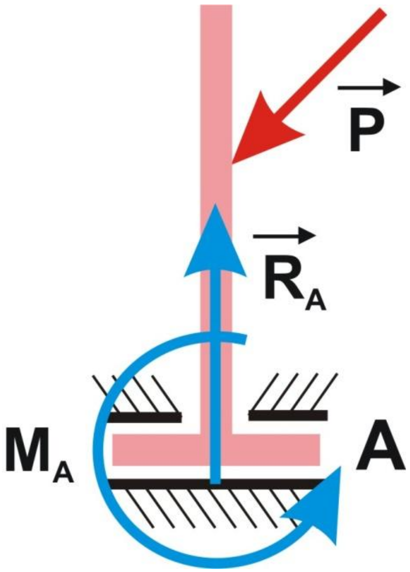
$$\vec{R}_A = \vec{X}_A + \vec{Y}_A + \vec{Z}_A$$

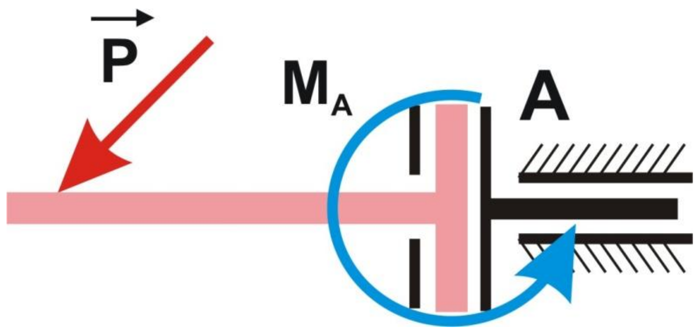
6. **Жесткая заделка.**



7. **Скользящая заделка.**



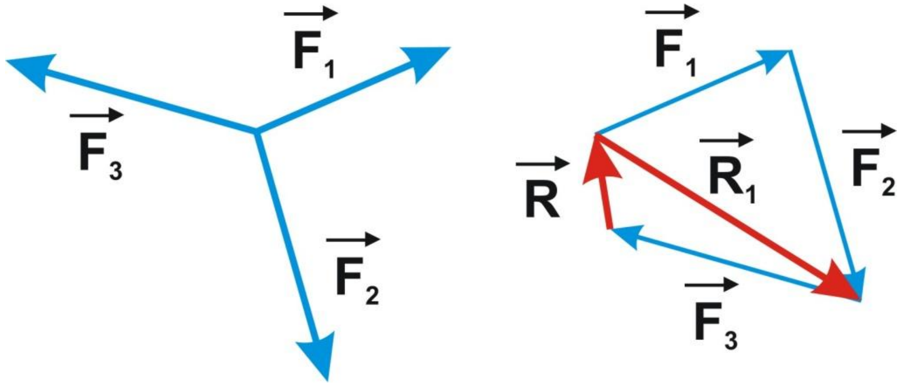




Система сходящихся сил.

Системой сходящихся сил называется такая система, линии действия которых пересекаются в одной точке.

Правило силового многоугольника. Равнодействующая нескольких сходящихся сил равна вектору, соединяющему начальную и конечную точки ломаной линии, стороны которой представляют собой данные силы.



Сложение сил по правилу силового многоугольника называется **геометрическим способом сложения сил**

Аналитический способ сложения сил.
Проекция вектора на какую-либо ось равна алгебраической сумме проекций составляющих векторов на ту же ось.

$$\vec{F}_1 = (X_1, Y_1, Z_1)$$

$$\vec{F}_2 = (X_2, Y_2, Z_2)$$

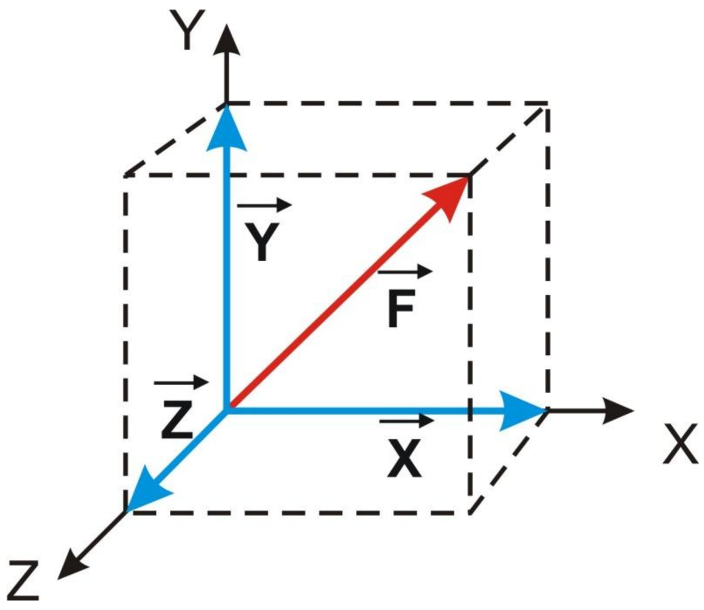
$$\vec{F}_n = (X_n, Y_n, Z_n)$$

$$R_x = X_1 + X_2 + \ldots + X_n = \sum_i X_i$$

$$R_y = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n = \sum_i Y_i$$

$$R_z = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n = \sum_i Z_i$$

$$|R| = \sqrt{R_x^{\,2} + R_y^{\,2} + R_z^{\,2}}$$



$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

Аналитическое условие равновесия системы сходящихся сил.

Для равновесия твердого тела, находящегося под действием системы сходящихся сил, необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на каждую из трех координатных осей равнялась нулю.

$$\sum_i X_i = 0 \qquad \sum_i Y_i = 0 \qquad \sum_i Z_i = 0$$

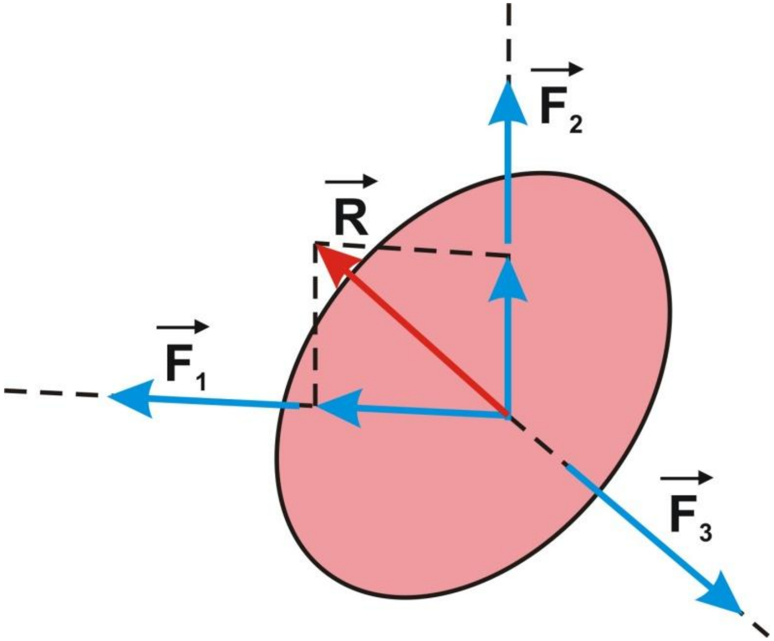
Задачи статики, в которых число неизвестных не превышает числа уравнений равновесия, называются **статически определимыми**.

Геометрическое условие равновесия системы сходящихся сил.

Для равновесия твердого тела, находящегося под действием системы сходящихся сил, необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник, построенный для этой системы, был замкнут, то есть чтобы равнодействующая этой системы равнялась нулю.

Теорема о трех силах

Если под действием трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости, твердое тело находится в равновесии, то линии действия всех этих сил пересекаются в одной точке.



$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \Rightarrow |F_3| = |R|$$

Линии действия сил F_1, F_2, F_3 пересекаются

Последовательность решения задач статики:

1. Выделяют тело, равновесие которого должно быть рассмотрено.

2. Устанавливают связи, наложенные на тело и заменяют их реакциями.

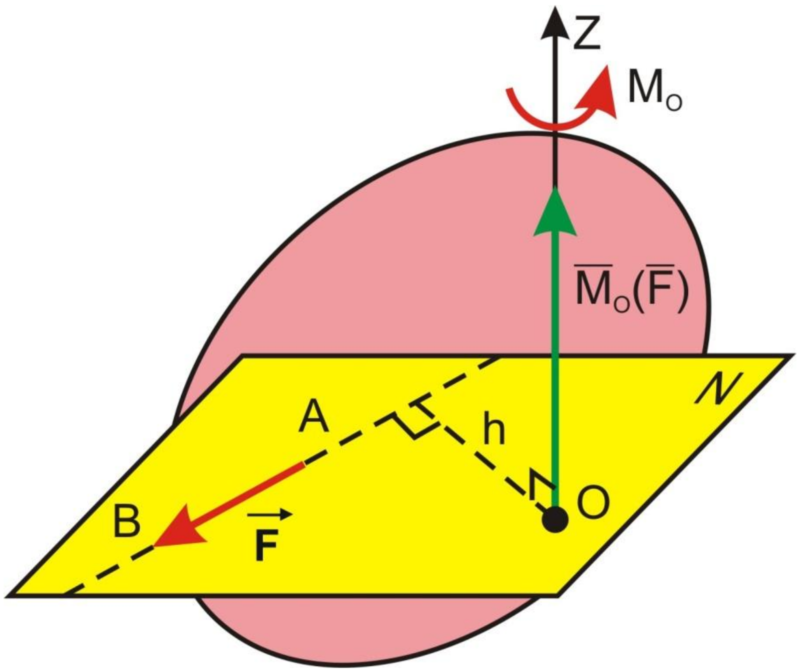
3. Изображают расчетную схему, включающую в себя:
- рассматриваемое тело;
- активные силы приложенные к телу;
- реакции связей наложенные на тело.

4. Составляют уравнения равновесия при аналитическом решении задачи или строят силовой многоугольник при геометрическом решении.

5. Определяют искомые величины (обычно, реакции связей) и проводят анализ полученных результатов.

Момент силы.

Моментом силы F относительно точки О называется вектор, приложенный в этой точке и направленный перпендикулярно к плоскости, содержащей силу и точку, так, чтобы, смотря навстречу вектору момента видеть, вращение плоскости под действием силы против часовой стрелки.



h – плечо силы F, кратчайшее расстояние от точки О до линии действия силы F.

$$\vec{M}_o(\vec{F}) = \pm\left|\vec{F}\right| h$$

Пара сил. Момент пары сил.

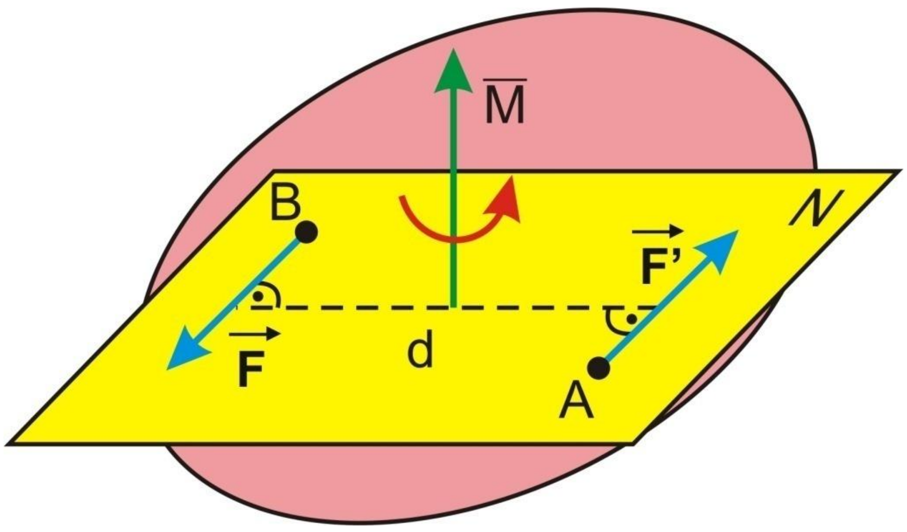
Парой сил называется система двух равных по величине, параллельных и противоположно направленных сил F и F'.
Пара сил не имеет равнодействующей, но они не уравновешиваются, так как не направлены по одной прямой. Плоскость, в которой расположены силы пары, называют **плоскостью действия пары.**

Момент пары сил F и F'

$$\left|\vec{M}(\vec{F},\vec{F}')\right| = \left|\vec{F}\right| d$$

$$\vec{M} = \vec{r}_{AB} \times \vec{F}' = \vec{r}_{BA} \times \vec{F}$$

$$\vec{M}(\vec{F},\vec{F}') = \vec{M}_A(\vec{F}') = \vec{M}_B(\vec{F})$$



Свойства пар сил

Теорема. Пары сил, лежащие в одной плоскости и имеющие одинаковые моменты, эквивалентны.

Следствие.

-Пару сил можно поворачивать и переносить в плоскости ее действия.

- Можно изменять плечо и силы пары, сохраняя алгебраическую величину момента и плоскость ее действия.

- Не изменяя действие пары сил на тело, ее можно переносить в плоскость, параллельную плоскости ее действия.

Момент пары сил – вектор свободный, характеризуется модулем и направлением, а точкой приложения может быть любая точка тела.

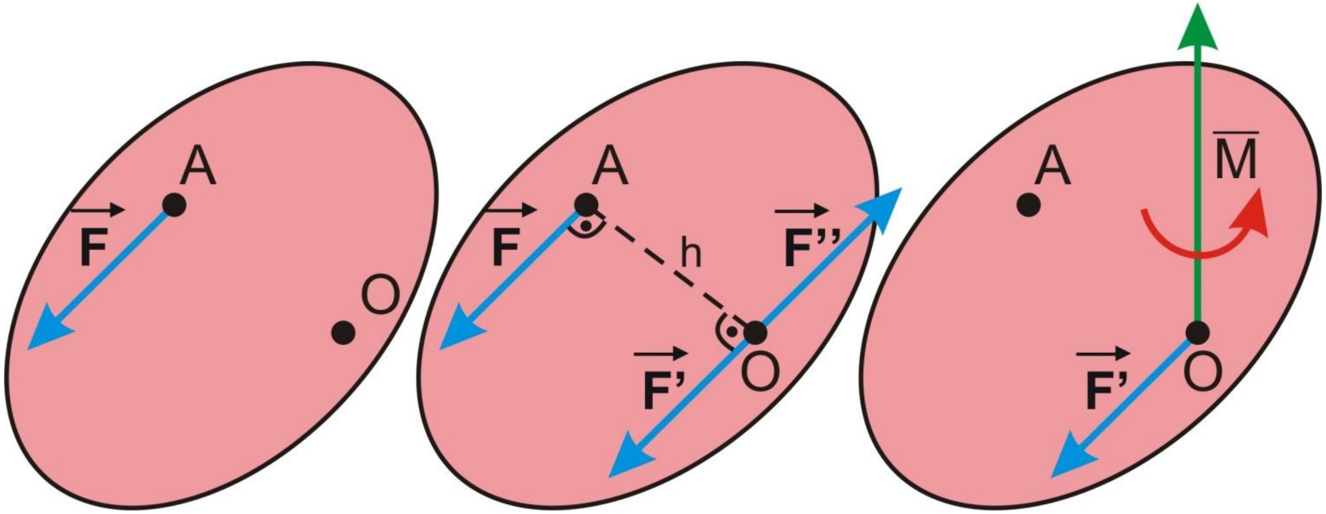
Теорема. Метод Пуансо.

Силу, не изменяя ее действия на твердое тело, можно переносить параллельно самой себе в любую точку твердого тела, добавляя при этом пару сил, момент которой равен моменту переносимой силы относительно новой точки приложения силы.

Процесс замены силы **F** силой **F’** и парой сил (**F, F”**) называют приведением силы **F** к заданному центру О.

Пару сил (**F, F”**) называют присоединенной парой сил.

$$\vec{F} = \vec{F}\,' = \vec{F}\,''$$



Сложение пар сил. Условие равновесия пар.

Теорема. Действие на тело нескольких пар сил, лежащих в произвольных плоскостях, эквивалентно действию одной пары, момент которой равен геометрической сумме моментов составляющих пар сил, то есть

$$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i$$

Условие равновесия пар сил.

Пары сил, произвольно расположенные в пространстве, взаимно уравновешиваются в том случае, если геометрическая сумма их моментов равна нулю.

$$\sum_i \vec{M}_i = 0$$

Проецируя на оси декартовой системы координат, получаем аналитические условия равновесия:

$$\sum_i M_{ix} = 0, \qquad \sum_i M_{iy} = 0, \qquad \sum_i M_{iz} = 0$$

Геометрическая сумма всех сил называется **главным вектором системы сил.** Геометрическая сумма моментов всех сил относительно заданного центра О называется **главным моментом системы сил.**

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i \qquad \vec{M}_o = \sum_i \vec{M}_{io}(\vec{F}_i)$$

В частном случае приведения, статика рассматривает условие, когда

$$\vec{R} = 0, \quad \vec{M}_o = 0$$

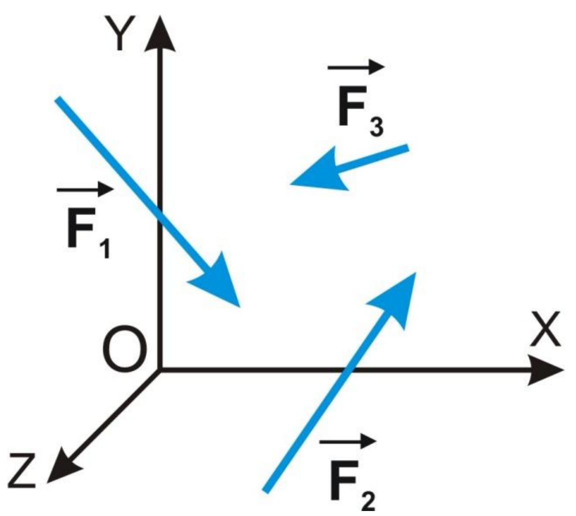
Условие равновесия системы сил.

1.Пространственная система сил.

$$\sum_i M_{ix}(\vec{F}_i) = 0 \qquad \sum_i X_i = 0$$

$$\sum_i M_{iy}(\vec{F}_i) = 0 \qquad \sum_i Y_i = 0$$

$$\sum_i M_{iz}(\vec{F}_i) = 0 \qquad \sum_i Z_i = 0$$

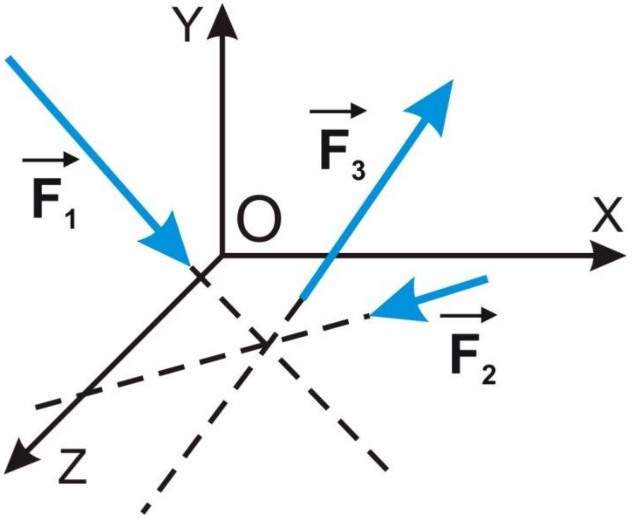


2. Пространственная система сходящихся сил.

$$\sum_i X_i = 0$$

$$\sum_i Y_i = 0$$

$$\sum_i Z_i = 0$$

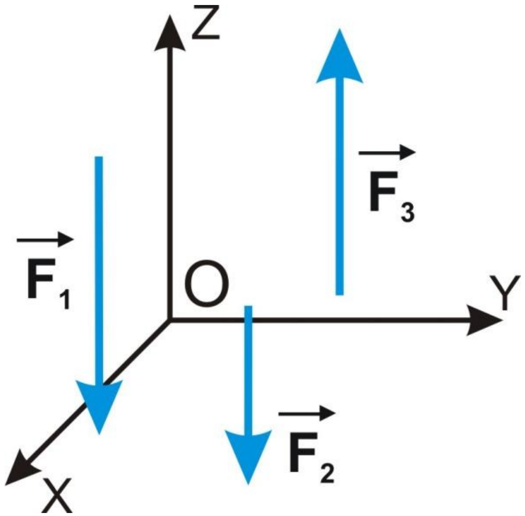


3. Пространственная система параллельных сил.

$$\sum_i M_{ix}(\vec{F}_i) = 0$$

$$\sum_i M_{iy}(\vec{F}_i) = 0$$

$$\sum_i Z_i = 0$$



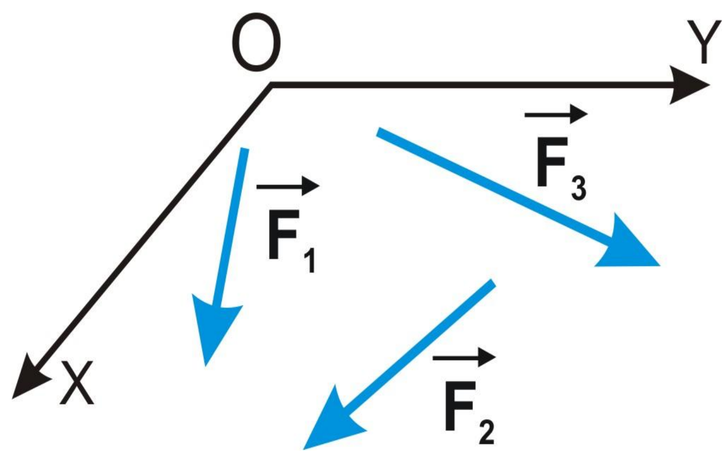
Статика. Условия равновесия системы сил.

4. Плоская произвольная система сил.

$$\sum_i X_i = 0 \qquad \sum_i Y_i = 0 \qquad \sum_i M_A(\vec{F}_i) = 0$$

$$\sum_i Y_i = 0 \qquad \sum_i M_A(\vec{F}_i) = 0 \qquad \sum_i M_B(\vec{F}_i) = 0$$

$$\sum_i M_A(\vec{F}_i) = 0 \qquad \sum_i M_B(\vec{F}_i) = 0 \qquad \sum_i M_C(\vec{F}_i) = 0$$

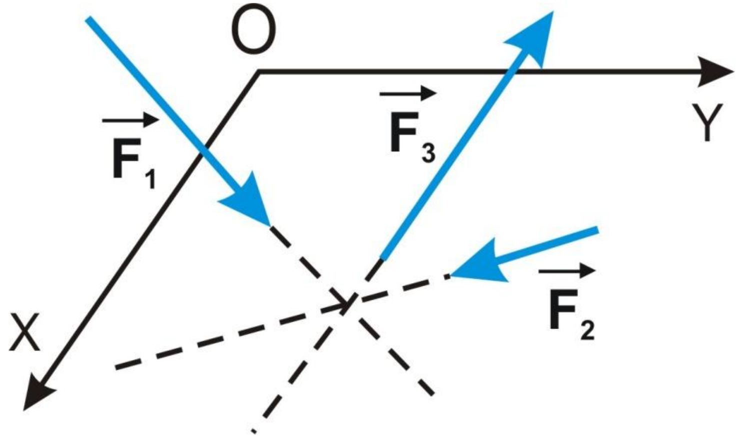


Статика. Условия равновесия системы сил.

5. Плоская система сходящихся сил.

$$\sum_i X_i = 0$$

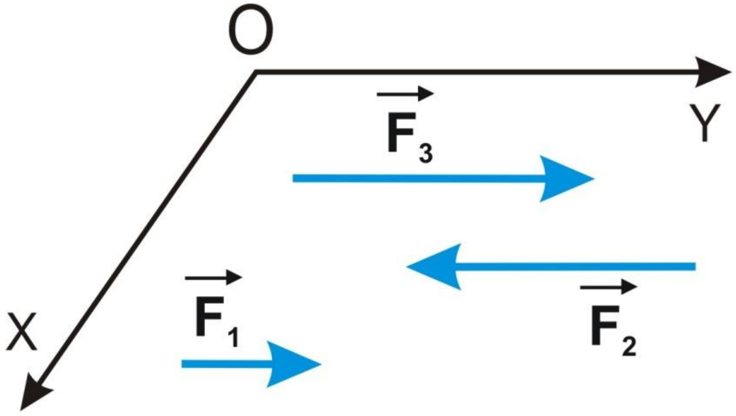
$$\sum_i Y_i = 0$$



6. Плоская система параллельных сил.

$$\sum_i Y_i = 0$$

$$\sum_i M_O(\vec{F}_i) = 0$$



Трение.

Трение скольжения. Трение сцепления.

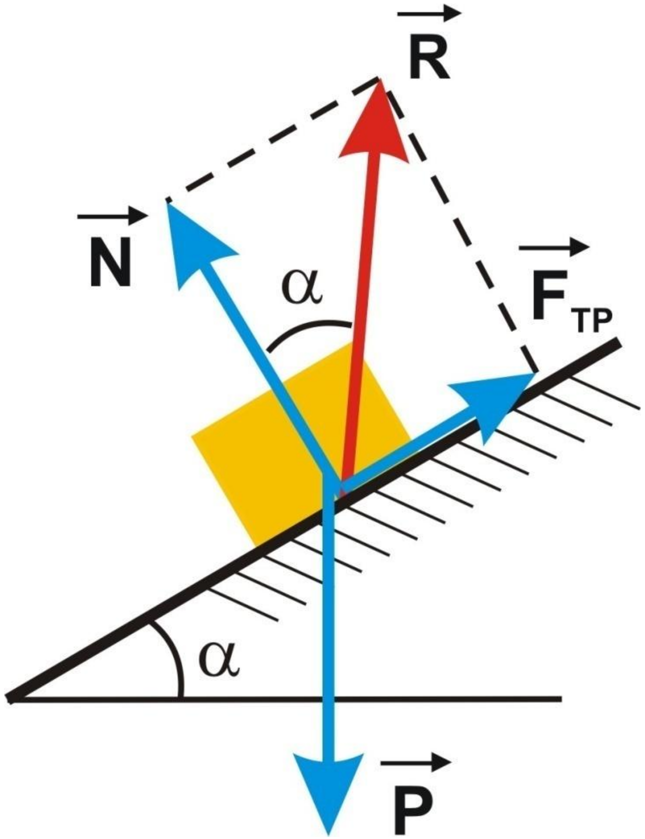
Силой трения скольжения называется сила сопротивления относительному скольжению при стремлении двигать одно тело по поверхности другого.

Максимальное значение **силы трения** равно

$$F_{тр} = fN, \qquad 0 \le F_{тр} \le fN$$

f – коэффициент трения скольжения;
α– угол трения, при котором тело начинает скользить по плоскости, град;
N – реакция гладкой поверхности, Н.

$$tg\alpha = \frac{F_{тр}}{N} = f$$



Трение.

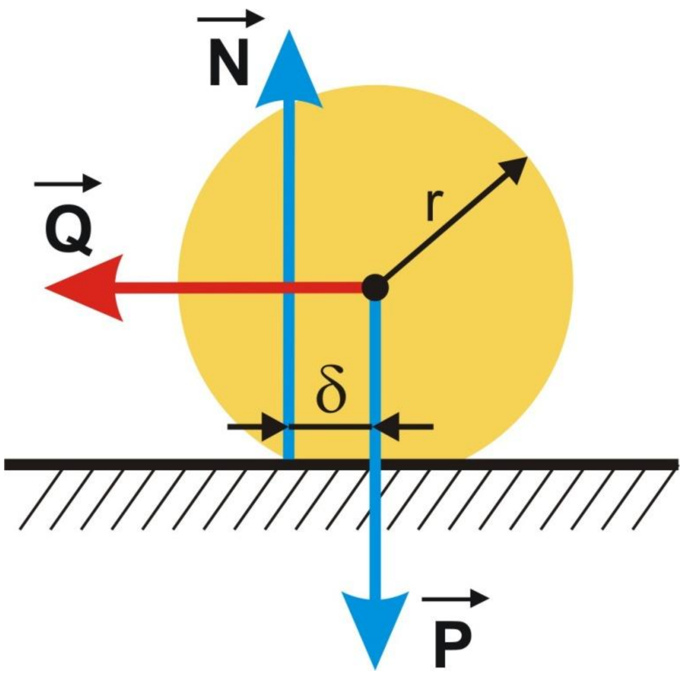
Трение качения.

Парой сил (моментом) сопротивления качению называют токай момент, который возникает при качении одного тела по поверхности другого за счет деформаций.

Условие равновесия:

$$Q \cdot r = N \cdot \delta, \qquad M_C = N \cdot \delta$$

Q – активная сила, Н;
δ − коэффициент трения качения, см;
N – реакция гладкой поверхности, Н.



Для основных материалов твердых тел:

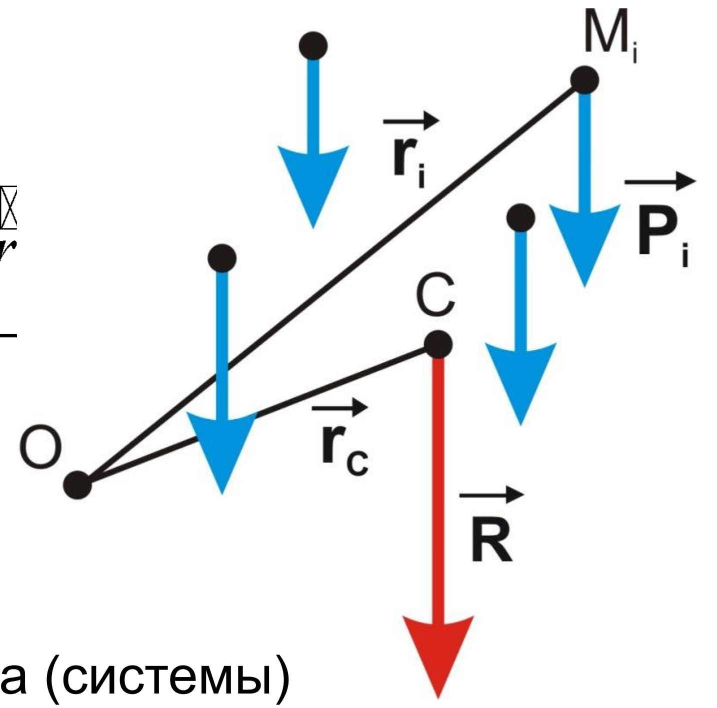
$$f \;\square\; \frac{\delta}{r}$$

Центр тяжести. Центр масс.

Центром тяжести системы называется точка приложения равнодействующей системы сил тяжести

$$\vec{r}_C \times \vec{R} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{P}_i, \qquad \vec{R} = \sum_i \vec{P}_i,$$

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_i \vec{r}_i \cdot P_i}{\sum_i P_i} \quad \text{или} \quad \vec{r}_C = \frac{\sum_i \gamma_i \cdot \Delta\tau_i \cdot \vec{r}}{P}$$



$\Delta\tau_i$ - объем частицы тела;

γ_i - удельный вес.

Координаты центра тяжести твердого тела (системы)

$$x_C = \frac{\sum_i x_i \cdot P_i}{\sum_i P_i} \qquad y_C = \frac{\sum_i y_i \cdot P_i}{\sum_i P_i} \qquad z_C = \frac{\sum_i z_i \cdot P_i}{\sum_i P_i}$$

Динамика.

Динамика материальной точки.

Динамика – раздел теоретической механики, в котором изучается движение материальных тел под действием приложенных к ним сил.

Основные законы Динамики:

Закон инерции. Материальная точка сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока действие других тел не изменит это состояние.

Закон пропорциональности силы и ускорения. Ускорение материальной точки пропорционально приложенной к ней силе и имеет одинаковое с ней направление (основное уравнение динамики).

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Закон равенства действия и противодействия. Всякому действию соответствует равное по величине, противоположно направленное противодействие.

Закон независимости действия сил.

Несколько одновременно действующих на материальную точку сил сообщают точке такое ускорение, какое сообщила бы ей одна сила, равная их геометрической сумме.

$$\vec F_1 + \vec F_2 + \ldots + \vec F_n = m\vec a \qquad . \; .,$$

$$m\vec a_1 + m\vec a_2 + \ldots + m\vec a_n = m\vec a \qquad {}_1 + {}_2 + \ldots + {}_n =$$

Дифференциальное уравнение движения свободной материальной точки.

В проекции на оси декартовой системы координат:

$$m\ddot x = X \qquad m\ddot y = Y \qquad m\ddot z = Z$$

В проекции на оси естественной системы координат:

$$m\frac{d^2S}{dt^2} = F_\tau \qquad m\frac{1}{\rho}\left(\frac{dS}{dt}\right)^2 = F_n \qquad 0 = F_b$$

Основные задачи динамики:

Прямая задача – зная уравнение движение материальной точки или системы, ее массу, определяются силы, действующие на эту точку или систему. Задача решается дифференцированием основного уравнения динамики.

Обратная задача (основная) – зная силы, действующие на данную материальную точку или систему, ее массу, начальные координаты и скорость движения, определяется уравнение движение точки или системы (закон). Задача решается интегрированием основного уравнения динамики.

$$m\ddot{x} = X \qquad m\ddot{y} = Y \qquad m\ddot{z} = Z$$

Результат первого интегрирования – скорость как функция времени

$$\dot{x} = \dot{x}(t, C_1, C_2, C_3) \qquad \dot{y} = \dot{y}(t, C_1, C_2, C_3) \qquad \dot{z} = \dot{z}(t, C_1, C_2, C_3)$$

Результат второго интегрирования – уравнения движения

$$x = x(t, C_1, C_2, \ldots, C_6) \quad y = y(t, C_1, C_2, \ldots, C_6) \quad z = z(t, C_1, C_2, \ldots, C_6)$$

Последовательность решения задач динамики:

1. Выделяют тело, движение которого должно быть рассмотрено.

2. Выбирают систему координат и устанавливают связи, наложенные на тело, заменяя их реакциями.

3. Изображают расчетную схему, включающую в себя: рассматриваемое тело, активные силы приложенные к телу, реакции связей наложенные на тело.

4. Записывают дифференциальные уравнения движения в выбранной системе координат.

5.1 Для обратной задачи динамики: интегрируют дифференциальные уравнения движения.

5.2 Для прямой задачи динамики: определяют ускорение движения тела (точки), используя ускорение определяют силы действующие на тело.

6. Из условий задачи определяют начальные условия интегрирования при $t_0=0$, рассчитывают константы интегрирования.

7. По полученным уравнениям движения определяют неизвестные

Динамика механической системы.

Динамика механической системы.

Силы, действующие на механическую систему можно разделить на «активные» и «реакции связей» или «внешние» - F^e и «внутренние» - F^j .

Движение механической системы зависит и от внешних, и от внутренних сил, поэтому основное уравнение динамики

$$\vec{F}^e + \vec{F}^j = m\vec{a}$$

Главный момент системы внутренних сил и главный вектор системы сил

$$\vec{R}^j = \sum_i \vec{F}_i^j = 0 \quad \vec{M}_0^j = \sum_i \vec{M}_{0i}^j(\vec{F}_i) = 0$$

Внутренние силы не уравновешиваются, так как приложены вдоль одной прямой к разным точкам и могут вызывать относительное перемещение этих точек.

Моменты инерции твердого тела.

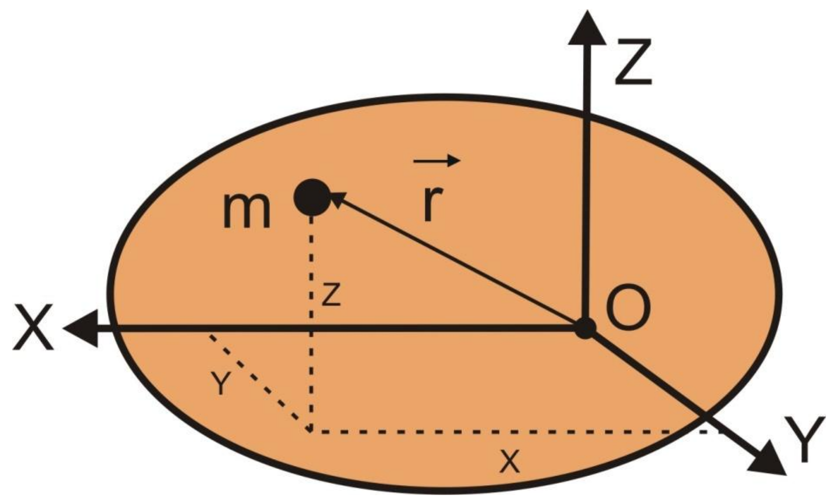
Момент инерции (I) характеризует распределение массы тела и является мерой инертности твердого тела при их вращении.

Моментом инерции твердого тела относительно оси и точки называется скалярная величина, равная сумме произведений массы каждой точки тела на квадрат расстояния от этой точки соответственно до оси и точки.

$$I_x = \sum_i m_i (z_i^2 + y_i^2)$$

$$I_z = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

$$I_y = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)$$



$$I_o = \sum_i m_i r_i^2 \qquad (кг \cdot м^2)$$

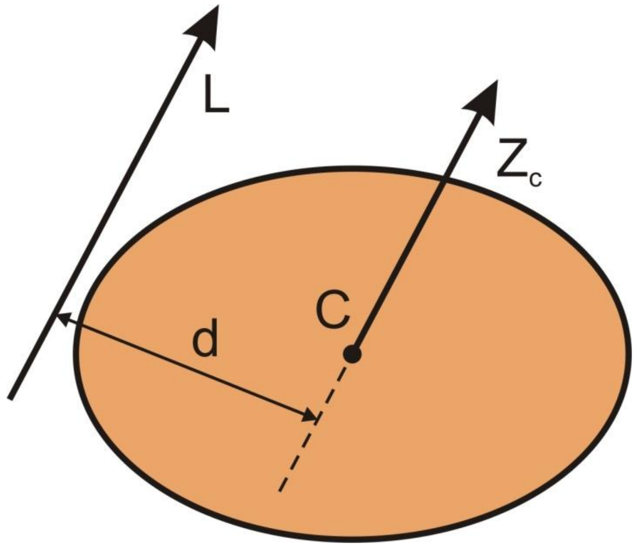
Радиус инерции.

Момент инерции относительно заданной оси, например оси Z можно представить в виде произведения массы тела ***m*** на квадрат линейной величины $\boldsymbol{i_z}$, называемой **радиусом инерции тела** относительно этой оси**:**

$$I_z = m_i \cdot i_z^2 \left(\quad \cdot \quad ^2 \right)$$

Теорема Штейнера.

Момент инерции твердого тела относительно некоторой оси равен моменту инерции твердого тела относительно параллельной оси, проходящей через центр масс, сложенному с произведением массы тела на квадрат расстояния между осями.



$$I_L = I_{cz} + md^2$$

Моменты инерции однородных тел.

Моменты инерции относительно осей проходящих через центр масс и являющихся осями симметрии (центральная ось).

Однородный тонкий стержень: Масса стержня $m = \rho \cdot S \cdot L$

где *ρ*- плотность, *S*-площадь поперечного сечения, *L*- длина.

Разобьем стержень на малые элементы *dx*, тогда $dm = \rho \cdot S \cdot dx$

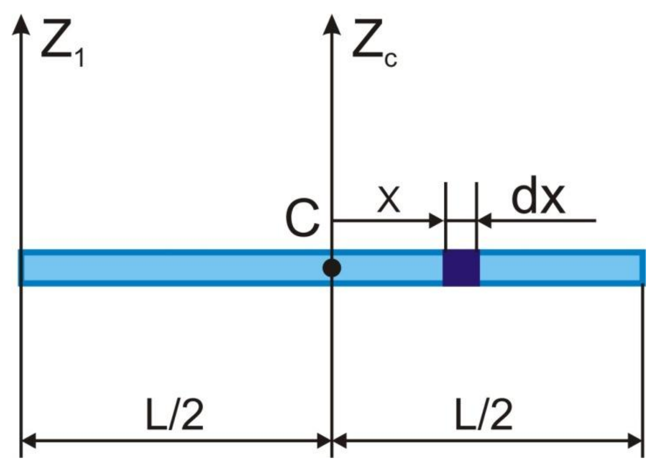
Момент инерции стержня относительно центральной оси

$$dI_{cz} = x^2 dm = \rho \cdot S \cdot x^2 dx$$

$$I_{cz} = 2\int_0^{L/2} \rho \cdot S \cdot x^2 dx = 2\rho \cdot S \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^{L/2} = 2\rho \cdot S \cdot \frac{L^3}{3 \cdot 8} = \frac{mL^2}{12} (кг \cdot м^2)$$

Согласно теореме Штейнера, момент инерции однородного стержня относительно оси Z_1:

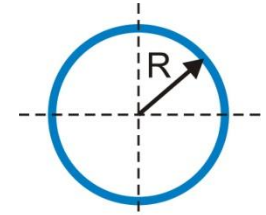
$$I_{Z_1} = \frac{mL^2}{12} + m\frac{L^2}{4} = \frac{mL^2}{3} (кг \cdot м^2)$$



Моменты инерции простейших однородных тел.

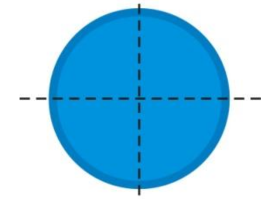
Полый тонкостенный цилиндр или кольцо с радиусом *R* и массой *m*:

$$I_z = mR^2$$



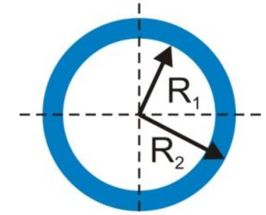
Сплошной цилиндр или диск с радиусом *R* и массой *m*:

$$I_z = \frac{mR^2}{2}$$



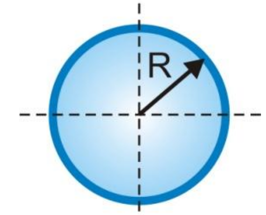
Полый толстостенный цилиндр массы *m* с внешним радиусом R_2 и внутренним радиусом R_1:

$$I_z = \frac{m(R_2^2 + R_1^2)}{2}$$



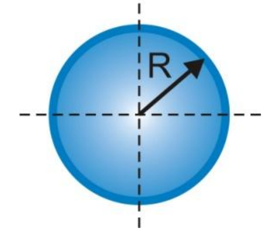
Тонкостенная сфера радиуса *R* и массы *m*:

$$I_z = \frac{2mR^2}{3}$$



Шар радиуса *R* и массы *m*:

$$I_z = \frac{2mR^2}{5}$$



Работа силы. Мощность.

Работа (*A)* силы *F* - мера действия силы, зависящая от величины и направления силы, и от перемещения точки ее приложения.
Элементарной работой *δA* силы *F* на элементарном перемещении *dr* называется скалярное произведение этой силы на *dr*

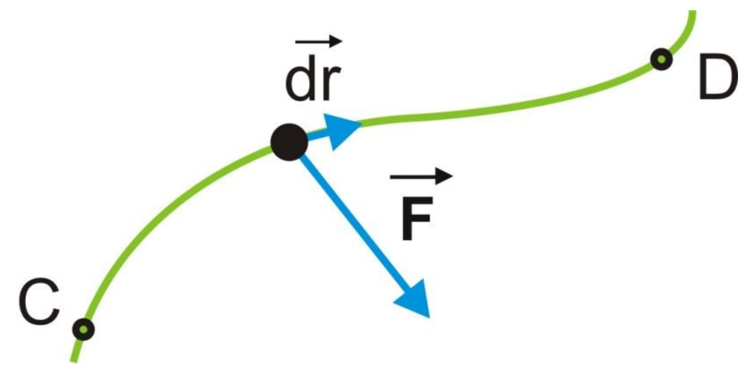
$$\delta A = \vec{F}\cdot d\vec{r} \quad \text{Дж} \quad (\quad \cdot \quad = \quad)$$

На прямолинейном участке при *F -const*:

$$A = F\cdot s\cdot\cos\left(\vec{F},\vec{s}\right)$$

Работой силы *F* при перемещении материальной точки из точки С в точку D называется:

$$A = \int_C^D \vec{F}\cdot d\vec{r}$$



Мощность (P) - физическая величина, измеряемая отношением элементарной работы *δA* к промежутку времени *dt*, в течение которого она произведена:

$$P = \frac{\delta A}{\delta t} = \frac{\vec{F}\cdot d\vec{r}}{\delta t} = \vec{F}\cdot\vec{V} \quad (\quad = \quad) \quad 750 \quad = 1 \;.\;.$$

Работа силы тяжести.

Материальная точка перемещается из точки C в точку D по произвольной траектории. Рассмотрим элементарную работу силы тяжести на элементарном перемещении *dr*

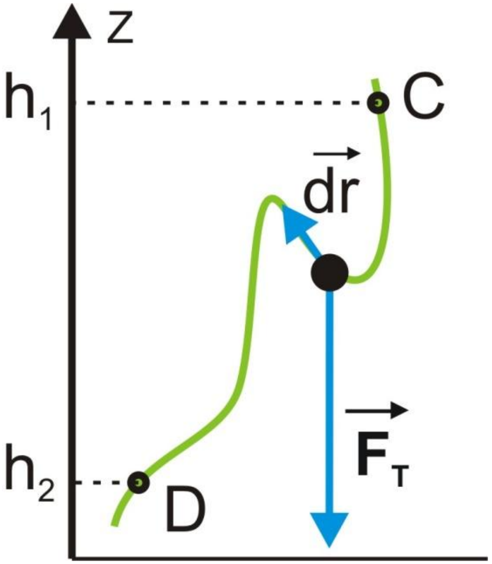
$$\delta A_T = \vec{F}_T \cdot d\vec{r} = \vec{F}_T \cdot \left(d\vec{r}\right)_F$$

где $(dr)_F$ – проекция элементарного перемещения *dr* на направление силы тяжести F_T

$$\delta A_T = \vec{F}_T \cdot (-dz) = -mg \cdot dz$$

где (−dz) - проекция элементарного перемещения *dr* на ось z .
Тогда работа силы тяжести по перемещению материальной точки из точки C в точку D будет равна:

$$A_T = \int_{h_1}^{h_2} -mg \cdot dz = -mg \int_{h_1}^{h_2} dz = mgh_1 - mgh_2$$



Отсюда следует, что работа силы тяжести не зависит от формы траектории, а определяется лишь начальным и конечным положением материальной точки в пространстве.

Работа силы трения.

Материальная точка перемещается из точки C в точку D по произвольной траектории. Рассмотрим элементарную работу силы трения на элементарном перемещении *dr*

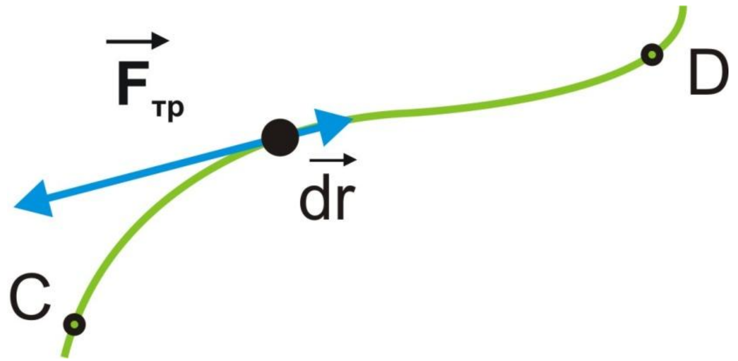
Элементарная работа силы трения:

$$\delta A_{mp} = \vec{F}_{mp} \cdot d\vec{r} = \vec{F}_{mp} \cdot dS$$

Работа силы трения при перемещении материальной точки из точки C в точку D, при постоянной F_{mp}:

$$A_{mp} = -\int_{C}^{D} F_{mp} \cdot dS = -F_{mp} \cdot S$$

Работа силы трения зависит от формы траектории.



Работа сил, приложенных к твердому телу.

Скорость при произвольном движении тела: $\vec{V} = \vec{V}_o + \vec{\omega} \times \vec{r}_i$

$\times dt$ и $\quad \vec{V} dt = \vec{V}_o dt + (\vec{\omega} \times \vec{r})_i\, dt \qquad d\vec{r}_i = d\vec{r}_o + d\vec{\varphi} \times \vec{r}_i$

$\times \vec{F}_i: \quad \delta A = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_o + \vec{F}_i \left(d\vec{\varphi} \times \vec{r}_i \right)$

Элементарная работа равнодействующей сил:

$$\delta A = \sum \delta A_i = \sum \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_o + \sum \vec{F}_i \left(d\vec{\varphi} \times \vec{r}_i \right) =$$
$$\left(\sum \vec{F}_i^e + \sum \vec{F}_i^j \right) \cdot d\vec{r} + \left(\sum \vec{F}_i^e + \sum \vec{F}_i^j \right) \left(d\vec{\varphi} \times \vec{r}_i \right)$$

Элементарная работа всех сил приложенных к телу:

$$\delta A = \left(\vec{R}^e + \vec{R}^j \right) d\vec{r}_o + \left(\vec{M}^e + \vec{M}^j \right) d\vec{\varphi}$$

Так как внутренние силы $\vec{R}^j = 0,\ \vec{M}^j = 0 \Rightarrow \delta A = \left(\vec{R}^e \right) d\vec{r}_o + \left(\vec{M}^e \right) d\vec{\varphi}$

Работа при поступательном движении:

$$\delta A = \left(\vec{R}^e \right) d\vec{r}_o \quad \text{при } \vec{R} = const \quad A = \vec{F}^e \vec{s} \qquad A = F \cdot s \cdot \cos(\vec{F}, \vec{s})$$

Работа при вращательном движении:

$$\delta A = \left(\vec{M}_o^e \right) d\vec{\varphi} \quad \text{при } \vec{M} = const \quad A = \vec{M}_o^e \vec{\varphi} \qquad A = M_o^e \left(\varphi - \varphi_o \right)$$

Работа при плоском движении:

$$A = \left(\vec{R}^e \right) d\vec{r}_o + \left(\vec{M}^e \right) d\vec{\varphi}$$

Кинетическая энергия.

Кинетическая энергия точки определяется как половина произведения массы на квадрат величины ее скорости. Кинетическая энергия механической системы равна сумме энергий отдельных ее точек.

$$T = \frac{mV^2}{2} \text{ Дж} \qquad T = \sum_i \frac{m_i V_i^2}{2} \quad \left(V \cdot V = \frac{V^2}{c^2} = \quad \cdot \quad = \right), \qquad {}_i = {}_o + {}_{ir}$$

Теорема Кёнига. Кинетическая энергия механической энергии равна сумме кинетической энергии центра масс системы, масса которой равна массе всей системы, и кинетической энергии этой системы в ее относительном движении вокруг центра масс.

$$T = \sum_i \frac{m_i V_i^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_i m_i V_i \cdot V_i = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(V_c + V_{ir}\right)\left(V_c + V_{ir}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i m_i V_c^2 + \sum_i m_i V_c \cdot V_{ir} + \frac{1}{2} \sum_i m_i V_{ir}^2$$

$$m.\kappa. \sum_i m_i r_i = m_i r_c \Rightarrow \sum_i m_i V_{ir} = 0 \qquad T = \frac{1}{2} \sum_i m_i V_c^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i V_{ir}^2$$

Кинетическая энергия твердого тела.

Кинетическая энергия – мера механического движения, поэтому вид формул зависит от вида движения твердого тела.

Кинетическая энергия при поступательном движении:

$$T = \sum_i \frac{m_i V_i^2}{2} = \frac{mV^2}{2}$$

Кинетическая энергия при вращательном движении:

$$T = \sum_i \frac{m_i V_i^2}{2} = \sum_i \frac{m_i V_{ir}^{\ 2}}{2} = \sum_i \frac{m_i \left(\omega R_i\right)^2}{2}$$

$$т.к. \qquad I_z = \sum_i m_i R_i^2 \qquad => \qquad T = \frac{I_z \omega^2}{2}$$

Кинетическая энергия при плоском движении:

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i V_c^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i V_{ir}^2 = \frac{mV_c^2}{2} + \frac{I_{cz}\omega^2}{2}$$

Если плоское движение представить в виде вращательного вокруг мгновенного центра скоростей, то согласно теореме Штейнера

$$T = \frac{I_{Pz}\omega^2}{2}$$

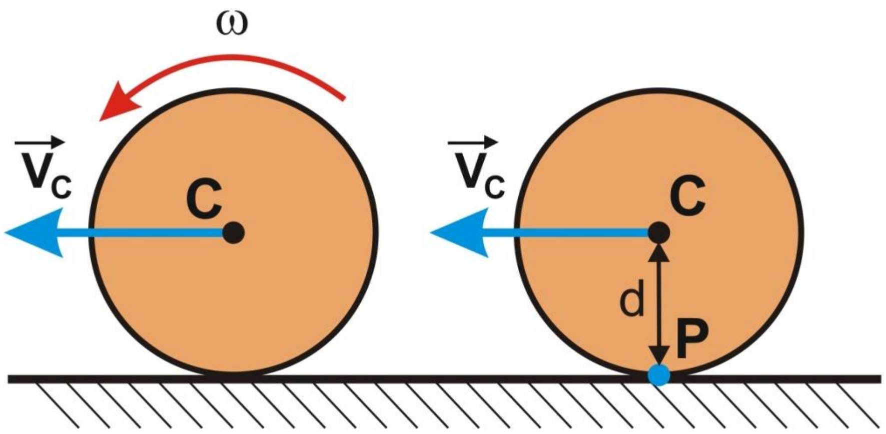
где I_{pz} – момент инерции относительно оси z, проходящей через мгновенный центр скоростей P.

Пример: Момент инерции однородного диска относительно центральной оси

$$I_{cz} = \frac{mR^2}{2} \Rightarrow \quad T = \frac{mV_c^2}{2} + \frac{I_{cz}\omega^2}{2} = \frac{mV_c^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\frac{V_c^2}{d^2} = \frac{mV_c^2}{2} + \frac{mV_c^2}{4} = \frac{3(mV_c^2)}{4}$$

$$I_{Pz} = I_{cz} + md^2 = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2 \Rightarrow$$

$$T = \frac{I_{Pz}\omega^2}{2} = \frac{3}{2}mR^2\frac{1}{2}\frac{V_c^2}{d^2} = \frac{3(mV_c^2)}{4}$$



Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки.

Изменение кинетической энергии материальной точки на некотором ее перемещении равно работе силы, действующей на точку, на том же перемещении.

$$m\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}; \qquad m\frac{d\vec{V}}{dt}\cdot d\vec{r} = \vec{F}\cdot d\vec{r}; \qquad m\frac{d\vec{V}}{dt}\cdot \vec{V}dt = \vec{F}\cdot d\vec{r};$$

$$m\cdot \vec{V}d\vec{V} = \vec{F}\cdot d\vec{r}; \qquad m\cdot d\frac{\vec{V}^2}{2} = \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Интегрируем полученное выражение:

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_o^2}{2} = A$$

Теорема об изменении кинетической энергии механической системы.

Изменение кинетической энергии механической энергии на некотором ее перемещении равно сумме работ внешних и внутренних сил, действующих на систему, на том же перемещении.

Запишем уравнение теоремы для каждой точки системы:

$$\frac{m_i V_i^2}{2} - \frac{m_i V_{io}^2}{2} = A_i^e + A_i^j \qquad (i = 1, 2..., n)$$

Суммируем записанные выражения по всем точкам системы:

$$T - T_o = \sum_i A_i^e + \sum_i A_i^j$$

В частном случае твердого тела при $\sum_i A_i^j = 0$

$$T - T_o = \sum_i A_i^e$$

Принцип Даламбера для материальной точки.

При движении точки в любой момент времени геометрическая сумма активных сил, реакций связи и силы инерции равна нулю.

$$\vec{F}^a + \vec{N} = m\vec{a},$$

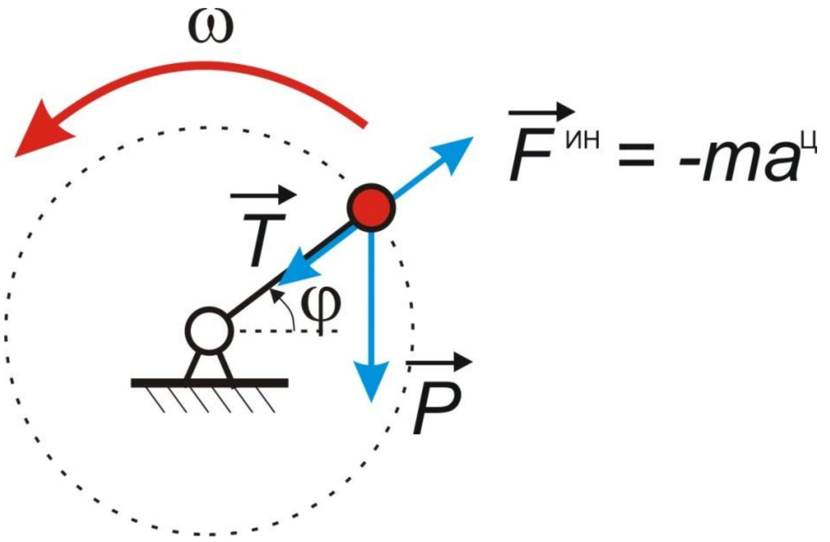
$$\vec{F}^a + \vec{N} - m\vec{a} = 0,$$

Дано: P=9,8 (Н), L=1 (м), ω=8 (1/с), ϕ=90 (град)
Найти: T-?

$$T + P\cdot\sin\varphi - m\vec{a}^{ц} = 0$$

$$где \quad m\vec{a}^{ц} = m\omega^2 L = \frac{P}{g}\omega^2 L =>$$

$$T = \frac{P}{g}\omega^2 L - P\cdot\sin\varphi =$$



Принцип Даламбера для системы материальных точек.

Если в любой момент времени к каждой точке механической системы, кроме действующих на нее внешних и внутренних сил, добавить силы инерции этих точек, то полученная система сил будет уравновешенная.

$$\vec{F}_i^{e} + \vec{F}_i^{j} + \vec{F}_i^{ин} = 0$$

$\vec{F}_i^{e}, \vec{F}_i^{j}$ – равнодействующие внешних и внутренних сил.

$\vec{F}_i^{ин} = -m_i \vec{a}_i$ – сила инерции точки.

Момент сил относительно произвольного центра.

$$M_o\left(\vec{F}_i^{ин}\right)+M_o\left(\vec{F}_i^{\,j}\right)+M_o\left(\vec{F}_i\right)=0$$

Рассматривая принцип Даламбера для системы точек

$$\sum\vec{F}_i^{ин}+\sum\vec{F}_i=0$$

$$M_o\left(\vec{F}_i^{ин}\right)+M_o\left(\vec{F}_i\right)=0$$

Главный вектор и главный момент внутренних сил = 0

$$\sum M_o\left(\vec{F}_i^{\,j}\right)=0 \qquad \sum\vec{F}_i^{\,j}=0$$

Силы инерции приложенные к твердому телу.

При поступательном движении силы инерции точек твердого тела приводятся к равнодействующей, равной

$$\vec{F}_i^{ин} = -m\vec{a}_c$$

При вращательном движении (центр масс тела лежит на оси вращения) силы инерции точек твердого тела приводятся к паре сил с моментом, равным

$$M_c\left(\vec{F}_i^{ин}\right) = -I_{cz} \cdot \varepsilon$$

При плоском движении твердого тела система сил инерции точек приводится к силе приложенной в центре масс тела и паре сил

$$\vec{F}_i^{ин} = -m\vec{a}_c \qquad M_c\left(\vec{F}_i^{ин}\right) = -I_{cz} \cdot \varepsilon$$

Связи.

Связями в динамике считают любого вида ограничения, которые налагаются на положения и на скорости точек механической системы и выполняются независимо от того, какие силы действуют на систему.

Математически связи выражаются уравнениями и неравенствами, зависящие от координат скоростей точек и времени

$$f'(x_i, y_i, z_i, \ldots \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, t) = 0,$$

$$f''(x_i, y_i, z_i, \ldots \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, t) > 0.$$

Классификация связей.

1. Связи, не изменяющиеся с течением времени называются ***стационарными***, а изменяющиеся – ***нестационарными*** (функция времени- t).

2. Связи, налагающие ограничения только на координаты точек системы называются ***геометрическими***, а налагающие ограничения еще и на скорости точек ***кинематическими*** **(*дифференциальными*)**.

3. Связи, налагающие ограничения, которые сохраняются при любом положении механической системы, называются ***удерживающими*** (математически выражаются уравнениями), связи от которых система может освободится – ***неудерживающими*** (математически выражаются неравенствами).

Возможные (виртуальные перемещения).

Возможным перемещением механической системы называют любую совокупность элементарных перемещений ее точек из занимаемого в данный момент времени положения, которые допускаются всеми наложенными на систему связями.

Действительные перемещения $d\vec{r}_i$ (реальные) за время dt

Возможные перемещения $\delta\vec{r}_i$

Число независимых между собой возможных перемещений механической системы называется ***числом степеней свободы*** системы.

Возможная работа.

Элементарная работа, которая на материальную точку сила могла бы совершать на возможном перемещении этой точки.

Работа активной силы δA_i^a, работа реакций связей δA_i^r

Для идеальных связей $\sum \delta A_i^r = 0$

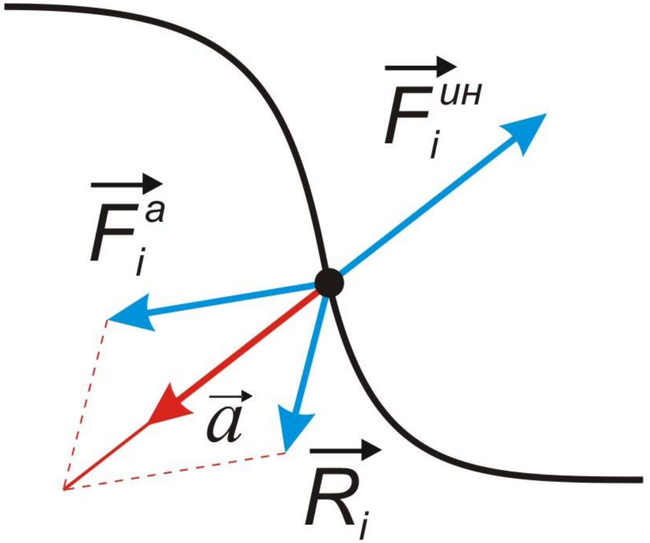
Принцип возможных перемещений.

Для равновесия механической системы с идеальными стационарными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех действующих на нее активных сил на любом возможном перемещении системы была равна нулю $\sum \delta A_i^a = 0$

Принцип Даламбера - Лагранжа.

Представляет собой совмещение принципа Даламбера и принципа возможных перемещений.

Рассмотрим движение системы материальных точек.
Связи наложенные на систему- ***идеальные***



$\vec{F}_i^a$ - равнодействующая активных сил;

$\vec{R}_i$ - равнодействующая реакций связей;

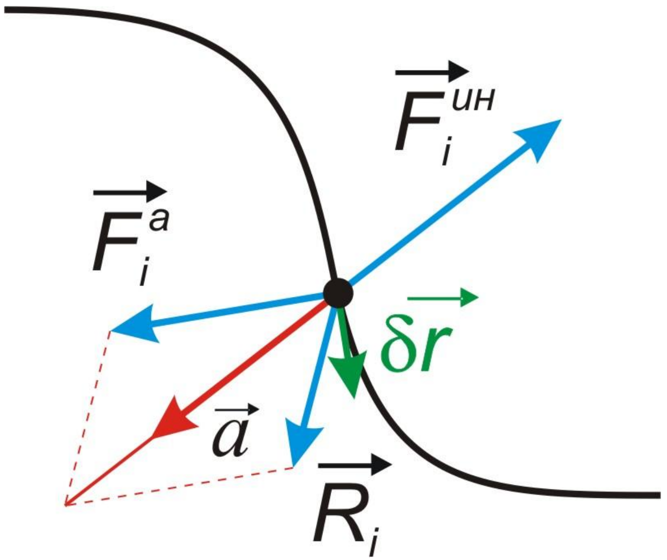
$\vec{F}_i^{ин} = -m\vec{a}$ - сила инерции системы.

Динамика. Общее уравнение динамики.

Согласно принципу Даламбера, для механической системы имеет место уравнение:

$$\sum \vec{F}_i^{\,ин} + \sum \vec{F}_i = 0$$

$$\text{или} \quad \sum \vec{F}_i^{\,a} + \sum \vec{R}_i + \sum \vec{F}_i^{\,ин} = 0$$



Придадим точкам системы возможные перемещения $\delta\vec{r}_i$

Сумма работ всех сил на возможном перемещении должна быть равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}_i^{\,a} + \vec{R}_i + \vec{F}_i^{\,ин}\right)\cdot\delta\vec{r}_i = 0$$

Для идеальных связей: $$\sum_{i=1}^{n} \vec{R}_i \cdot \delta \vec{r} = 0$$

Следовательно: $$\sum_{i=1}^{n} \left(\vec{F}_i^{a} + \vec{F}_i^{ин} \right) \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{a}$ – элементарная работа равнодействующей активных сил, приложенных к точке, на возможном перемещении $\delta \vec{r}_i$

$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{ин}$ – элементарная работа равнодействующей силы инерции материальной точки, на возможном перемещении $\delta \vec{r}_i$

Общее уравнение динамики.

В любой момент времени сумма работ всех активных сил и сил инерции материальных точек несвободной механической системы с идеальными связями на любом возможном ее перемещении равна нулю.

$$\sum_{i=1}^{n} \delta A_i^{ан} + \sum_{i=1}^{n} \delta A_i = 0$$