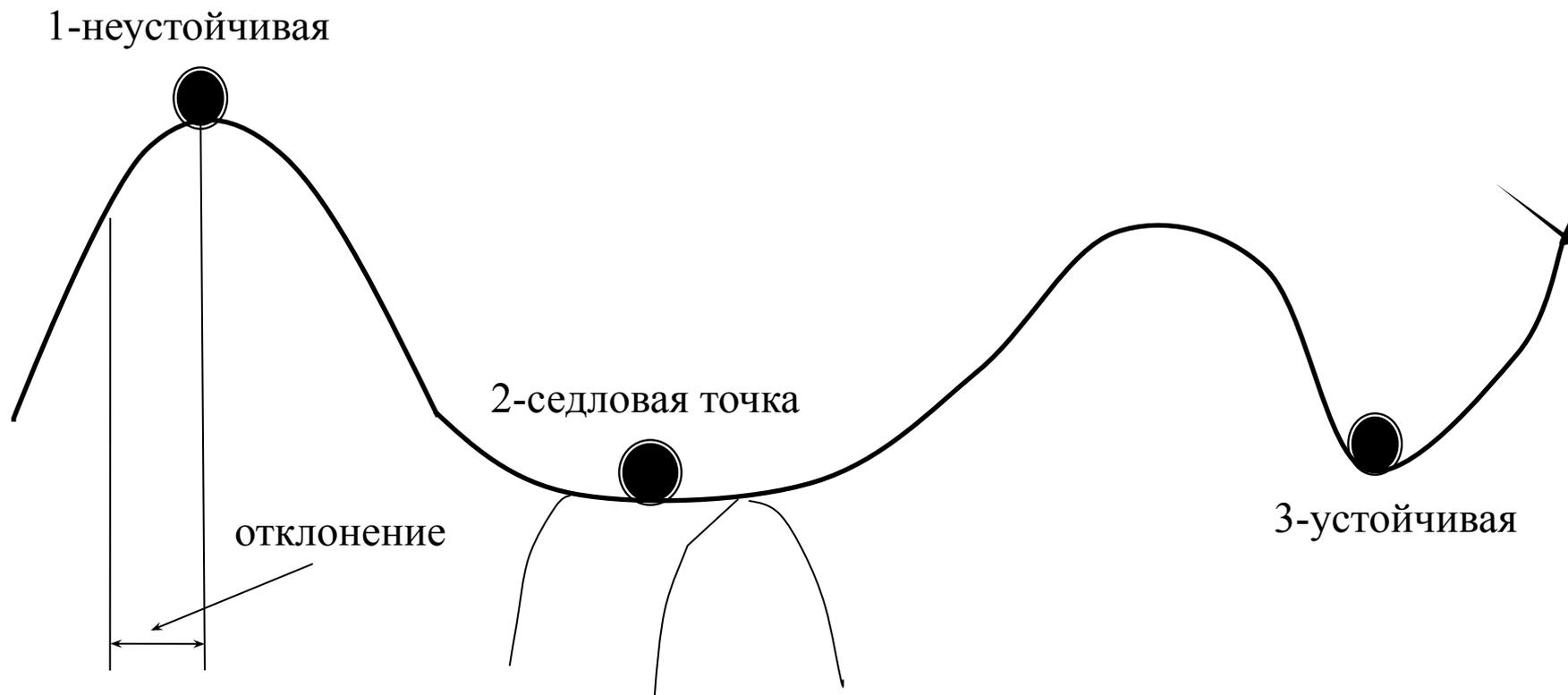


Устойчивость точки покоя



Математические определения устойчивости

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n,$$

Пусть все f_i и $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ непрерывны при $t_0 \leq t < \infty$.

Решение $x = \varphi(t)$ системы называется устойчивым по Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всякого решения $x(t)$ той же системы, начальное значение которого удовлетворяет неравенству

$$|x(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta,$$

при всех $t \geq t_0$ выполняется неравенство

$$|x(t) - \varphi(t)| < \varepsilon.$$

Решение $\varphi(t)$ называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво по Ляпунову и, кроме того, все решения с достаточно близкими начальными условиями неограниченно приближаются к $\varphi(t)$ при $t \rightarrow +\infty$.

$$x(t) - \varphi(t) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow +\infty).$$

Точки покоя системы

Имеем систему ДУ

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = f_i(\bar{x}), \quad i=1, n \quad \text{и} \quad \bar{x} = (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

Считаем точкой покоя $\bar{x}^0 = (x_1^0(t), \dots, x_n^0(t))$

$$\text{т.е.} \quad \frac{dx_i(t)}{dt} = f_i(\bar{x}^0) = 0$$

t может быть $0, 1, \dots, +\infty$.

Определяем точки покоя из системы

$$f_i(\bar{x}) = 0 \quad i=1, n$$

Устойчивость точки покоя

Точка покоя \bar{X}^0 является устойчивой
если все собственные числа матрицы A
(или корни уравнения $\det(A - \lambda I) = 0$) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$
имеют $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$ $i = 1, n$.

Матрица $A = \{a_{ij}\}$, где $a_{ij} = \left. \frac{\partial f_i(\bar{X})}{\partial X_j} \right|_{\bar{X}^0}$

Пример расчета

ПРИМЕР 1. Исследовать устойчивость положений равновесия с помощью системы первого приближения автономной системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - 2x - y^2, \\ \dot{y} = e^{-4x} - 1. \end{cases}$$

△ Найдем сначала положения равновесия системы. Для этого необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases} 1 - 2x - y^2 = 0, \\ e^{-4x} - 1 = 0. \end{cases}$$

Получаем два положения равновесия: $(0, 1)$ и $(0, -1)$.

Исследуем устойчивость положения равновесия $(0, 1)$. С этой целью в автономной системе сделаем замену $y - 1 = y_1$ и правые части полученной системы разложим по формуле Тейлора в окрестности точки $(0, 0)$, являющейся положением равновесия новой системы. Имеем

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - 2x - (1 + y_1)^2 = -2x - 2y_1 - y_1^2, \\ \dot{y}_1 = -4x + o(x). \end{cases}$$

Матрица

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

имеет собственные значения $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -4$. Следовательно, положение равновесия $(0, 1)$ является неустойчивым.

Для исследования устойчивости второго положения равновесия $(0, -1)$ в заданной системе сделаем замену $y + 1 = y_1$. Тогда точка $(0, -1)$ перейдет в точку $(0, 0)$ и можно в окрестности $(0, 0)$ разложить по формуле Тейлора правые части новой системы. Получаем

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - 2x - (y_1 - 1)^2 = -2x + 2y_1 - y_1^2, \\ \dot{y}_1 = -4x + o(x). \end{cases}$$

Матрица

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

имеет собственные значения $\lambda_1 = -1 + i\sqrt{7}$, $\lambda_2 = -1 - i\sqrt{7}$. Следовательно, положение равновесия $(0, -1)$ является асимптотически устойчивым. ▲

В тех случаях, когда вещественные части всех собственных значений матрицы A неположительны, причем хотя бы одно собственное значение A имеет вещественную часть равную нулю, исследование устойчивости положений равновесия нелинейной автономной системы с помощью системы первого приближения, как правило невозможно, так как начинают влиять нелинейные члены. В таких случаях используют метод функций Ляпунова

Преобразование Лапласа

изображение по Лапласу $F(p)$ функции $f(t)$ задается формулой

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt .$$

Оно определено для функций $f(t)$, равных нулю при $t < 0$.

Свойства преобразования Лапласа

Будем обозначать: $f(t)$, $g(t)$, $x(t)$, ... – оригиналы,
 $F(p)$, $G(p)$, $X(p)$, ... – их изображения.

1) Линейность изображения.

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \doteq \alpha F(p) + \beta G(p)$$

2) Теорема подобия.

$$f(\alpha t) \doteq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right), \quad \forall \alpha > 0$$

3) Теорема запаздывания (оригинала)

$$f(t - \alpha) \doteq e^{-\alpha p} \cdot F(p)$$

4) Теорема сдвига (запаздывания изображения).

$$F(p - \alpha) \doteq e^{\alpha t} \cdot f(t) .$$

5) Дифференцирование оригинала

Если $f(t)$, $f'(t)$, ..., $f^{(n)}(t)$ – оригиналы, то

$$f'(t) \doteq p \cdot F(p) - f(0) ,$$

$$f''(t) \doteq p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0) - f'(0) ,$$

$$f'''(t) \doteq p^3 \cdot F(p) - p^2 \cdot f(0) - p \cdot f'(0) - f''(0) ,$$

.....

$$f^{(n)}(t) \doteq p^{(n)} \cdot F(p) - p^{(n-1)} \cdot f(0) - p^{(n-2)} \cdot f'(0) - \dots - p \cdot f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) ,$$

где $f^{(k)}(0) = \lim_{t \rightarrow +0} f^{(k)}(t) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$

6) Дифференцирование изображения

$$F'(p) \doteq -t \cdot f(t),$$

$$F''(p) \doteq t^2 \cdot f(t),$$

$$F'''(p) \doteq -t^3 \cdot f(t),$$

.....

$$F^{(n)}(p) \doteq (-t)^{(n)} \cdot f(t).$$

7) Интегрирование оригинала

Если $f(t)$ – оригинал, то

$$g(t) = \int_0^t f(t) dt \quad \text{оригинал}$$

$$L \left[\int_0^t f(t) dt \right] = \frac{F(p)}{p}$$

Таблица преобразований Лапласа

Таблица преобразований Лапласа

Оригинал $f(t)$	Дельта- функция	$1(t)$	t	t^2	e^{-at}	$\sin\omega t$	$\cos\omega t$
Изображение $F(p)$	1	$\frac{1}{p}$	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{2}{p^3}$	$\frac{1}{p+a}$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$

Оригинал $f(t)$	$e^{-at} \sin\omega t$	$e^{-at} \cos\omega t$	$t e^{-at}$	$t \sin\omega t$	$t \cos\omega t$
Изображение $F(p)$	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$	$\frac{1}{(p+a)^2}$	$\frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$

Восстановление оригиналов по изображениям

Не менее важным, чем прямое преобразование Лапласа, для приложений является обратное преобразование, позволяющее по изображению восстанавливать соответствующий оригинал. Можно указать целый ряд подходов к этой операции. «Движителем» их является интегральный оператор обратного преобразования Лапласа. Однако сложности, возникающие при практической реализации интегральных операций, настолько велики, что подобный подход оказывается, скорее, инструментом теоретических обсуждений, нежели основой инженерной деятельности. Поэтому на практике прибегают к более частным, но простым приемам, тем не менее охватывающим широкий круг прикладных задач.

Наиболее простой подход основан на использовании обширных справочных материалов, в которых сосредоточено большое количество функций-оригиналов и соответствующих им изображений. Если таковые отсутствуют, можно прибегнуть к услугам современных многочисленных пакетов прикладных программ, включающих в себя процедуры вычисления обратного преобразования Лапласа. Ограничим рассмотрение случаями, в которых изображения являются дробно-рациональными функциями комплексной переменной s .

Итак, пусть

$$\tilde{y}(s) = \frac{B_m(s)}{A_n(s)} = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_ms^m}{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + s^n}, \quad n > m.$$

Распространенный способ аналитического вычисления оригинала по изображению заключается в разложении функции $\frac{B_m(s)}{A_n(s)}$ на элементарные слагаемые, совпадающие с полученными выше изображениями элементарных функций или пропорциональные им. В результате оригинал $y(t) = L^{-1}\{\tilde{y}(s)\}$ находится как линейная комбинация соответствующих элементарных функций. Проиллюстрируем существо этого подхода в следующих ситуациях.

Примеры расчетов

Решить дифференциальное уравнение: $\ddot{x} - 2\ddot{x} + 5\dot{x} = 0$ с начальными условиями: $x(0) = \dot{x}(0) = 0, \ddot{x}(0) = 1$. Пусть $\mathcal{L}[x(t)] = \tilde{x}(s)$, преобразуем по Лапласу исходное дифференциальное уравнение $s^3 \tilde{x}(s) - s - 2(s^2 \tilde{x}(s) - 1) + 5s \tilde{x}(s) = 0$. Отсюда найдем, что

$$\tilde{x}(s) = \frac{s-2}{s(s^2-2s+5)}.$$

Для определения оригинала изображение $\tilde{x}(s)$ разложим на элементарные слагаемые, представив $\tilde{x}(s) = \frac{-0,4}{s} + \frac{0,4s+0,2}{s^2-2s+5}$. Эти слагаемые преобразуем так, чтобы они соответствовали изображениям элементарных функций: $\tilde{x}(s) = \frac{-0,4}{s} + \frac{0,4(s-1)}{(s-1)^2+4} + \frac{0,6}{(s-1)^2+4}$, поэтому $x(t) = -0,4 + e^t(0,4\cos 2t + 0,3\sin 2t)$.

Примеры расчетов

Найти решение интегрального уравнения: $x(t) = \int_0^t x(t)dt + e^{-3t}$.

Преобразуем по Лапласу это уравнение и пусть $\mathcal{L}[x(t)] = \tilde{x}(s)$,

тогда $\tilde{x}(s) = \frac{\tilde{x}(s)}{s} + \frac{1}{s+3}$. Отсюда найдем $\tilde{x}(s) = \frac{s}{(s-1)(s+3)} = \frac{0,25}{s-1} + \frac{0,75}{s+3}$, поэтому $x(t) = 0,25e^t + 0,75e^{-3t}$. Этот же результат,

минуя процедуру разложения на элементарные слагаемые, легко достигается на основании формулы Хевисайда, если учесть, что

$$\frac{d}{ds} [(s-1)(s+3)] = 2s + 2$$

Использование преобразование Лапласа

Решение задачи Коши для линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_0x = f(t),$$
$$x^{(k)}(0) = \xi_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Применяя преобразование Лапласа к обеим частям уравнения и используя теорему о дифференцировании оригинала, приходим к уравнению

$$(p^n X(p) - p^{n-1}\xi_0 - p^{n-2}\xi_1 - \dots - p\xi_{n-2} - \xi_{n-1}) +$$
$$+ a_{n-1}(p^{n-1}X(p) - p^{n-2}\xi_0 - \dots - \xi_{n-2}) + \dots + a_1(pX(p) - \xi_0) +$$
$$+ a_0X(p) = F(p),$$

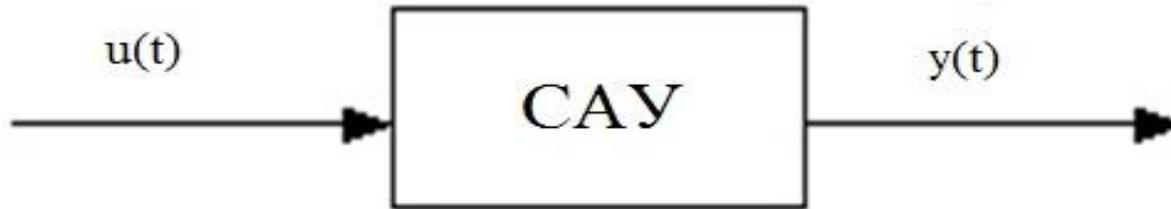
$$x(t) \doteq X(p), \quad f(t) \doteq F(p).$$

Преобразуя, получаем

$$L(p)X(p) - \Psi(p) = F(p),$$

$$X(p) = \frac{\Psi(p) + F(p)}{L(p)}.$$

Модель вход-выход



Связь между входным сигналом $u(t)$ и выходным $y(t)$ определяется дифференциальным уравнением, где $a_n, \dots, a_0; b_m, \dots, b_0$ – коэффициенты, зависящие от параметров системы; n – размерность системы.

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1} u^{(m-1)}(t) + \dots + b_0 u(t),$$

Модель вход-выход

Система автоматического управления (САУ) представляет собой совокупность отдельных элементов или устройств, соединенных в замкнутый контур. Это могут быть различного рода датчики, усилители, двигатели, тахогенераторы и т.д. При математическом описании их называют звеньями САУ. Для любого объекта, имеющего входную переменную $u(t)$ и выходную $y(t)$, могут быть составлены модели “вход—выход”, непосредственно связывающие $y(t)$ с $u(t)$.

В моделях “вход—выход” обычно используется дифференциальное уравнение n -го порядка

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_n \frac{d^n u}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} + \dots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u,$$

где u – входное воздействие; y – выходное воздействие; a_i, b_i – постоянные коэффициенты, определяемые параметрами схемы.

Для отдельного звена это уравнение первого или второго порядка. При объединении их в систему порядок дифференциального уравнения увеличивается.

Передаточная функция системы

В инженерной практике от дифференциальных уравнений переходят в область изображений по Лапласу.

Если в уравнении полагать, что $u(0) = u'(0) = u^{(n-1)}(0) = 0$ и $y(0) = y'(0) = y^{(n-1)}(0) = 0$, то после применения преобразования Лапласа получим алгебраическое уравнение относительно изображений $a_n s^n y(s) + a_{n-1} s^{n-1} y(s) + \dots + a_1 s y(s) + a_0 y(s) = b_m s^m u(s) + b_{m-1} s^{m-1} u(s) + \dots + b_1 s u(s) + b_0 u(s)$.

Передаточная функция звена (системы) $W(s)$ – это отношение изображения по Лапласу выходного сигнала $y(s)$ к изображению по Лапласу входного сигнала $u(s)$ при нулевых начальных условиях:

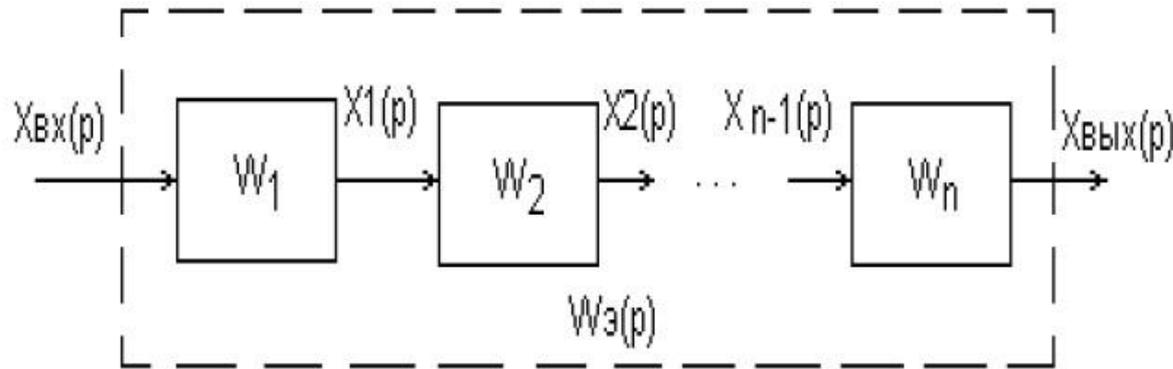
$$W(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}, \quad m \leq n.$$

Структурные соединения звеньев системы

а) последовательное

выходной сигнал предыдущего звена

является входным сигналом последующего звена



Последовательное соединение звеньев

Передаточная функция последовательного соединения звеньев равна произведению передаточных функций звеньев, входящих в это соединение

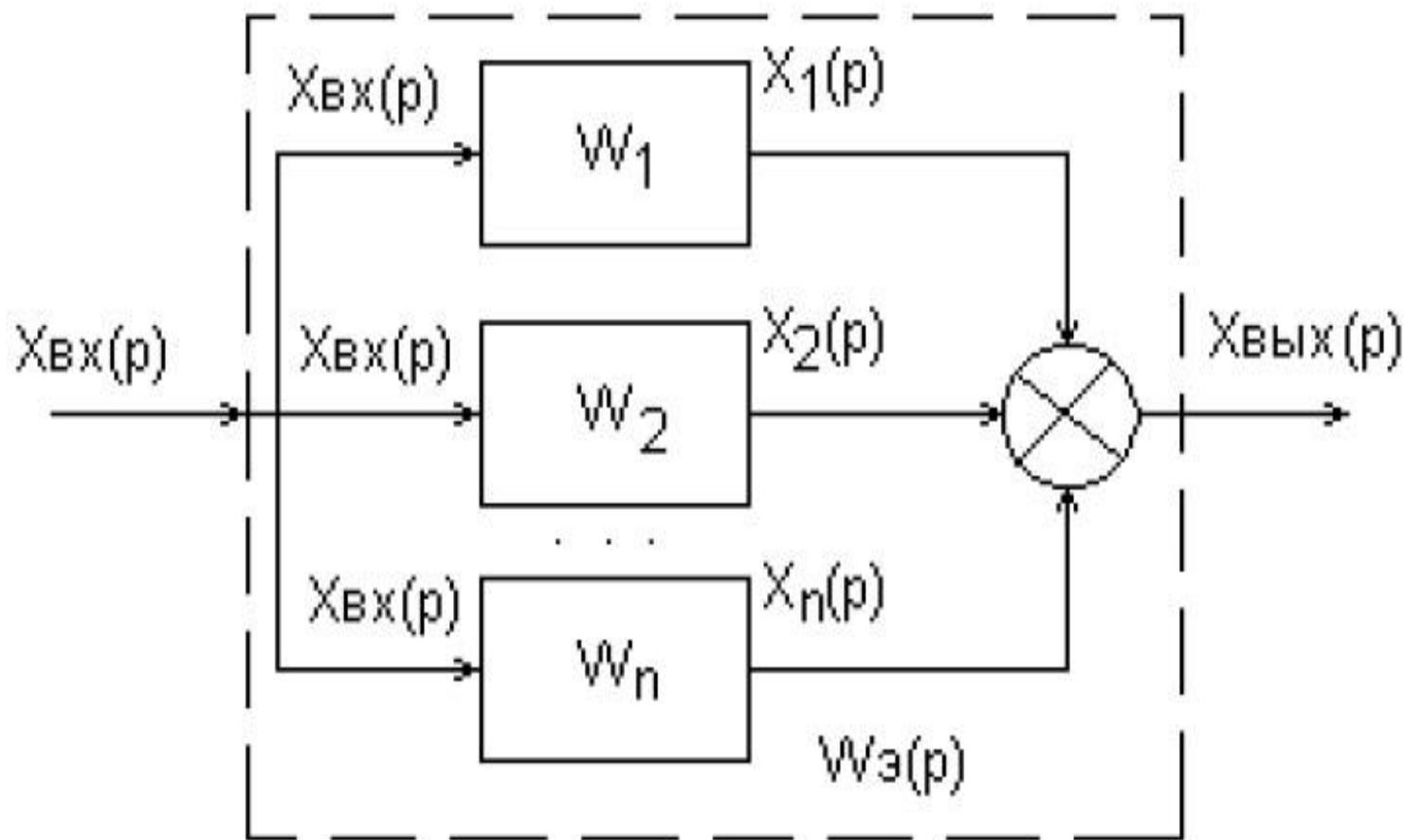
$$W_з(p) = \frac{X_{вых}(p)}{X_{вх}(p)} = W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot \dots \cdot W_n(p)$$

а) параллельное соединение

на вход всех звеньев подается одновременно один и тот же входной сигнал, а выходные сигналы этих звеньев алгебраически суммируются, образуя общую выходную величину

Передаточная функция параллельного соединения звеньев равна алгебраической сумме передаточных функций звеньев, входящих в это соединение

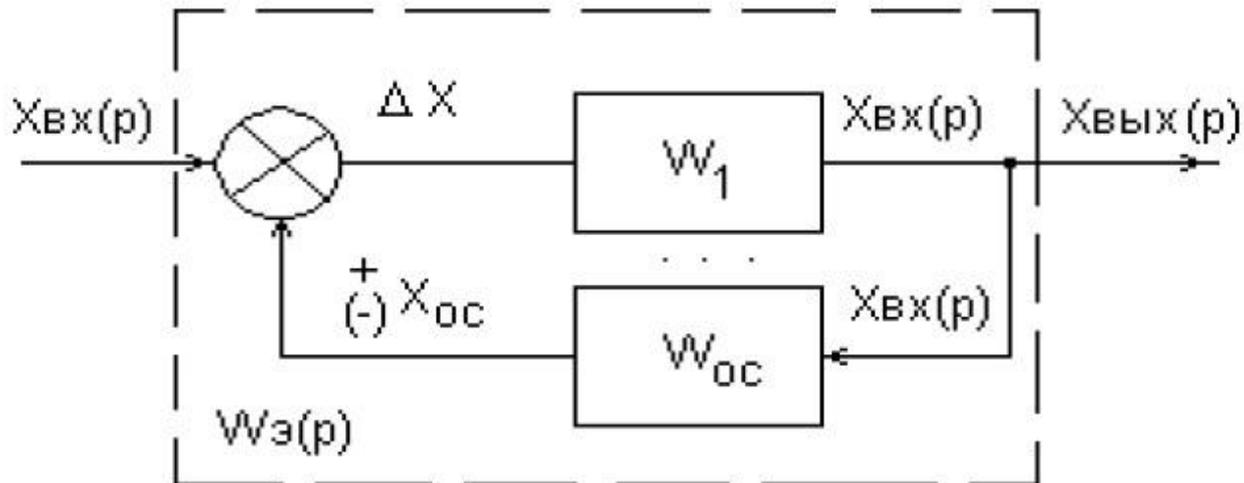
$$W_3(p) = \frac{X_{\text{ВЫХ}}(p)}{X_{\text{ВХ}}(p)} = W_1(p) + W_2(p) + \dots + W_n(p)$$



Параллельное соединение звеньев

в) обратная связь

выход звена соединяется с его входом через звено с передаточной функцией $W_{oc}(p)$, в результате чего образуется замкнутый контур передачи воздействий



Соединение с обратной связью

Передаточная функция соединения с обратной связью определяется

выражением

отрицательная обратная связь (ООС)

$$W_{\text{э}}(p) = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_{\text{ос}}(p)}$$

положительная обратная связь (ПОС)

$$W_{\text{э}}(p) = \frac{W_1(p)}{1 - W_1(p) \cdot W_{\text{ос}}(p)}$$

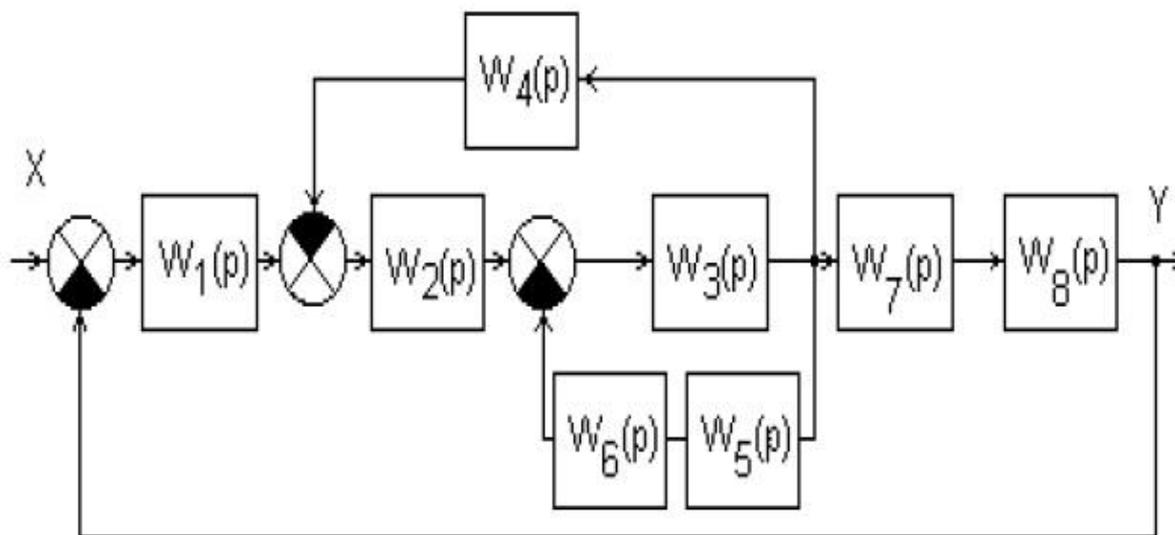
Правила структурных преобразований

№	Правило преобразования	Исходная схема	Эквивалентная схема
1	Перенос точки съема сигнала через звено по ходу сигнала		
2	То же против хода сигнала		
3	Перенос сумматора через звено по ходу сигнала		
4	То же против хода сигнала		

Пример преобразования

Преобразование многоконтурной структурной схемы может быть произведено таким образом, чтобы упростить вид описывающей ее передаточной функции.

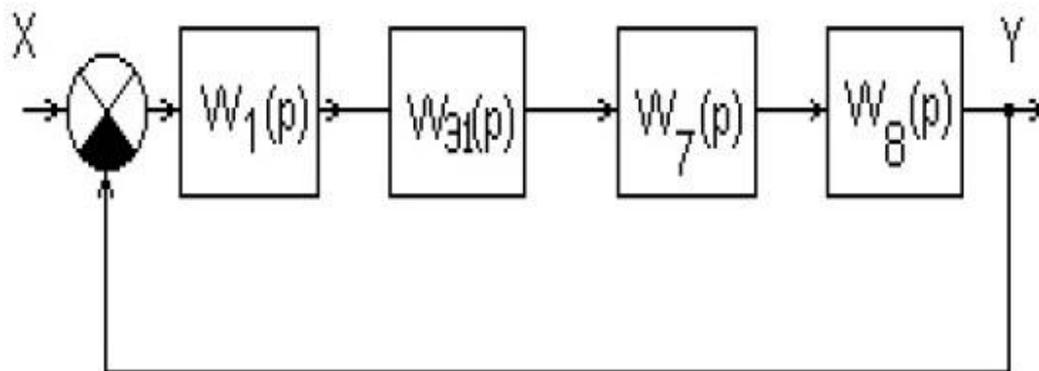
Пример Упростить структурную схему С. путем ее преобразования.



Исходная многоконтурная схема

Путем поэтапных преобразований получается одноконтурная структурная схема с передаточной функцией

$$W = \frac{W_1 \cdot W_{\text{Э1}} \cdot W_7 \cdot W_8}{1 + W_1 \cdot W_{\text{Э1}} \cdot W_7 \cdot W_8},$$



Преобразованная схема

где

$$W_{\text{Э1}} = \frac{W_2 \cdot W_3}{1 + W_3 \cdot W_5 \cdot W_6 + W_2 \cdot W_3 \cdot W_4}.$$

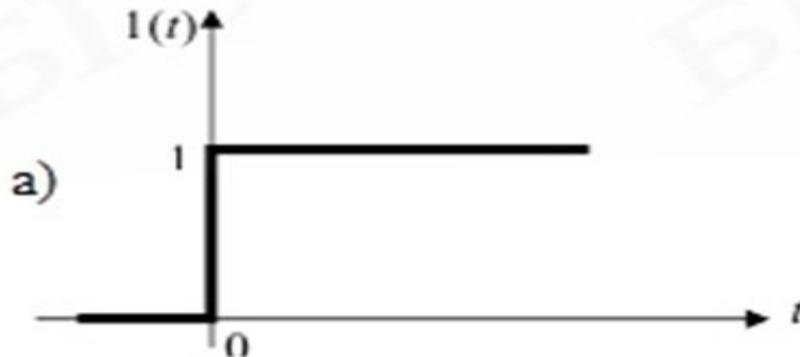
Переходная функция системы

К временным характеристикам линейных элементов и систем относятся две характеристики: переходная и импульсная переходная (весовая) функции.

Переходная функция $h(t)$ – это функция, определяющая изменение выходной величины системы (или отдельного элемента) при воздействии на входе единичного ступенчатого воздействия $1(t)$ и при нулевых начальных условиях.

Единичная ступенчатая функция описывается следующим образом:

$$1(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t = 0, \\ 0, & \text{при } t \neq 0, \end{cases} \text{ и имеет вид, приведенный на рис. а.}$$



Импульсная переходная функция

Импульсная переходная функция (функция веса) $w(t)$ – это функция, определяющая изменение выходной величины системы (или отдельного элемента) при воздействии на входе дельта-функции $\delta(t)$ и при нулевых начальных условиях.

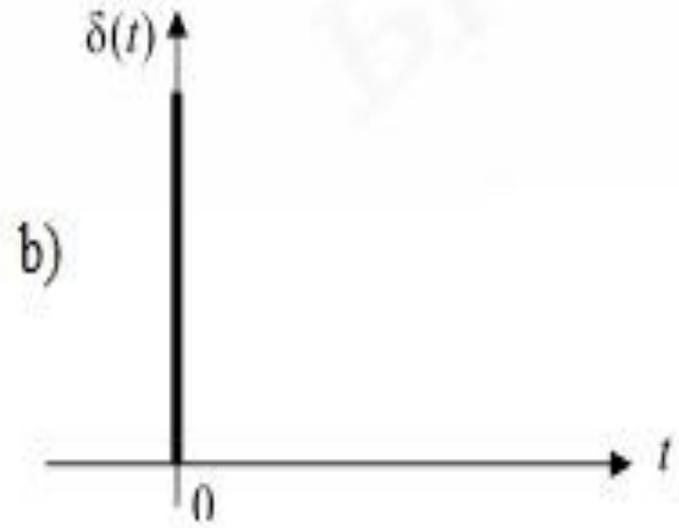
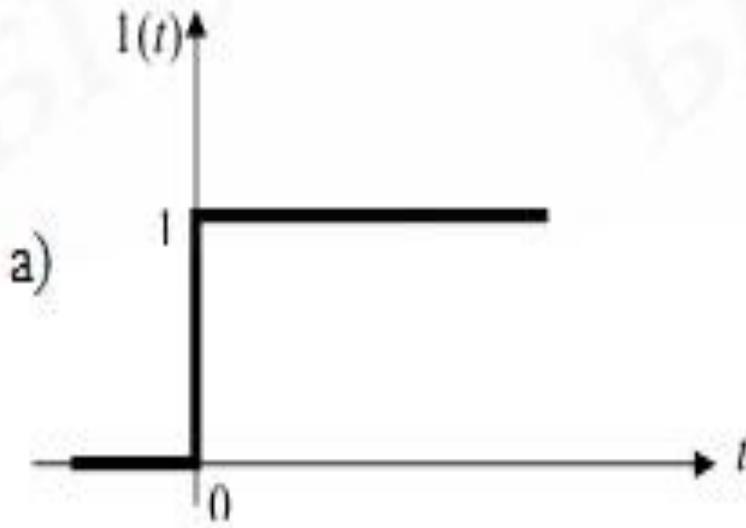
Дельта-функция описывается следующим образом:
$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & \text{при } t = 0, \\ 0, & \text{при } t \neq 0, \end{cases}$$

и имеет вид, приведенный на рис. б. Интеграл от $\delta(t)$ равен единице.



Функция Хэвисайда и δ -функция

Переходная и импульсная переходная характеристики связаны между собой следующим образом: $w(t) = \frac{dh(t)}{dt}$; $h(t) = \int_0^t w(\tau) d\tau$.



Исследование систем

Исследование свойств C . предусматривает выполнение следующих операций

- определение факта ее устойчивости (неустойчивости);
- анализ качества перехода C . из одного состояния в другое;
- исследование точности C . в установившемся режиме.

Процесс перехода C . из одного состояния в другое называется переходным процессом. Характеристики поведения системы в переходном процессе называются динамическими и переходный процесс есть реакция системы на любое входное воздействие. При исследовании C . входные воздействия желательно выбирать так, чтобы в переходном процессе наиболее полно проявлялись все свойства системы. Такие воздействия называются типовыми:

- импульсное;
- степенные;
- гармонические.

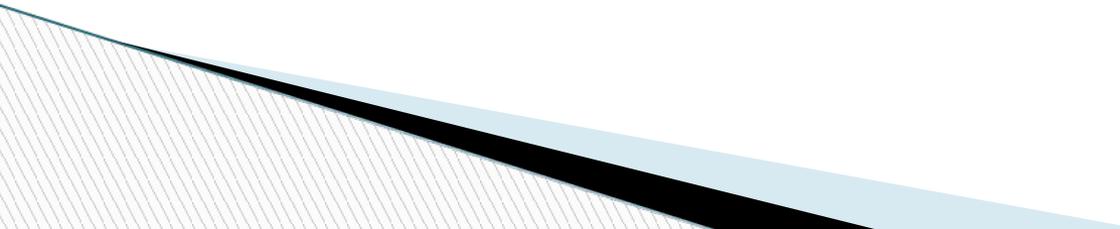
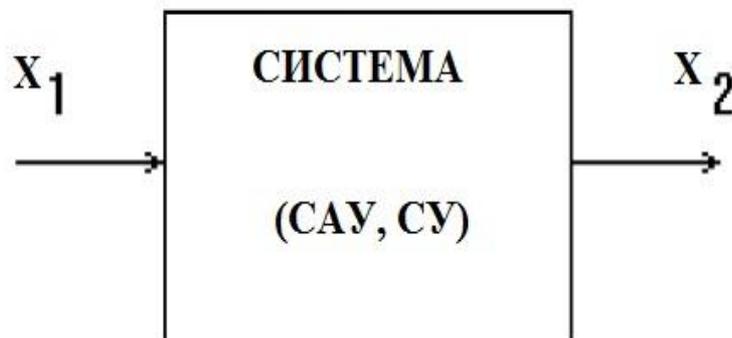


Схема и типовые воздействия в САУ

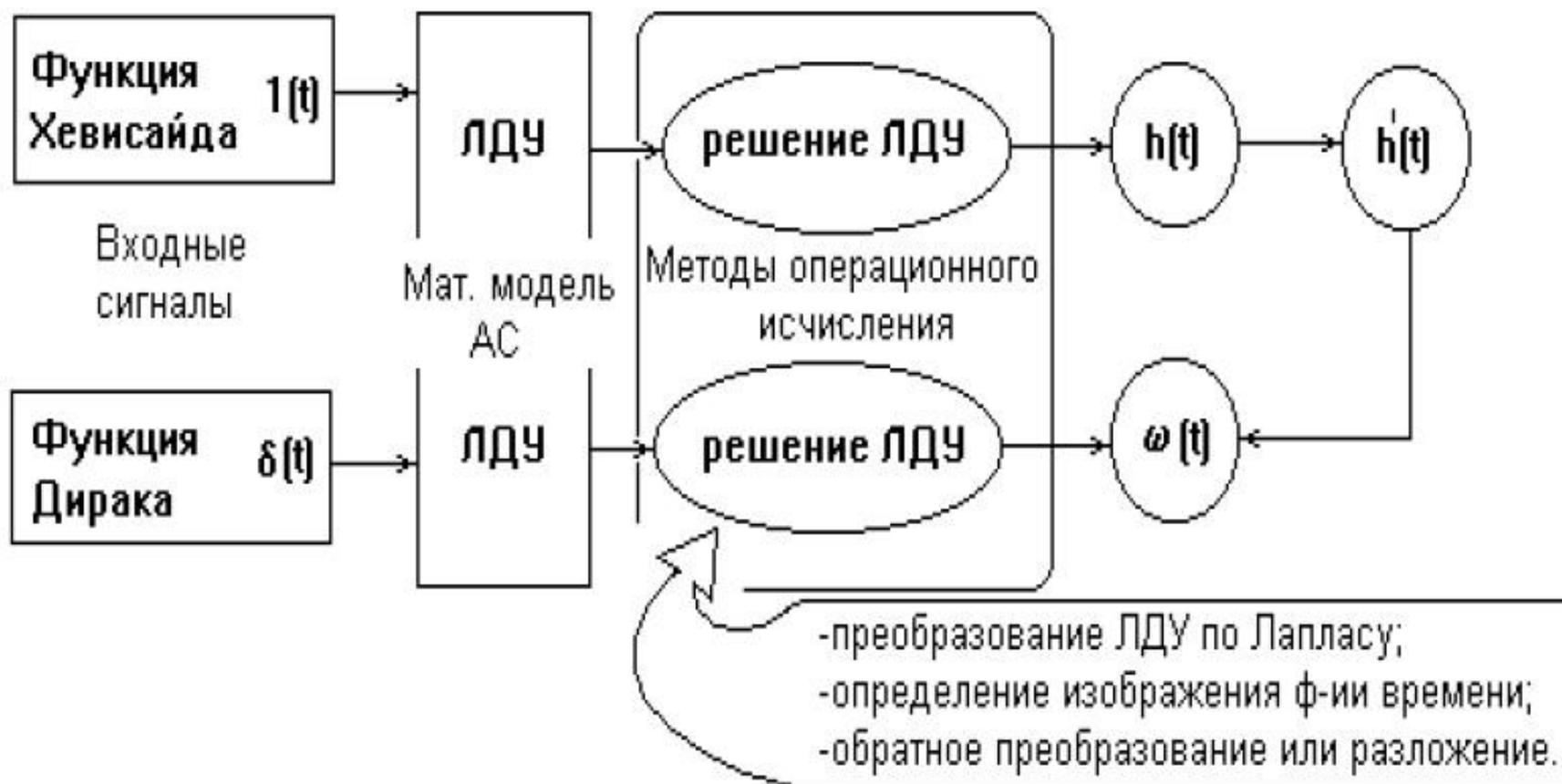
Реакция системы на эти воздействия и будет оцениваться дин. характеристиками.



Типовые воздействия	Характеристики
$x_1=1(t)$	$x_2=h(t)$
$x_1=\delta(t)$	$x_2=w(t)$
$x_1=A_1\sin\omega t$	$x_2=A_2\sin(\omega t+\varphi)$

Алгоритм исследования систем (САУ)

Математическая модель С. представленная в виде ЛДУ является основой для нахождения характеристик систем в соответствии с рис.



Типы основных звеньев

№	Название звена	Дифференциальные уравнения
1	Интегрирующее	$y(t) = \int_0^t ku(t)dt \text{ или } \frac{dy(t)}{dt} = ku(t)$
2	Апериодическое	$T \frac{dy}{dt} + y(t) = ku(t)$
3	Интегриродифференцирующее	$T_2 \frac{dy}{dt} + y(t) = k \left[T_1 \frac{du}{dt} + u(t) \right]$
4	Колебательное	$T^2 \frac{d^2y}{dt^2} + 2\xi T \frac{dy}{dt} + y(t) = ku(t)$

Частотные характеристики систем (САУ)

Кроме передаточных функций по Лапласу используются передаточные функции по Фурье, частотные передаточные функции

Они позволяют получить информацию о всех показателях синусоидального выходного сигнала объекта, если известна амплитуда и частота его входного синусоидального воздействия. При этом рассматривается только установившийся процесс.

вместо преобразования Лапласа используется преобразование Фурье,

$$X(j\omega) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt.$$

где $x(t)$, $t \geq 0$ – любая функция времени, удовлетворяющая условию применения преобразования Фурье.

Представление частотных ПФ

частотные ПФ не трудно получить, если использовать

мнемоническое правило $W(S) \rightarrow W(j\omega)$.

частотные ПФ могут быть представлены:

в прямоугольной форме

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega);$$

в показательной форме

$$W(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)};$$

в тригонометрической форме

$$W(j\omega) = A(\omega) \cdot [\cos \varphi(\omega) + j \sin \varphi(\omega)];$$

Частотные характеристики отклика систем (САУ)

Применение частотных передаточных функций позволяет получить частотные характеристики автоматических систем.

амплитудная частотная характеристика (АЧХ)

$$A(j\omega) = |W(j\omega)|;$$

логарифмическая амплитудная характеристика (ЛАХ)

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg A(\omega);$$

фазовая частотная характеристика (ФЧХ)

$$\varphi(\omega) = \arg \left\{ \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} \right\};$$

вещественная частотная характеристика (ВЧХ)

$$P(\omega) = A(\omega) \cdot \cos \varphi(\omega);$$

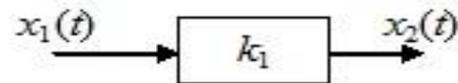
мнимая частотная характеристика (МЧХ)

$$Q(\omega) = A(\omega) \cdot \sin \varphi(\omega).$$

Характеристики звеньев:

усилительное безинерционное звено

Усилительное (пропорциональное, безинерционное) звено



Дифференциальное уравнение звена имеет вид

$$x_2(t) = k_1 x_1(t);$$

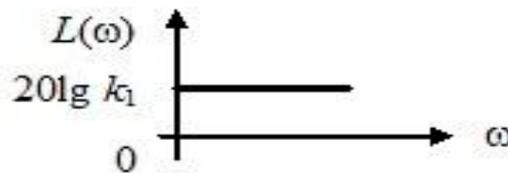
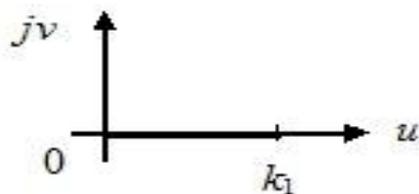
передаточная функция $W(p) = k_1$,

весовая функция $\omega(t) = k_1 \delta(t)$,

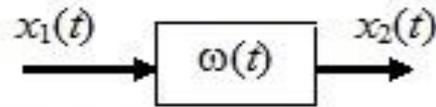
переходная характеристика $h(t) = k_1$,

ЛАЧХ звена $L(\omega) = 20 \lg k_1$, ЛФЧХ $\varphi(\omega) = 0$.

Годограф звена, ЛАЧХ и ЛФЧХ



Апериодическое (усилительное инерционное) звено 1 порядка

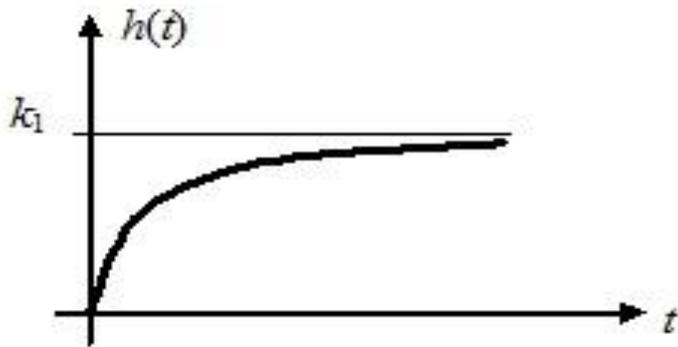


Структурная схема звена

Дифференциальное уравнение $T \frac{dx_2(t)}{dt} + x_2(t) = k_1 \cdot x_1(t)$.

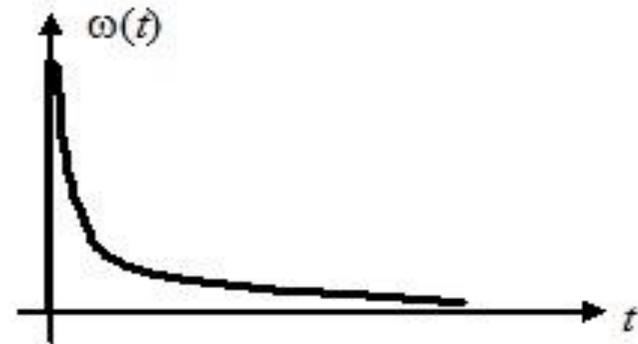
Передаточная функция получается следующим образом:

$$Tpx_2(t) + x_2(t) = k_1 \cdot x_1(t); \Leftrightarrow X_2(p)(Tp + 1) = k_1 \cdot X_1(p); \Leftrightarrow W(p) = \frac{k_1}{Tp + 1}.$$



Весовая функция

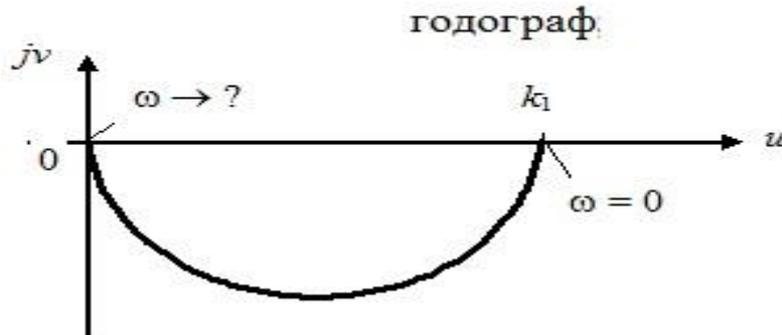
$$h(t) = k_1(1 - e^{-t/T}) \cdot 1(t)$$



переходная характеристика

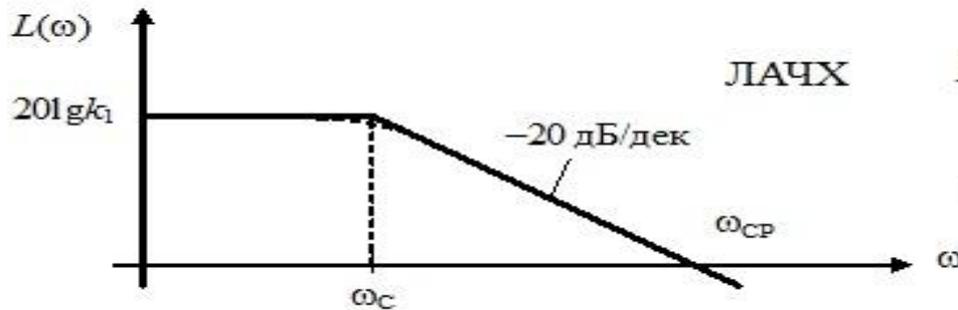
$$\omega(t) = \frac{k_1}{T} \cdot e^{-t/T} \cdot 1(t).$$

Частотные характеристики



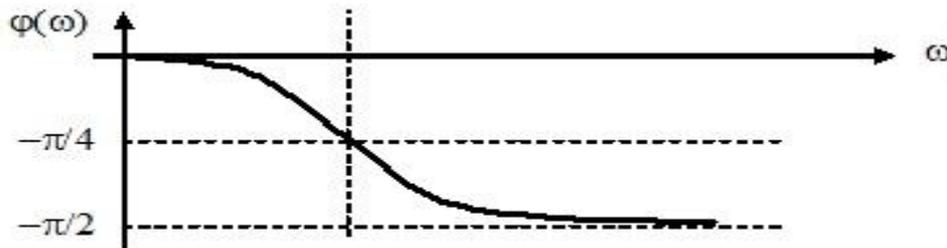
$$W(j\omega) = \frac{k_1}{Tj\omega + 1} = u(\omega) + jv(\omega);$$

$$u(\omega) = \frac{k_1}{T^2\omega^2 + 1} \quad v(\omega) = -\frac{k_1 T \omega}{T^2\omega^2 + 1}$$



$$L(\omega) = 20 \lg \frac{k_1}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}} =$$

$$20 \lg k_1 - 20 \lg(\sqrt{1 + T^2 \omega^2}).$$



$$\varphi(\omega) = -\arctg \omega T_1;$$

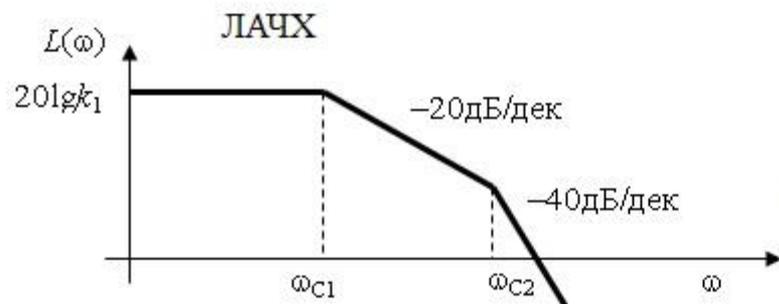
Апериодическое (усилительное инерционное) звено 2 порядка

- последовательное соединение двух апериодических звеньев первого порядка

$$W(p) = \frac{k_1}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1} = \frac{k_1}{(T_3 p + 1)(T_4 p + 1)}, \quad T_1 \geq 2T_2$$

характеристики:

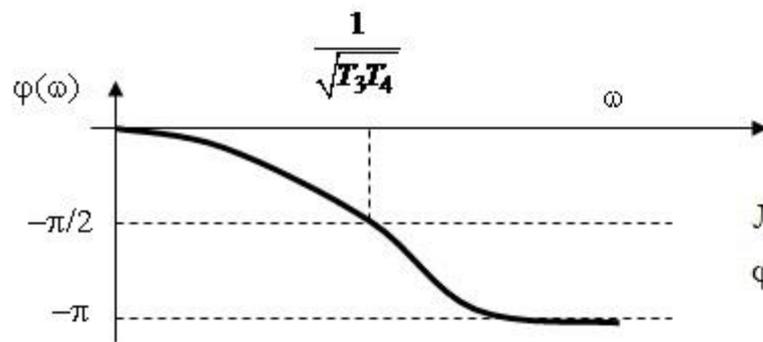
$$A(\omega) = \frac{k_1}{\sqrt{(T_3^2 \omega^2 + 1)(T_4^2 \omega^2 + 1)}}$$



$$L(\omega) = 20 \lg k_1 - 20 \lg \sqrt{(T_3^2 \omega^2 + 1)(T_4^2 \omega^2 + 1)} =$$

$$20 \lg k_1 - 20 \lg \sqrt{T_3^2 \omega^2 + 1} - 20 \lg \sqrt{T_4^2 \omega^2 + 1}$$

$$\omega_{c1} = \frac{1}{T_3}; \quad \omega_{c2} = \frac{1}{T_4}.$$



ЛФЧХ

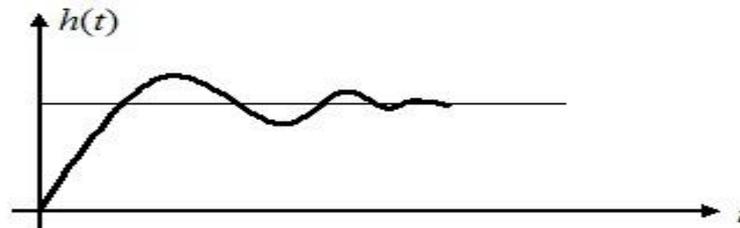
$$\varphi(\omega) = -\arctg T_3 \omega - \arctg T_4 \omega;$$

Колебательное звено (вариант предыдущего)

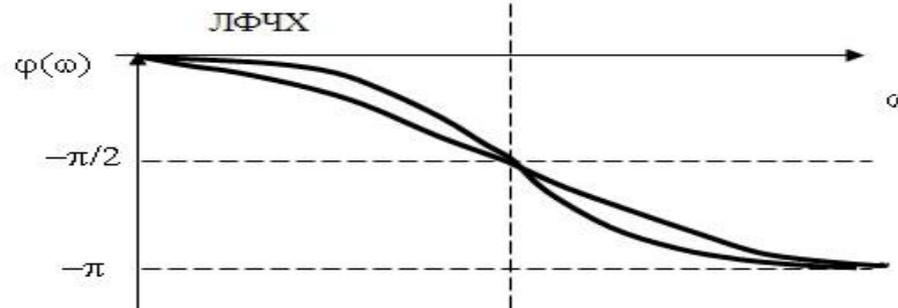
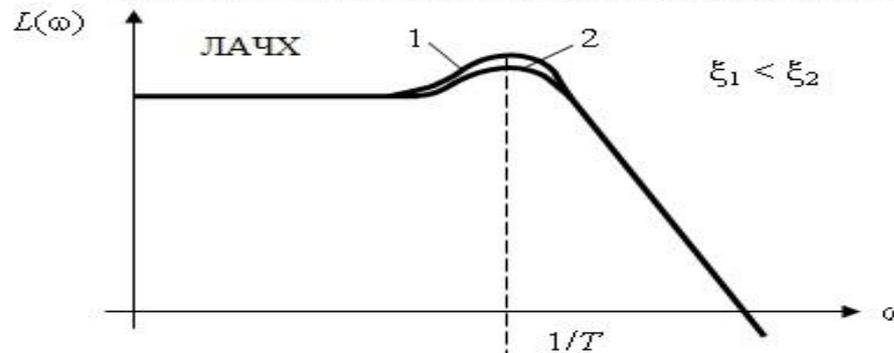
$$W(p) = \frac{k_1}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1} = \frac{k_1}{Tp^2 + 2\xi Tp + 1},$$

$$T_1 < 2T_2.$$

$\xi = \frac{T_1}{2T_2}$ — коэффициент затухания. Если $\xi \neq 0$ — колебательное звено.



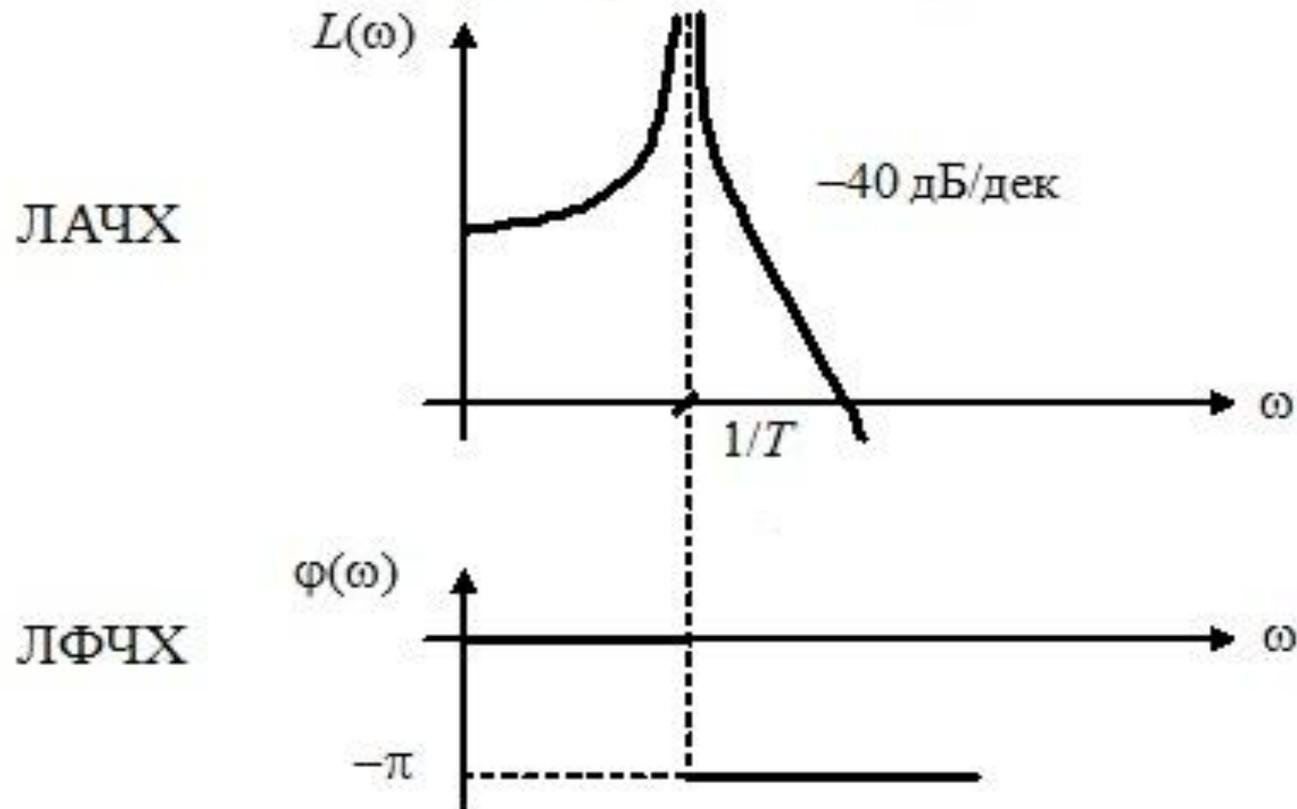
Переходная характеристика колебательного звена



Консервативное звено при $\xi = 0$

$$W(p) = \frac{k_{\bar{q}}}{T^2 p^2 + 1}$$

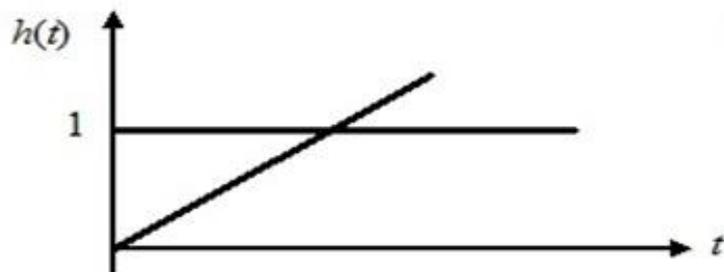
Частотные характеристики консервативного звена



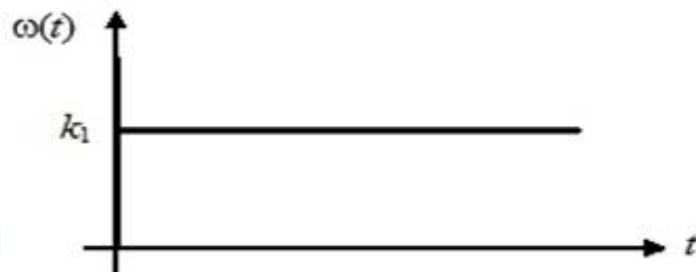
Интегрирующее звено

$$x_2(t) = k_1 \int x_1(t) dt.$$

Передающая функция равна $W(p) = \frac{k_1}{p}$.



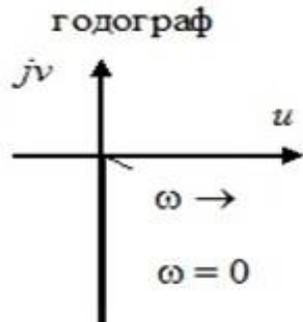
переходная характеристика



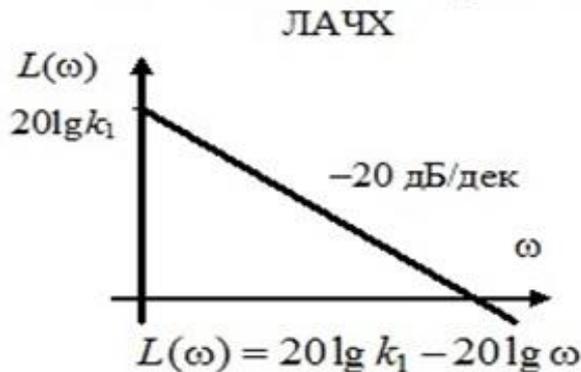
весовая функция

звено является неустойчивым, при воздействии $1(t)$ выходной сигнал неограниченно нарастает.

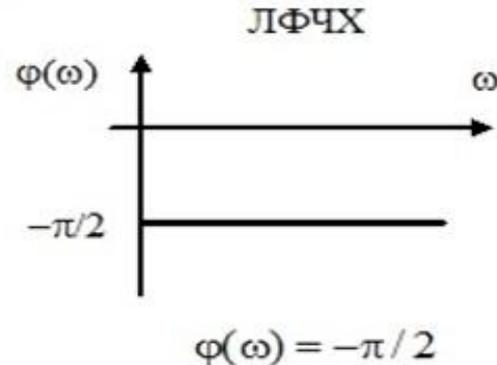
Частотные характеристики:



годограф



ЛАЧХ

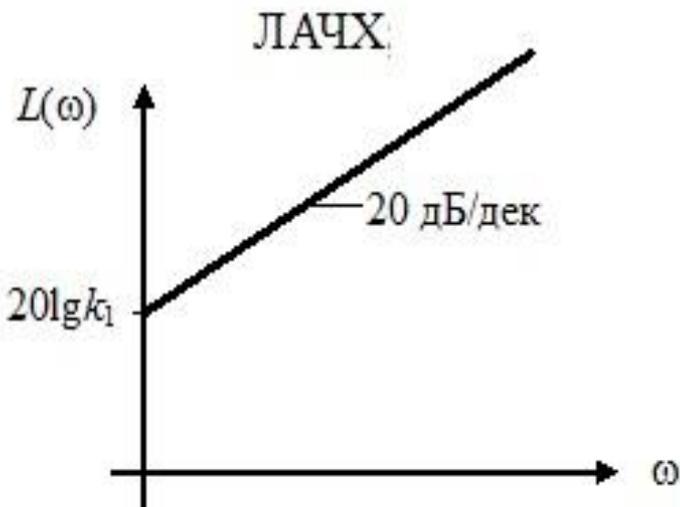


ЛФЧХ

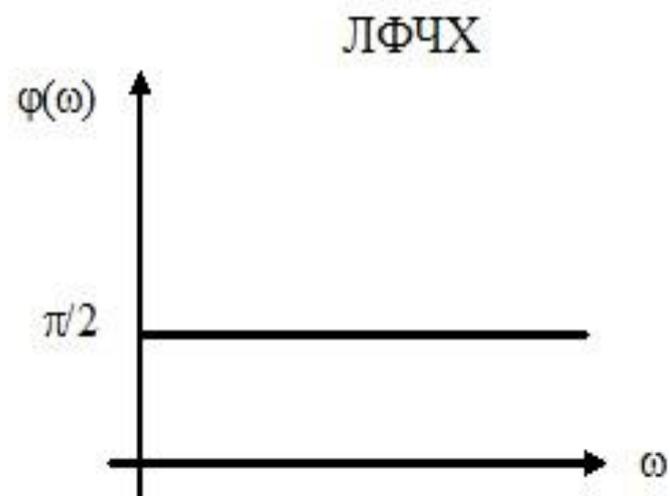
Дифференцирующее звено

$$x_2(t) = k_1 \frac{dx_1(t)}{dt}$$

$$W(p) = k_1 p;$$



$$L(\omega) = 20 \lg k_1 + 20 \lg \omega;$$



$$\varphi(\omega) = \pi/2$$

Примеры использования звеньев на практике

Примерами безынерционных звеньев могут служить жесткая механическая передача, часовой редуктор, электронный усилитель сигналов на низких частотах и др.

Примерами апериодического звена первого порядка могут служить RC цепочка, нагревательный элемент и др.

Примерами апериодического звена второго порядка могут служить двойная RC цепочка, электродвигатель постоянного тока и др.

Примерами колебательного звена могут служить электрический колебательный контур, электродвигатель постоянного тока, маятник и др.

Примерами идеальных интегрирующих звеньев могут служить операционный усилитель в режиме интегрирования, гидравлический двигатель, емкость и др.

Примерами идеальных дифференцирующих звеньев могут служить операционный усилитель в режиме дифференцирования, тахогенератор и др.

Использование программных пакетов при расчете систем управления

- Решение дифференциального уравнения

In[31]:=

```
DSolve[X''[t] + A * X'[t] + B * X[t] == Sin[t], X[t], t]
```

$$\text{Out[31]= } \left\{ \left\{ X[t] \rightarrow e^{\frac{1}{2} \left(-A - \sqrt{A^2 - 4B} \right) t} C[1] + e^{\frac{1}{2} \left(-A + \sqrt{A^2 - 4B} \right) t} C[2] \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{4 (A \cos[t] + \sin[t] - B \sin[t])}{\left(2 + A^2 + A \sqrt{A^2 - 4B} - 2B \right) \left(-2 - A^2 + A \sqrt{A^2 - 4B} + 2B \right)} \right\} \right\}$$

Преобразование Лапласа

□ **LaplaceTransform[t*Sin[t],t,s]**

□ ОТВЕТ: $(2s)/(1+s^2)^2$

□ **LaplaceTransform[DiracDelta[t],t,s]**

□ ОТВЕТ : $1/s$

□

LaplaceTransform[X''[t]-4*X'[t]+3*X[t],t,s]//TraditionalForm

□ ОТВЕТ : $s^2 (Lt[X(t)](s))+3 (Lt[X(t)](s))-4 (s (Lt[X(t)](s))-X(0))-s X(0)-X^{(0)}$

Использование преобразования Лапласа для построения передаточной функции

$$x''[t] + Ax'[t] + Bx[t] = u[t]$$

```
In[32]:= LaplaceTransform[X''[t] + A * X'[t] + B * X[t], t, s] // TraditionalForm  
LaplaceTransform[u[t], t, s] // TraditionalForm
```

Out[32]//TraditionalForm=

$$A (s (\mathcal{L}_t[X(t)](s)) - X(0)) + B (\mathcal{L}_t[X(t)](s)) + s^2 (\mathcal{L}_t[X(t)](s) - s X(0) - X'(0))$$

Out[33]//TraditionalForm=

$$\mathcal{L}_t[u(t)](s)$$

Согласно определению передаточной функции при нулевых начальных значениях получаем

$$W(s) = \frac{1}{B + As + s^2}$$

Нахождение передаточной функции для общей модели состояний системы

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= C(t)\mathbf{x}(t) + D(t)\mathbf{u}(t) \quad , \text{где} \quad \dot{\mathbf{x}}(t) := \frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

$\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$: -вектор состояния системы

$\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^q$: -выходной вектор (наблюдаемый)

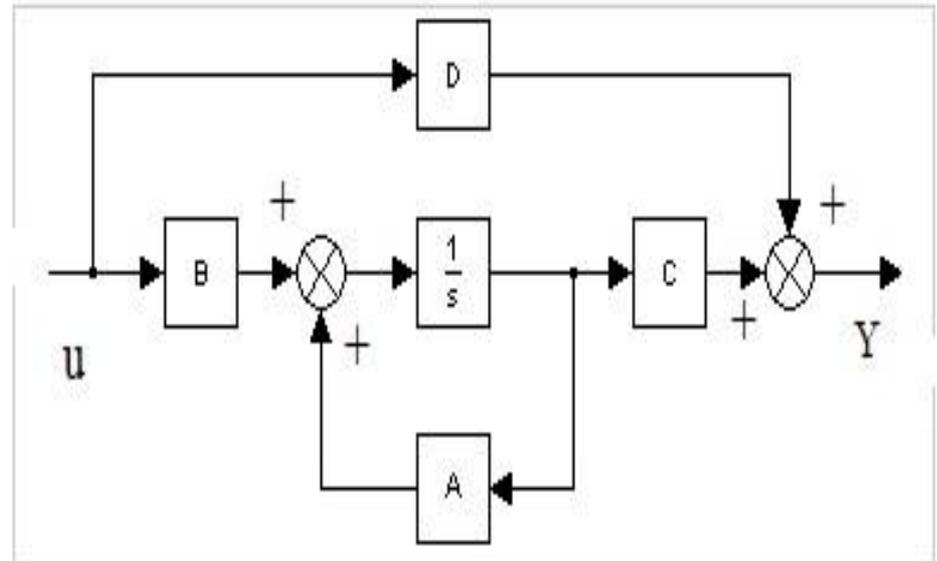
$\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^p$: входной вектор управления

$A(\cdot)$ матрица системы(коэффициентов)

$B(\cdot)$ входная матрица (входов управления)

$C(\cdot)$ матрица выходов

$D(\cdot)$ матрица передачи



Пример: получение стандартной модели из ДУ

- Одно уравнение $x''[t] + Ax'[t] + Bx[t] = u[t]$ второго порядка эквивалентно системе из 2 уравнений первого порядка
- $x'[t] = z[t]$
- $z'[t] = -Ax'[t] - Bx[t] + u[t]$
- Получение стандартной модели состояний системы в **Математика 9**

```
In[2]:= StateSpaceModel[{x''[t] + Ax'[t] + Bx[t] = u[t]},
```

```
{ {x[t], 0}, {x'[t], 0} }, {{u[t], 0}}, {x[t]}, t]
```

```
Out[2]=  $\left( \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -B & -A & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array} \right) s$ 
```

Пример: получение передаточной функции из модели состояний системы

```
PI12 = TransferFunctionModel[ $\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -B & -A & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right)^s$ , s]
```

```
Out[3]=  $\left(\frac{1}{B + A s + s^2}\right)^r$ 
```

```
In[6]= A = 1
```

```
B = 12
```

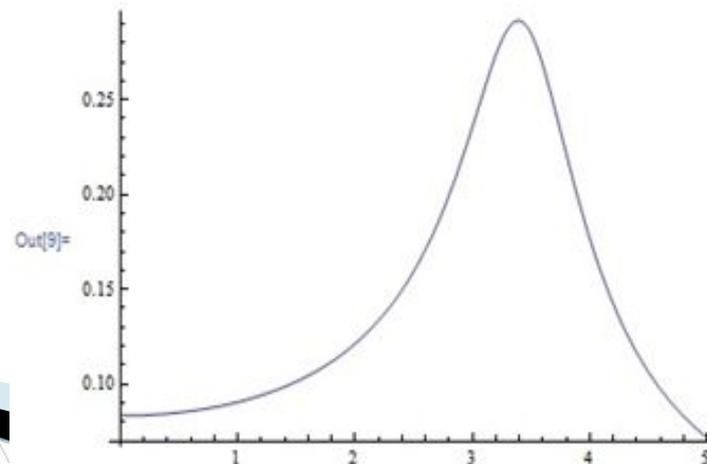
```
PI12 = TransferFunctionModel[ $\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -B & -A & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right)^s$ , s]
```

```
Plot[Abs[PI12[I f]], {f, 0, 5}]
```

```
Out[6]= 1
```

```
Out[7]= 12
```

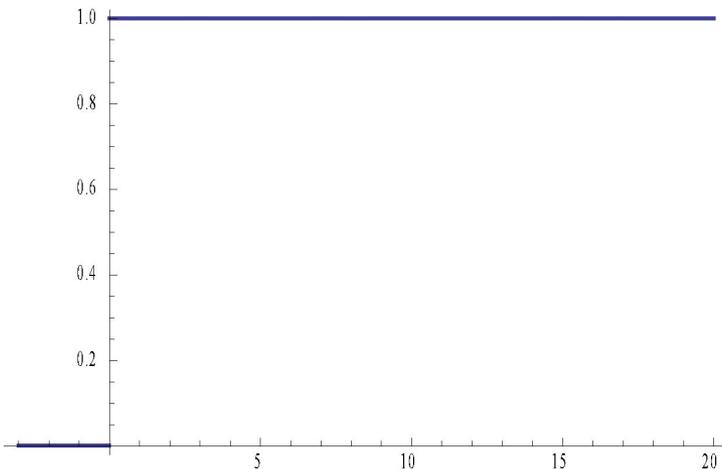
```
Out[8]=  $\left(\frac{1}{12 + s + s^2}\right)^r$ 
```



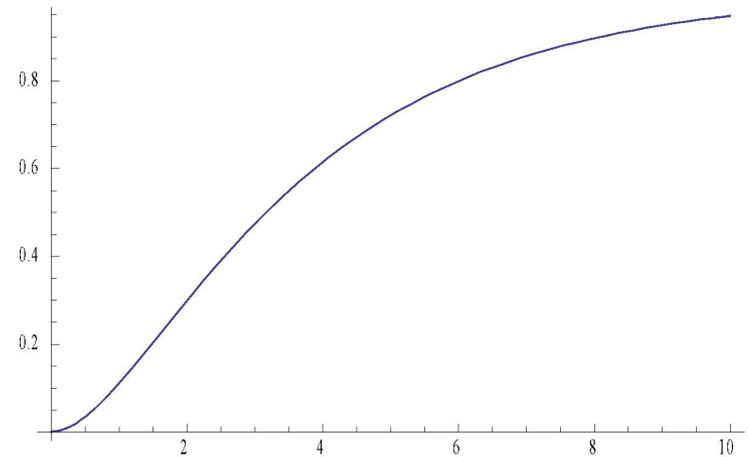
Нахождение переходной функции

```
OutputResponse [ { ( 1 / ( 3 * s + 1 ) * ( s + 1 ) ) ^ 2 , UnitStep [ t ] , t ]  
Plot [ %, { t , 0 , 10 } ]
```

- Входное воздействие $l(t)$ -UnitStep[t]
- (функция Хэвисайда)



- Выходная реакция-
переходная функция



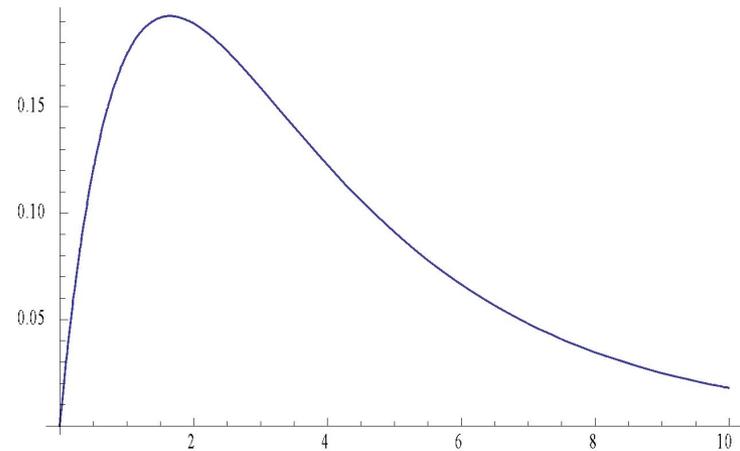
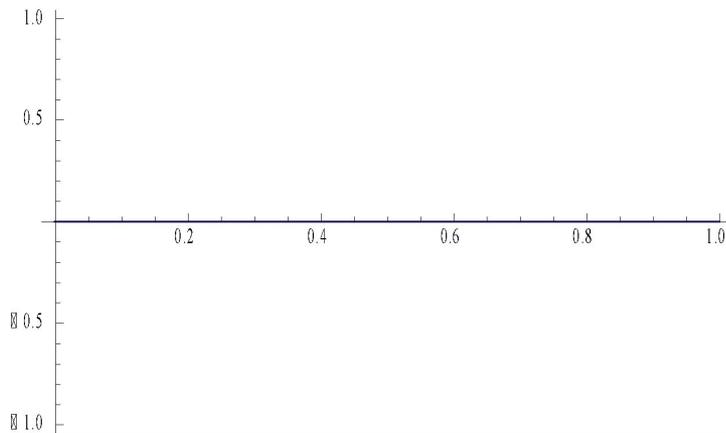
Нахождение импульсной переходной функции

```
OutputResponse [ ( 1 / ( 3 * s + 1 ) * ( s + 1 ) ) ^ 2 , DiracDelta [ t ] , t ]  
Plot [ %, { t , 0 , 10 } ]
```

□ Входное воздействие $\delta(t)$ -DiracDelta[t]

□

Выходная реакция-
импульсная функция

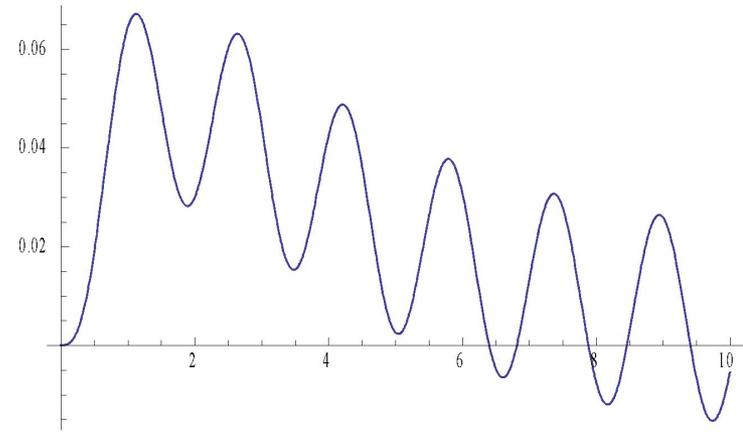
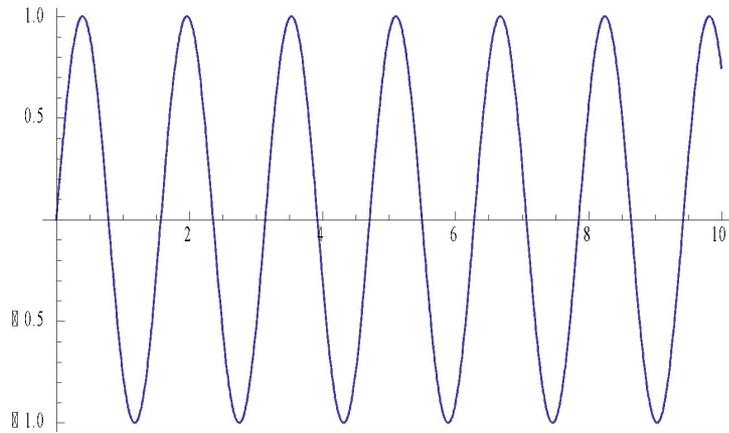


Нахождение отклика системы на гармоническое воздействие

```
OutputResponse [ ( ( 1 / ( 3 * s + 1 ) * ( s + 1 ) ) ) ^ 7 , Sin [ 4 t ] , t ]  
Plot [ %, { t , 0 , 10 } ]
```

- Входное воздействие Sin[4 t]
-

Выходная реакция-
гармонический отклик



Устойчивость системы - Найквист

- один из способов судить об устойчивости замкнутой системы управления по АФЧХ её разомкнутого состояния.
- Если разомкнутая система с передаточной функцией устойчива, замкнутая система является устойчивой, если АФЧХ разомкнутой системы не охватывает точку $(-1; j0)$.

NyquistPlot $\left[\frac{1}{(3s + 1)(s + 1)} \right]^*$

