Тела вращения

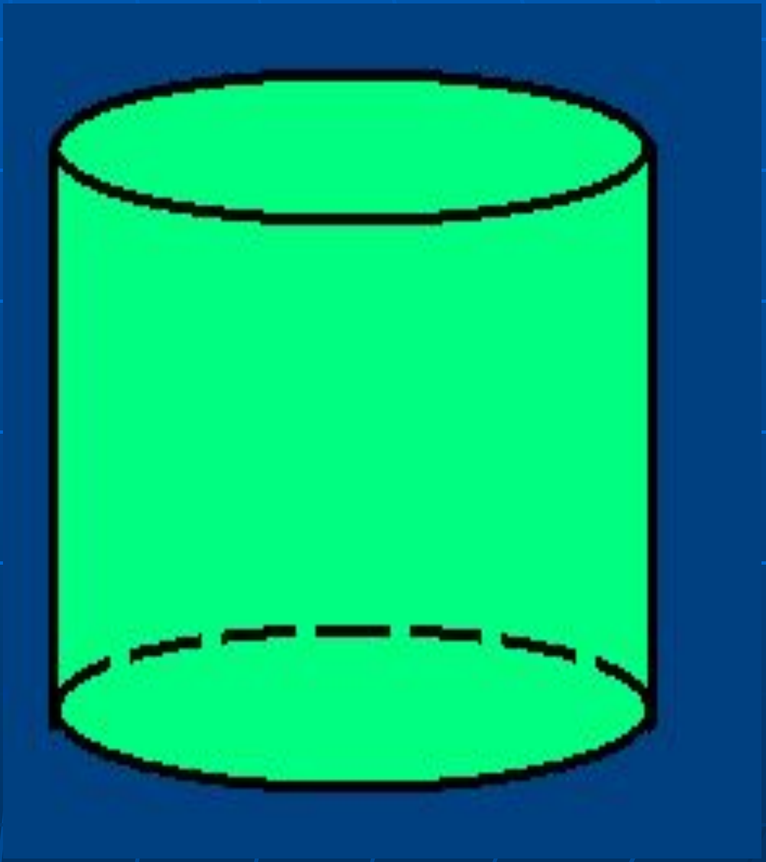
Цилиндр. Сечение. Вписанная и описанная призма. Конус. Сечение. Вписанная и описанная пирамида. Шар. Симметрия. Пересечение двух сфер.

Цилиндр

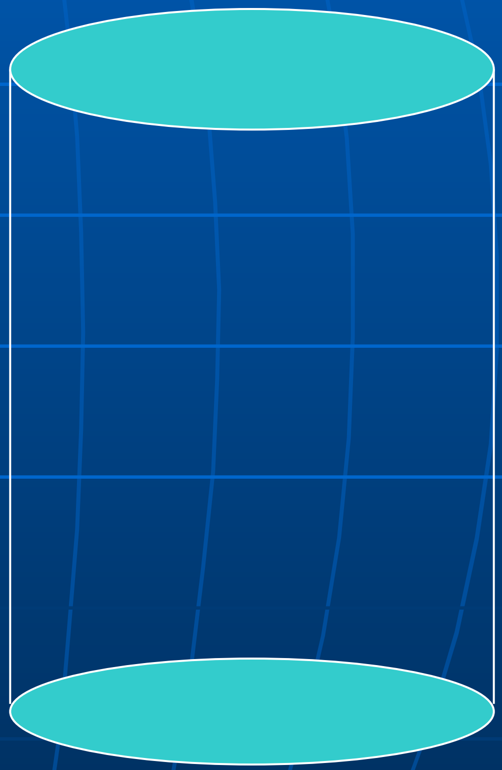
- Определение цилиндра как геометрического тела
- Прямой цилиндр
- Элементы цилиндра (поверхность, высота, радиус, ось)
- Определение цилиндра как тела вращения
- Свойства цилиндра
- Сечения цилиндра плоскостями
- Вписанная и описанная призма
- Площадь цилиндра

Определение цилиндра как геометрического тела

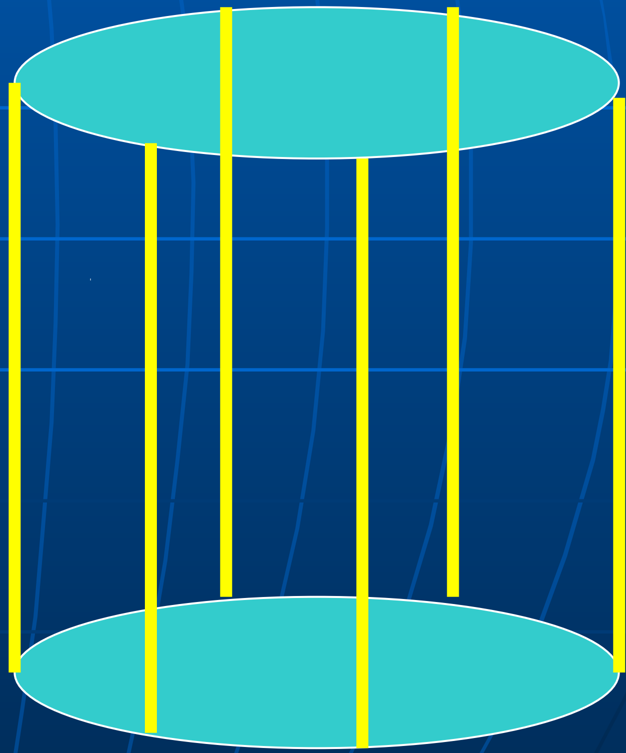
Цилиндром (точнее, круговым цилиндром) называется тело, которое состоит из двух кругов (точнее, круговым цилиндром) называется тело, которое состоит из двух кругов, не лежащих в одной плоскости и совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих кругов.



Круги называются основаниями цилиндра



Отрезки, соединяющие соответствующие точки окружностей кругов называются образующими цилиндра



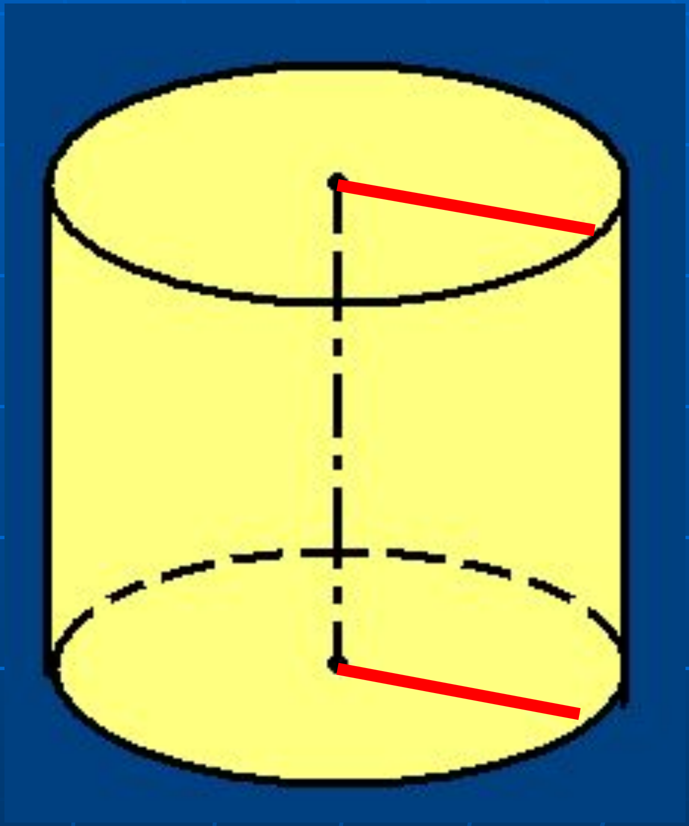
Цилиндр называется прямым, если его образующие перпендикулярны плоскостям оснований.

Элементы цилиндра

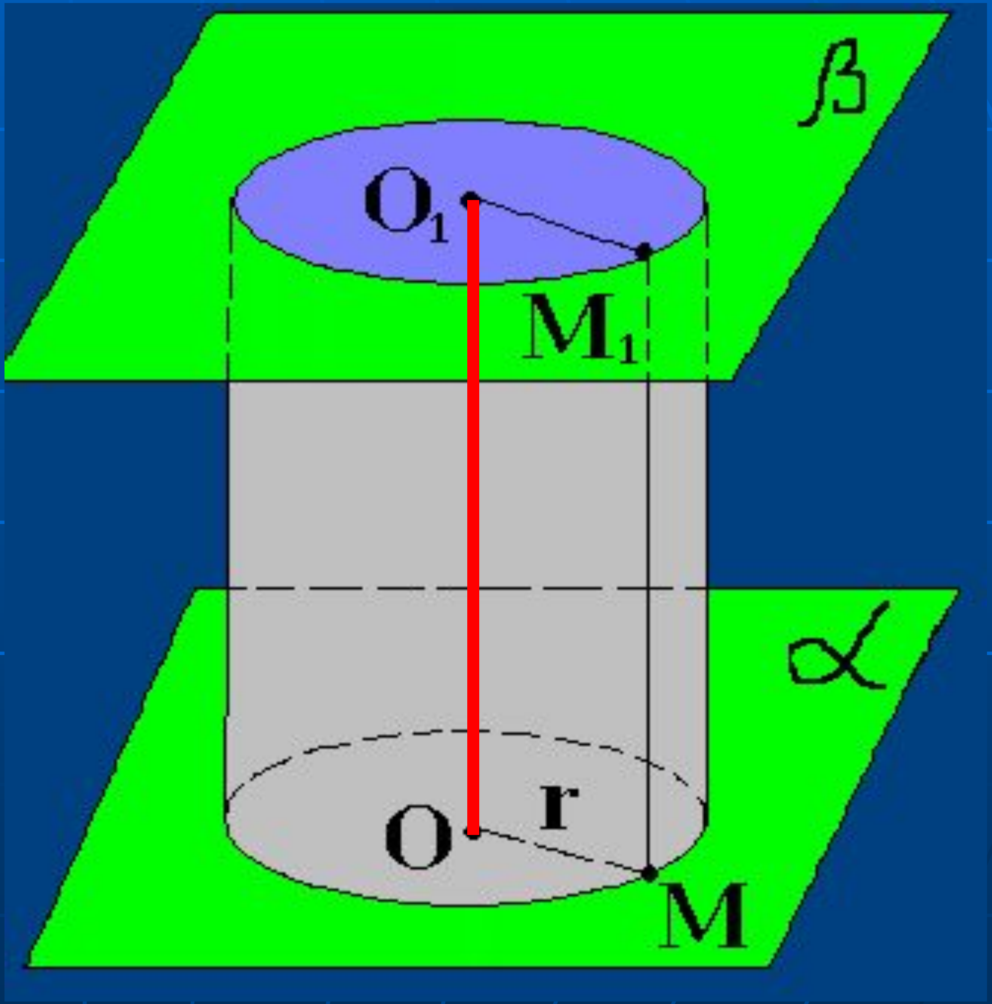
- Поверхность цилиндра
- Высота цилиндра
- Ось цилиндра
- Радиус цилиндра

Поверхность цилиндра состоит из оснований и боковой поверхности. Боковая поверхность составлена из образующих.

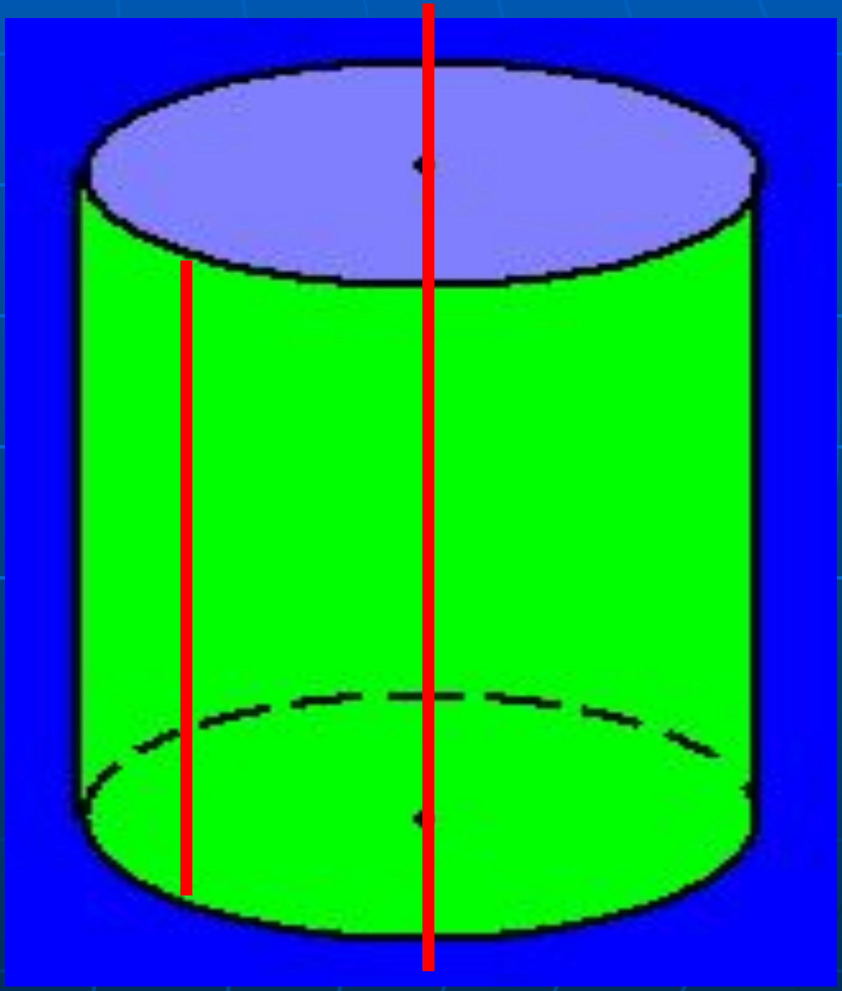
- Радиусом цилиндра называется радиус его основания.



- Высотой цилиндра называется расстояние между плоскостями его оснований.



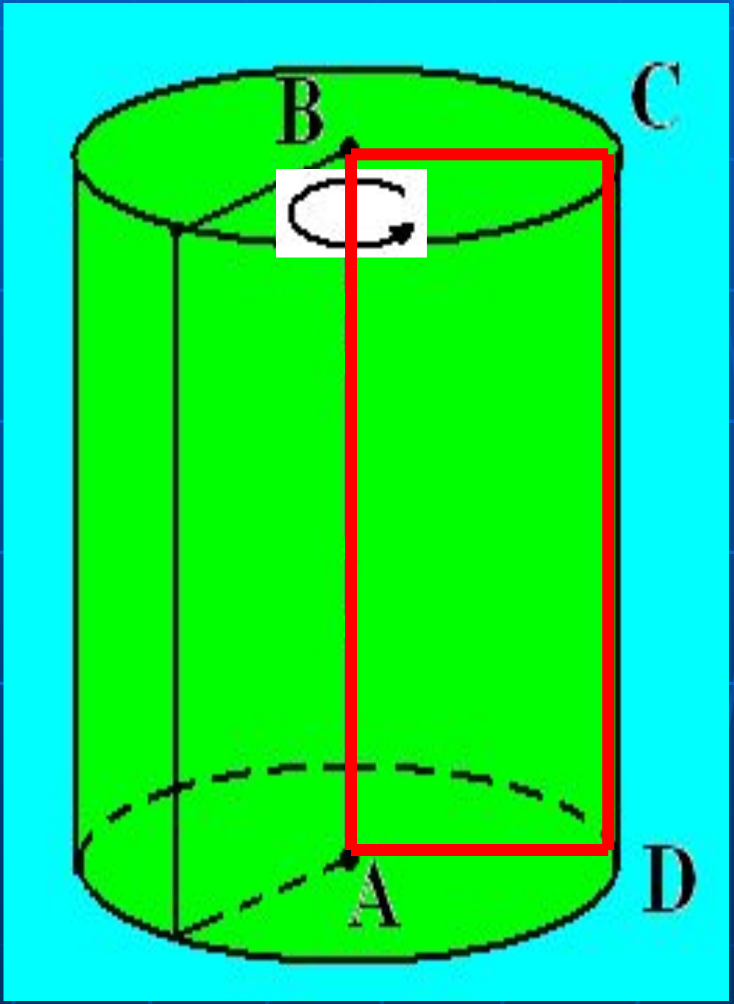
Осью цилиндра называется прямая, проходящая через центры оснований. Она параллельна образующим.



Цилиндр как тело вращения

Цилиндр может быть получен вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон.

На рисунке изображен цилиндр, полученный вращением прямоугольника ABCD вокруг стороны AB. При этом боковая поверхность цилиндра образуется вращением стороны CD, а основание - вращением сторон BC и AD.

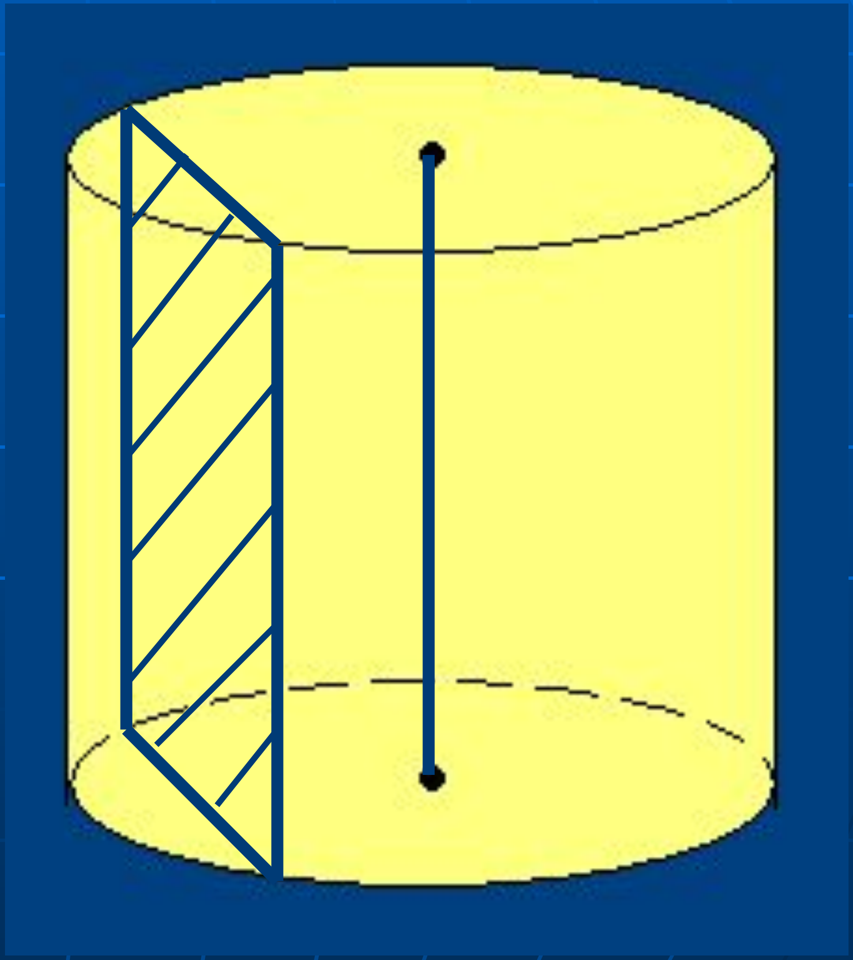


Свойства цилиндра

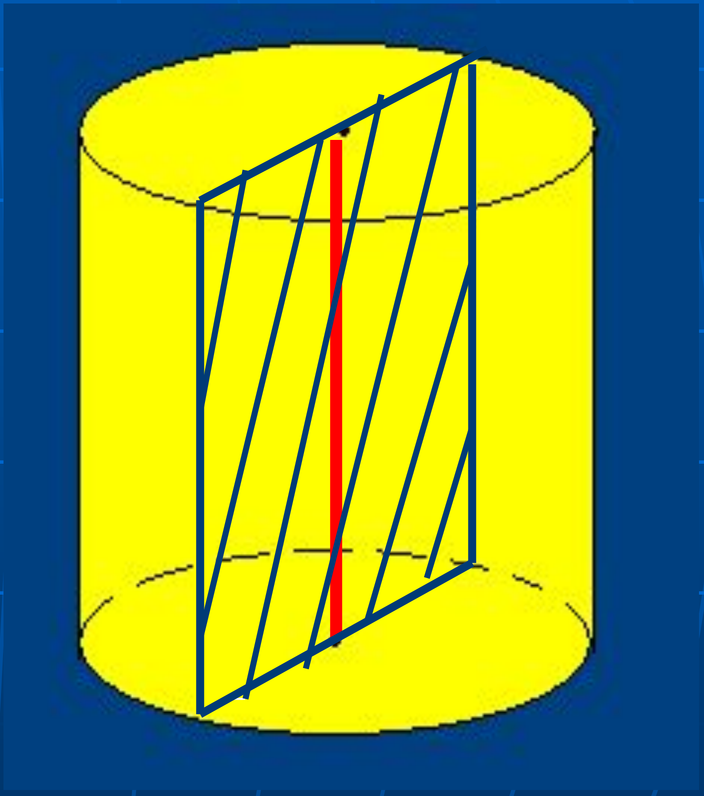
- Основания цилиндра равны.
- Основания цилиндра лежат в параллельных плоскостях.
- Образующие цилиндра параллельны и равны

Сечения цилиндра плоскостями

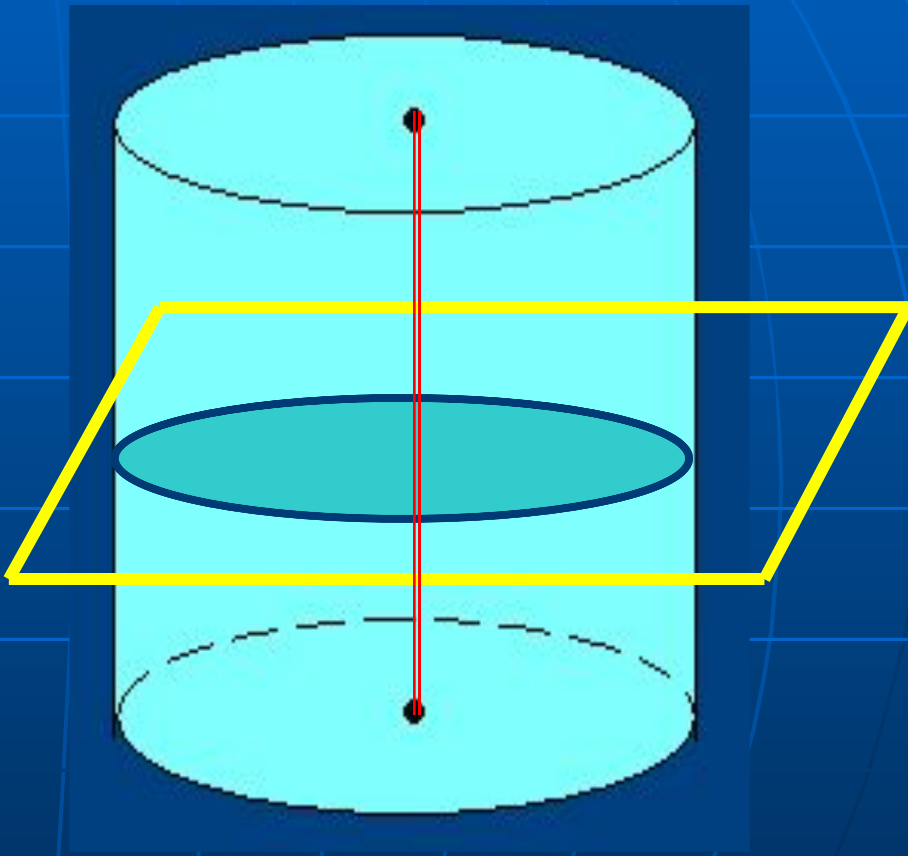
Сечение цилиндра плоскостью, параллельно его оси, представляет собой прямоугольник.



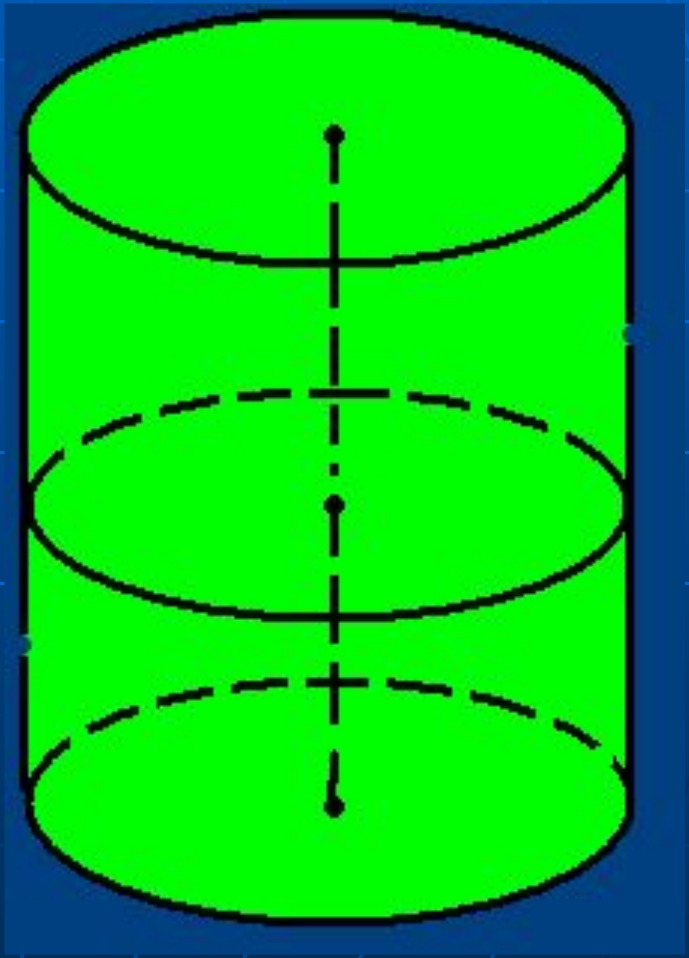
Если секущая плоскость проходит через ось цилиндра, то сечение представляет собой прямоугольник, две стороны которого – образующие, а две другие - диаметры оснований цилиндра. Такое сечение называется осевым



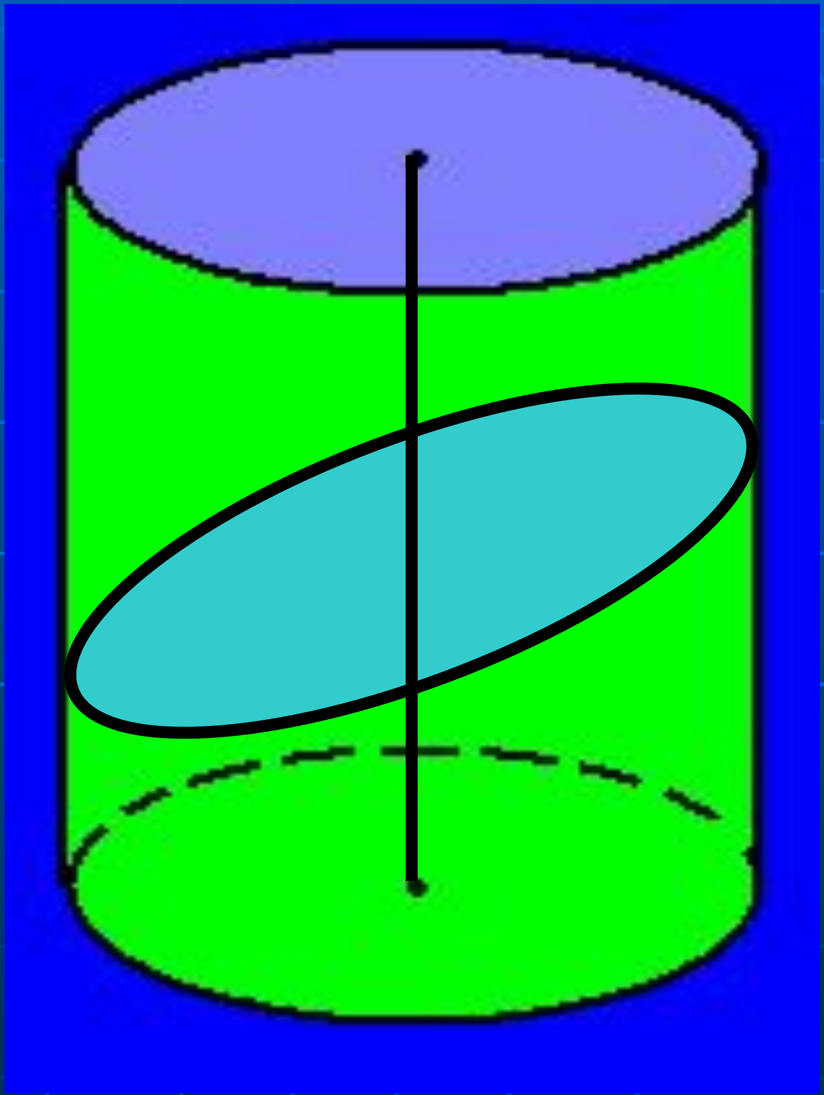
Если секущая плоскость перпендикулярна к оси цилиндра, то сечение является круговым. Такая секущая плоскость отсекает от данного цилиндра тело, являющееся цилиндром. (теорема 20.1)



Теорема. Плоскость, параллельная плоскости основания цилиндра, пересекает его боковую поверхность по окружности, равной окружности основания.

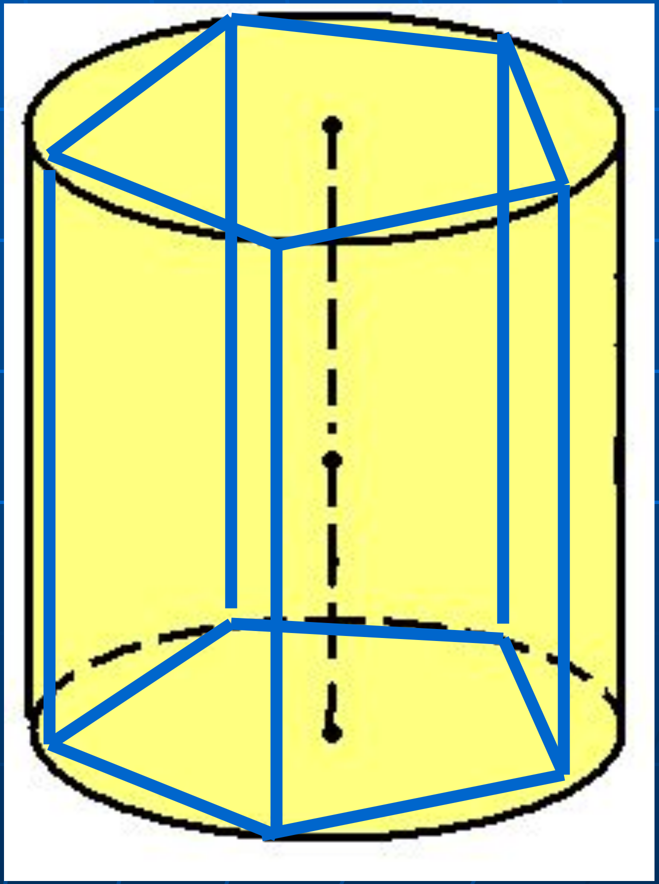


Если секущая плоскость не параллельна ни основанию, ни образующим, то в сечении получается эллипс



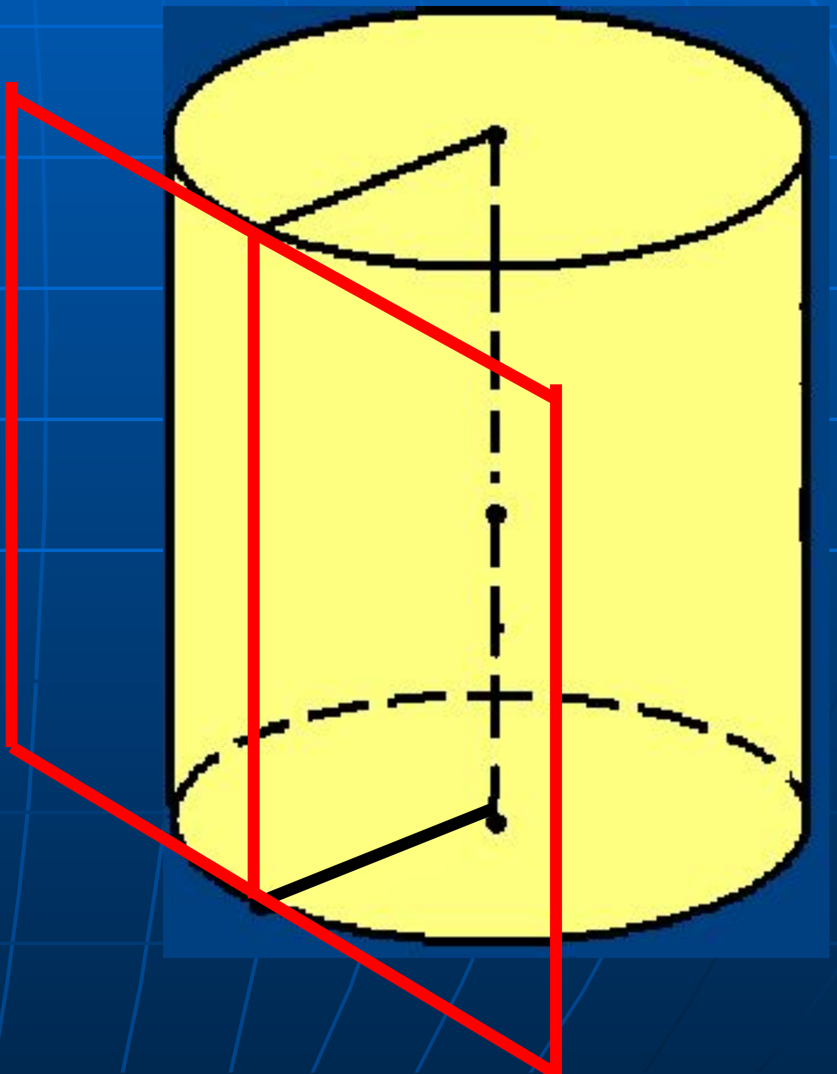
Вписанная призма

Призмой, вписанной в цилиндр, называется такая призма, у которой плоскостями оснований являются плоскости оснований цилиндра, а боковыми ребрами – образующие цилиндра.



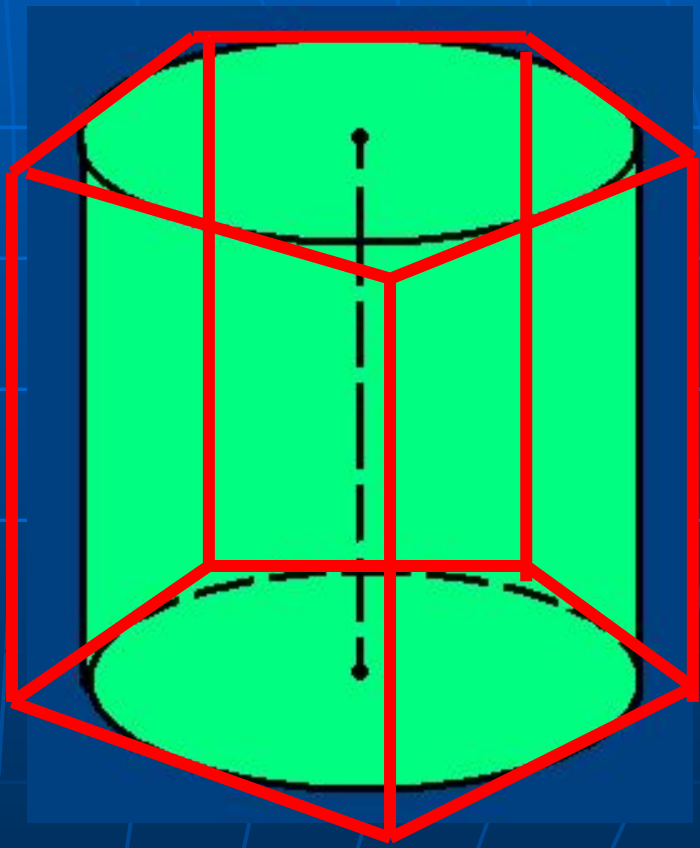
Касательная плоскость к цилиндру

Касательной плоскостью к цилиндру называется плоскость, проходящая через образующую цилиндра и перпендикулярная плоскости осевого сечения, содержащей эту образующую.



Описанная призма.

Призмой, описанной около цилиндра, называется призма, у которой плоскостями оснований являются плоскости оснований цилиндра, а боковые грани касаются цилиндра.



Площадь полной поверхности цилиндра

Площадь боковой поверхности

+

Две площади основания

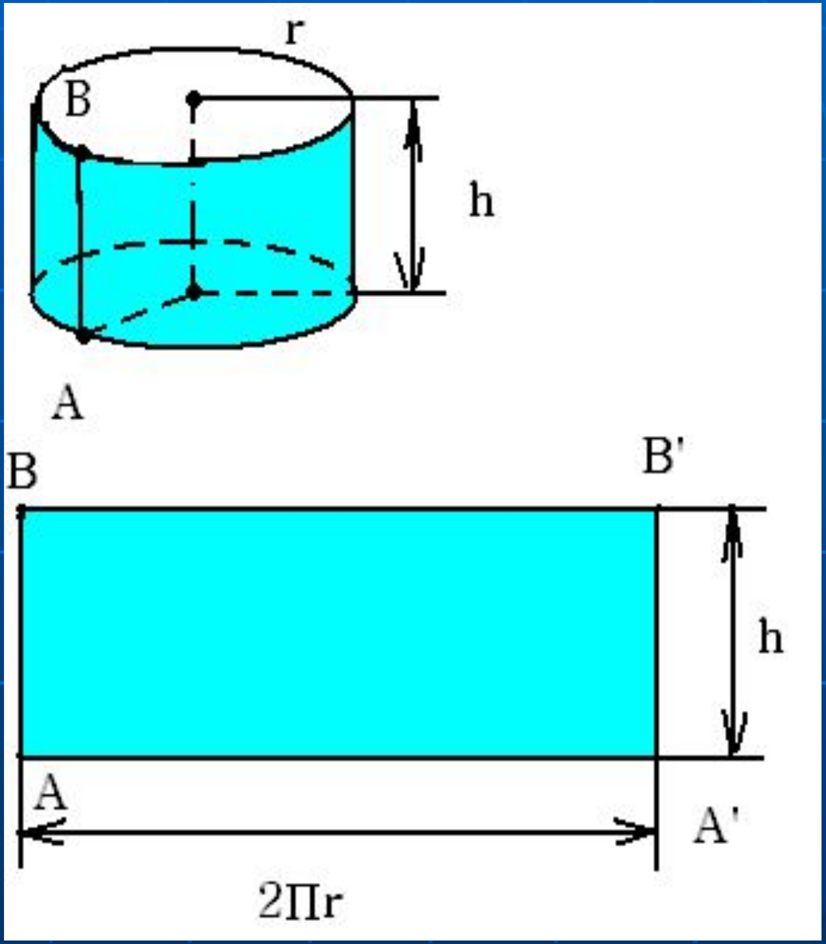
За площадь боковой поверхности цилиндра принимается площадь ее развертки.

Т.к. площадь прямоугольника ABB’A’ равна

AA’*AB=2Пrh,

то для вычисления площади боковой поверхности цилиндра радиуса r и высоты h получается формула

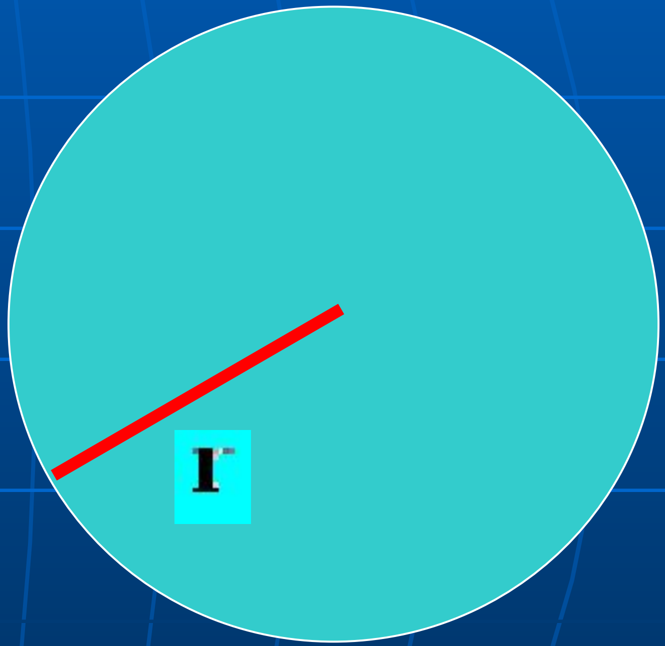
Sбок=2Пrh



Площадь основания

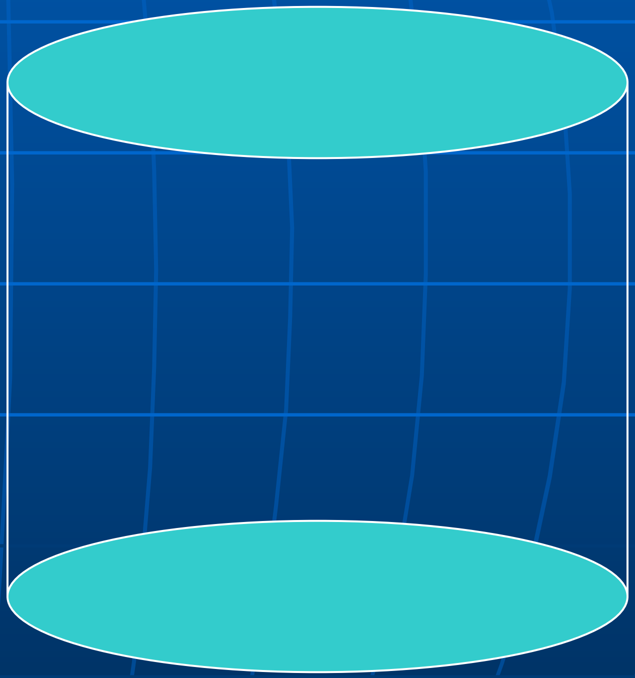
Площадь каждого основания равна

Πr^2



Площадь полной поверхности цилиндра вычисляется по формуле

$$S_{цил}=2\pi r(r+h).$$

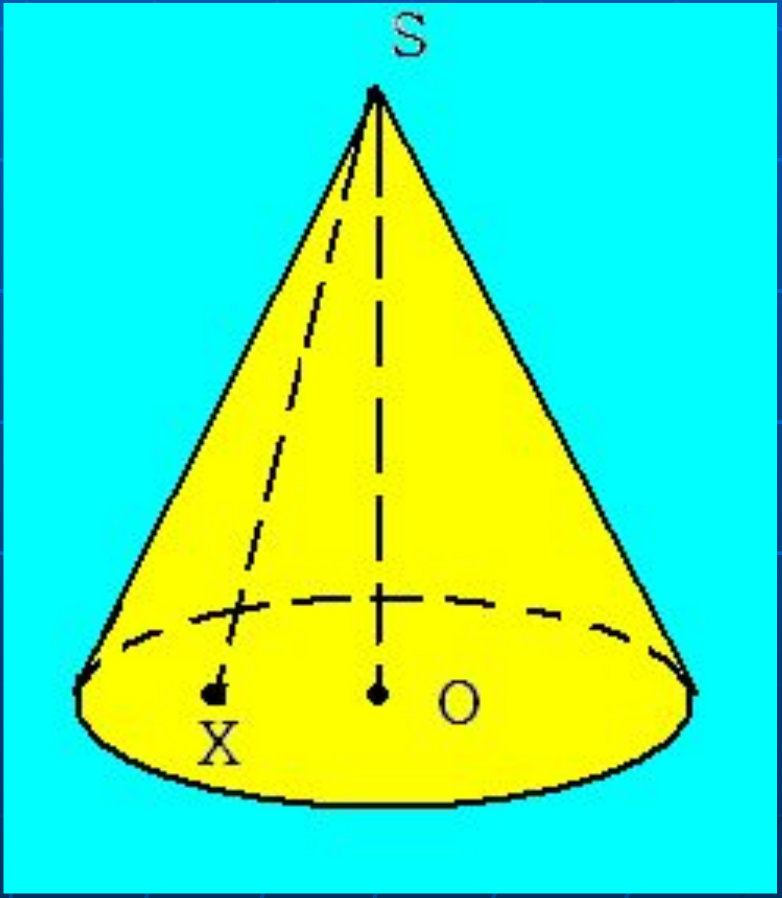


Конус

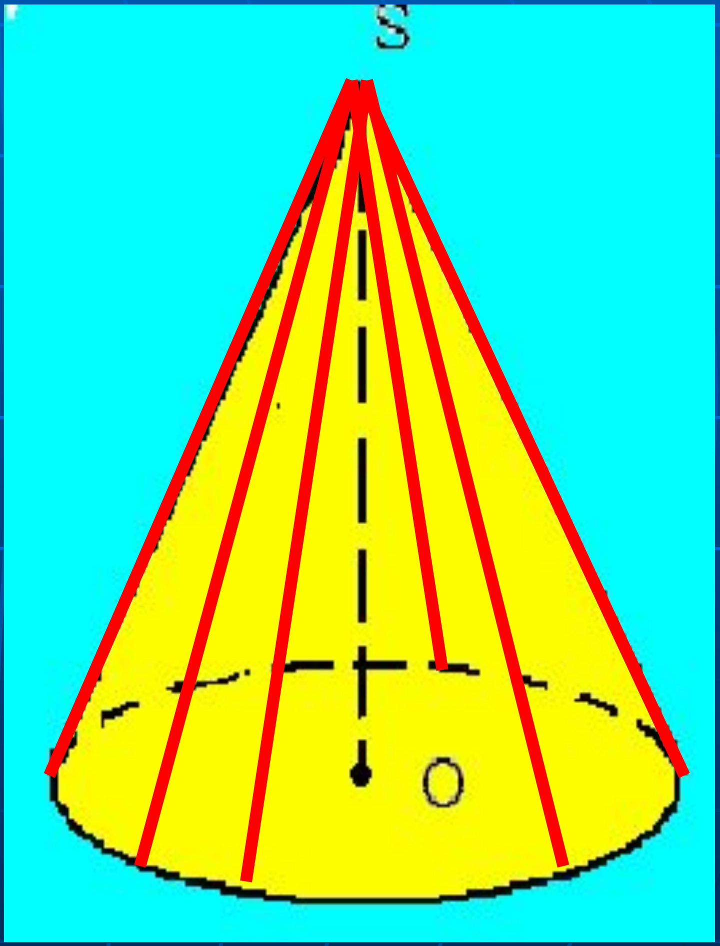
- Определение конуса как геометрического тела
- Прямой конус
- Элементы конуса (поверхность конуса, высота, ось)
- Определение конуса как тела вращения
- Сечения конуса плоскостями
- Определение усеченного конуса
- Вписанная и описанная пирамида
- Площадь полной поверхности

Конус

Конусом (точнее, круговым конусом) называется тело, которое состоит из круга – основания конуса, точки, не лежащей в плоскости этого круга, - вершины конуса и всех отрезков, соединяющих вершину конуса с точками основания.



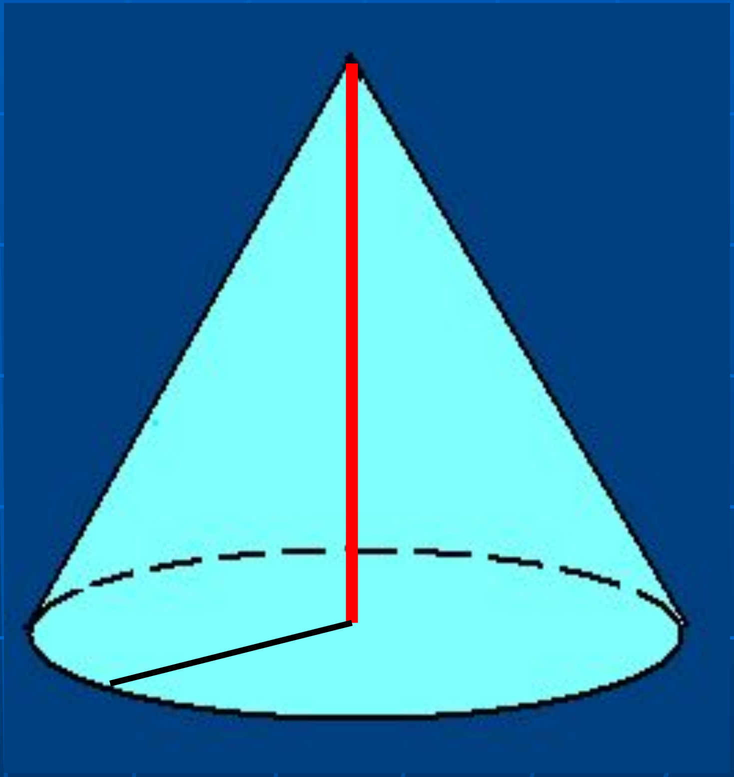
Отрезки, соединяющие вершину конуса с точками окружности основания, называются образующими конуса



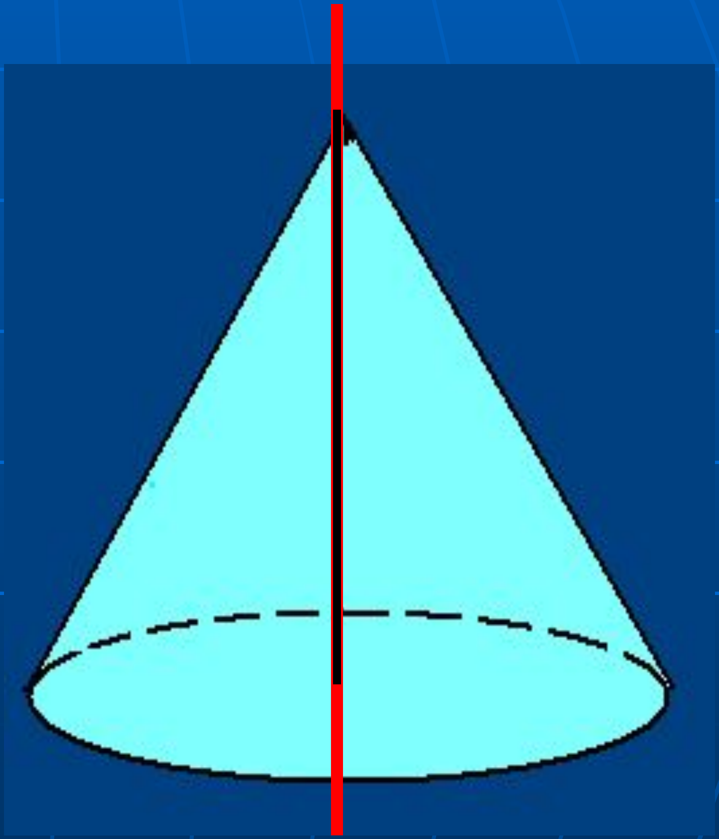
Конус называется прямым, если прямая, соединяющая вершину конуса с центром основания, перпендикулярна плоскости основания.

Поверхность конуса состоит из основания и боковой поверхности. Боковая поверхность составлена из образующих.

Высотой конуса называется перпендикуляр, опущенный из его вершины на плоскость основания. У прямого конуса основание высоты совпадает с центром основания.

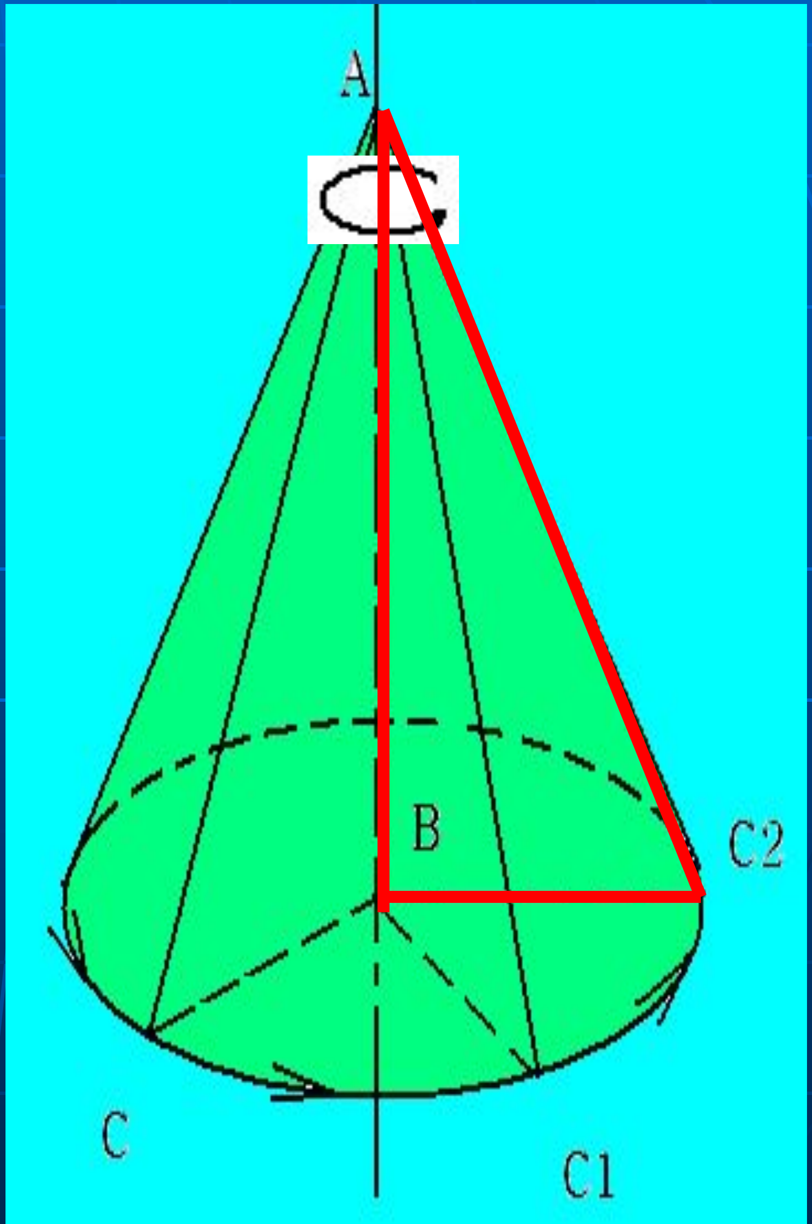


Осью прямого кругового конуса называется прямая, содержащая его высоту.



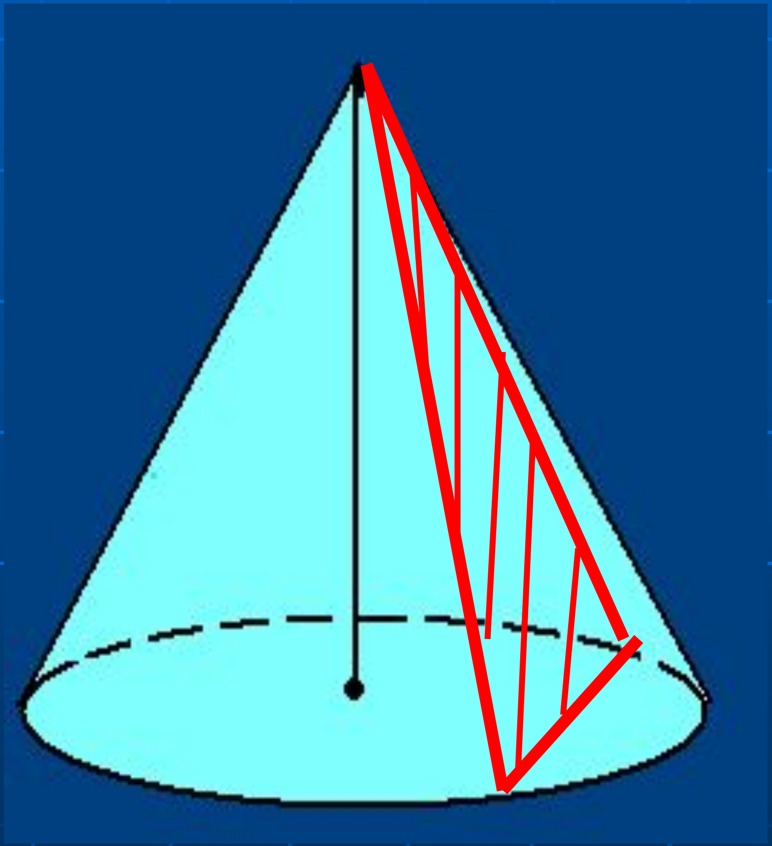
Конус может быть получен вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов.

На рисунке изображен конус, полученный вращением прямоугольного треугольника ABC2 вокруг катета AB. При этом боковая поверхность конуса образуется вращением гипотенузы AC2, а основание – вращением катета BC.

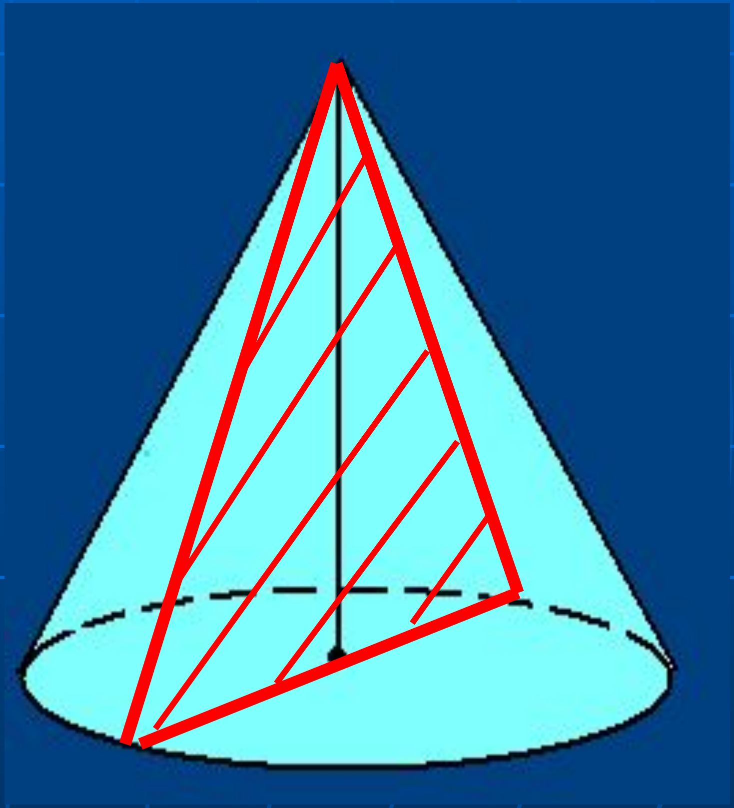


Сечения конуса плоскостями

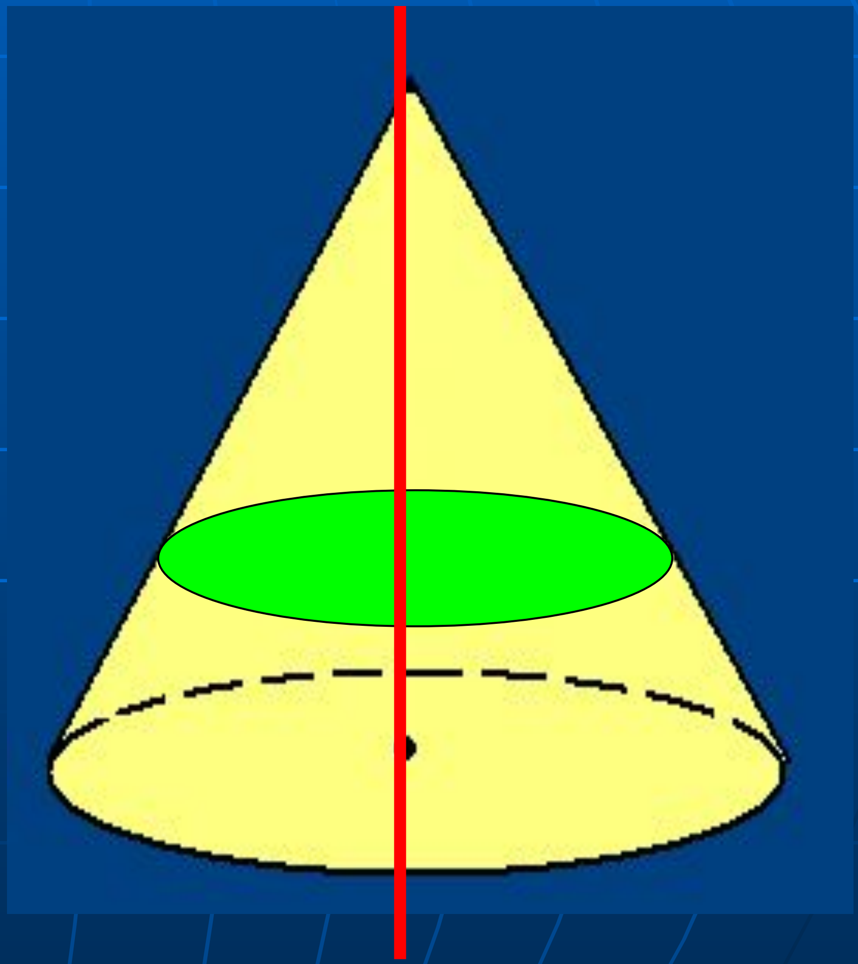
Сечение конуса плоскостью, проходящей через его вершину, представляет собой равнобедренный треугольник, у которого боковые стороны являются образующими конуса.



Если секущая плоскость проходит через ось конуса, то сечение представляет собой равнобедренный треугольник, основание которого диаметр основания конуса, а боковые стороны – образующие конуса. Такое сечение называется осевым.



Если секущая плоскость перпендикулярна к оси конуса, то сечение конуса представляет собой круг с центром расположенным на оси конуса.

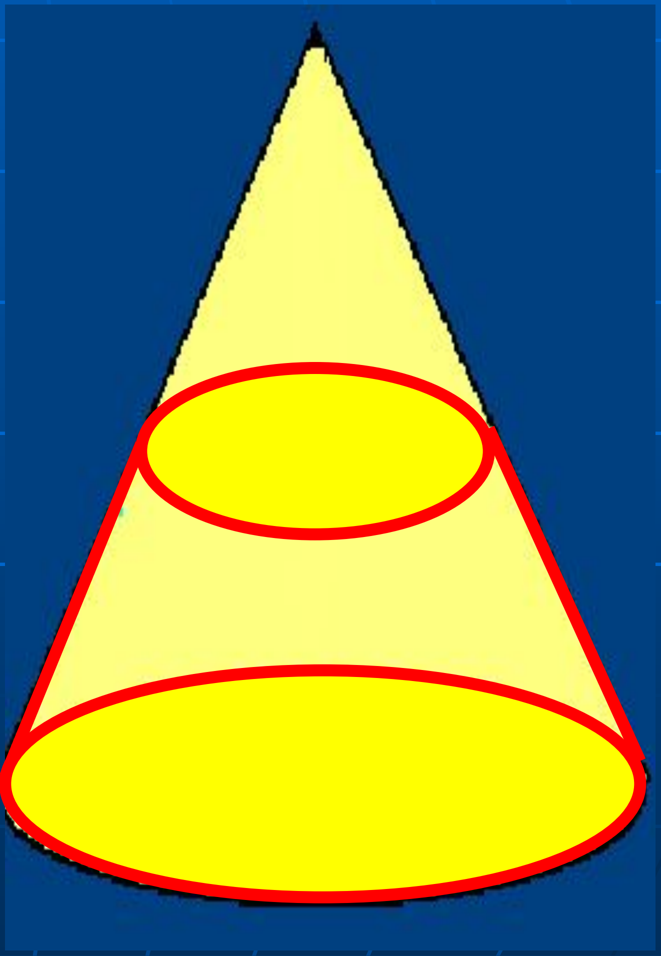


Теорема. Плоскость, параллельная плоскости основания конуса, пересекает конус по кругу, а боковую поверхность – по окружности с центром на оси конуса.

Усеченный конус

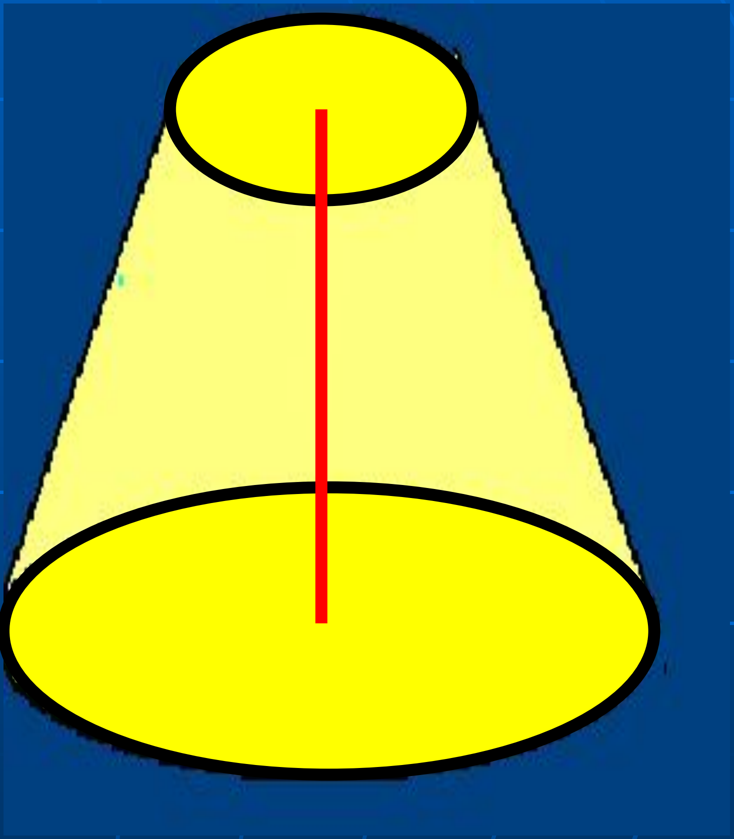
Плоскость, параллельная основанию конуса и пересекающая конус, отсекает от него меньший конус.

Оставшаяся часть называется усеченным конусом.



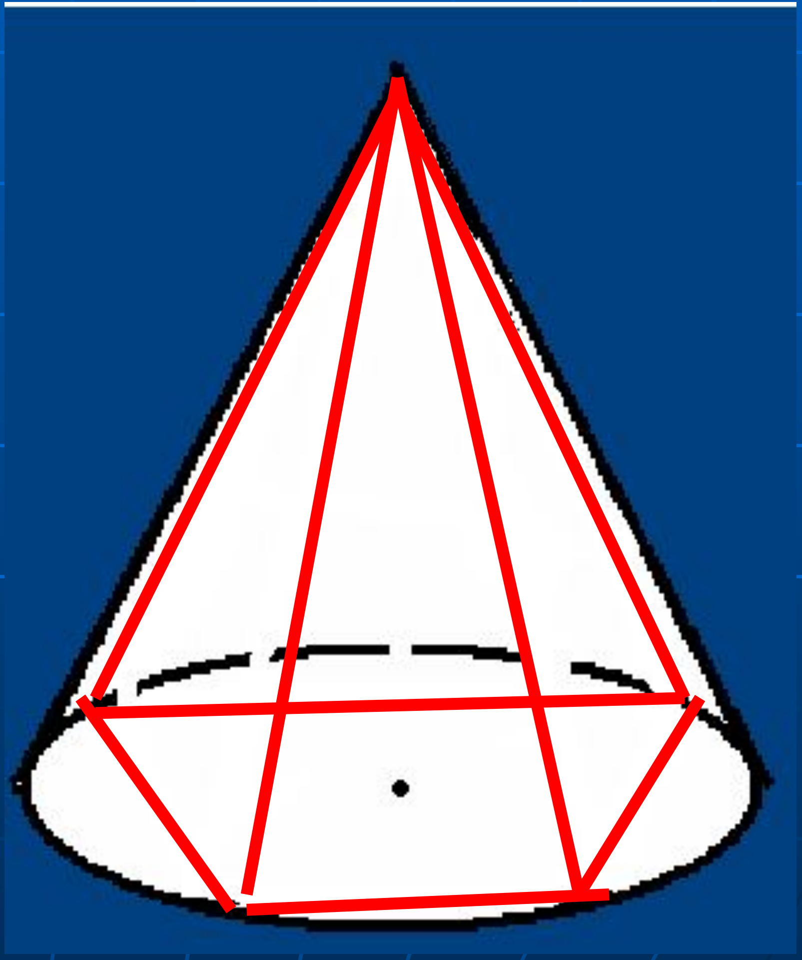
Основание исходного конуса и круг, полученный в сечении этого конуса плоскостью называются основаниями усеченного конуса.

А отрезок соединяющий их центры называется высотой усеченного конуса.



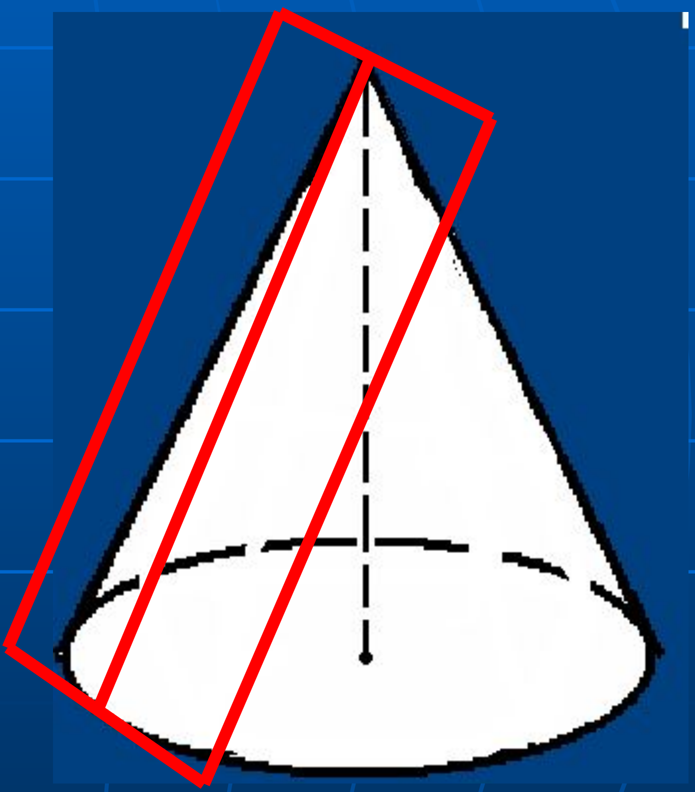
Вписанная пирамида

Пирамидой, вписанной в конус, называется такая пирамида, основание которой есть многоугольник, вписанный в окружность основания конуса, а вершиной является вершина конуса. Боковые ребра пирамиды, вписанной в конус, являются образующими конуса.



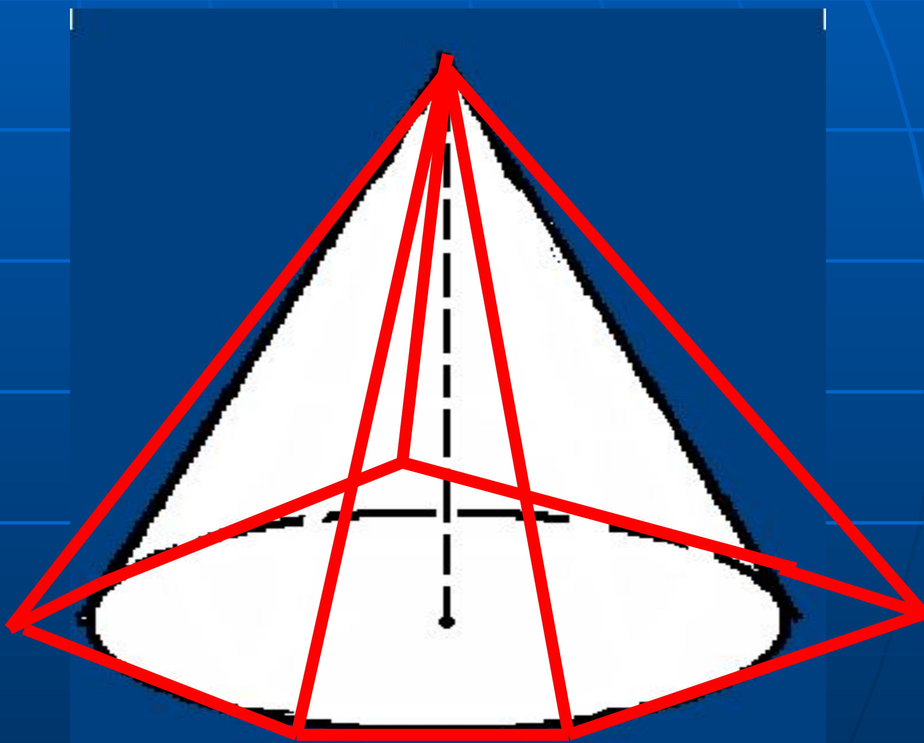
Касательная плоскость к конусу

Касательной плоскостью к конусу называется плоскость, проходящая через образующую конуса и перпендикулярная плоскости осевого сечения, содержащей эту образующую.



Описанная пирамида

Пирамидой, описанной около конуса, называется пирамида, у которой основанием служит многоугольник, описанный около основания конуса, а вершина совпадает с вершиной конуса. Плоскости боковых граней описанной пирамиды являются касательными плоскостями конуса.



Площадь полной поверхности конуса

Площадь боковой поверхности

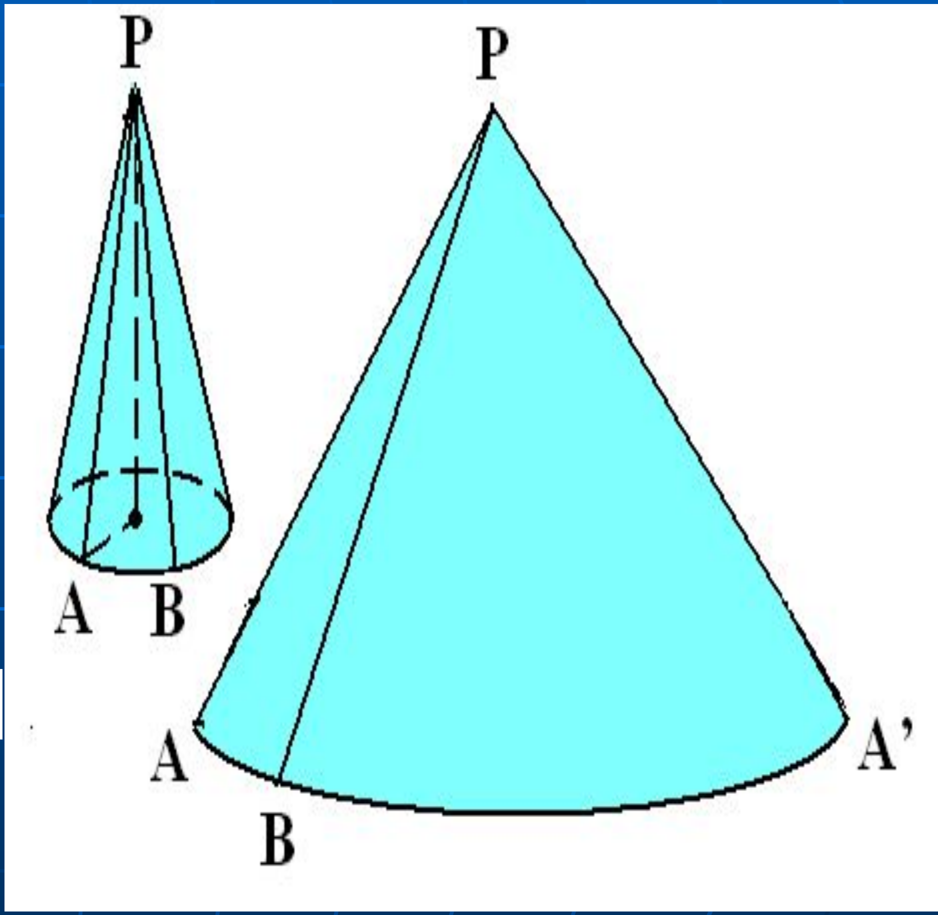
+

Площадь основания

За площадь боковой поверхности конуса принимается площадь ее развертки.

Т.к. площадь кругового сектора – развертки боковой поверхности конуса равна $\Pi\, l^2\, \alpha/360^0$ где α - градусная мера дуги ABA’, поэтому $S_{бок}=\Pi\, l^2\, \alpha/360^0$ Выражая α через l и r получаем $\alpha=360^0 r/l$.

Т.о. $S_{бок}=\pi r l$



Площадь полной поверхности

Площадь полной поверхности конуса вычисляется по формуле:

$$S_{пол}=\pi r(l+r)$$

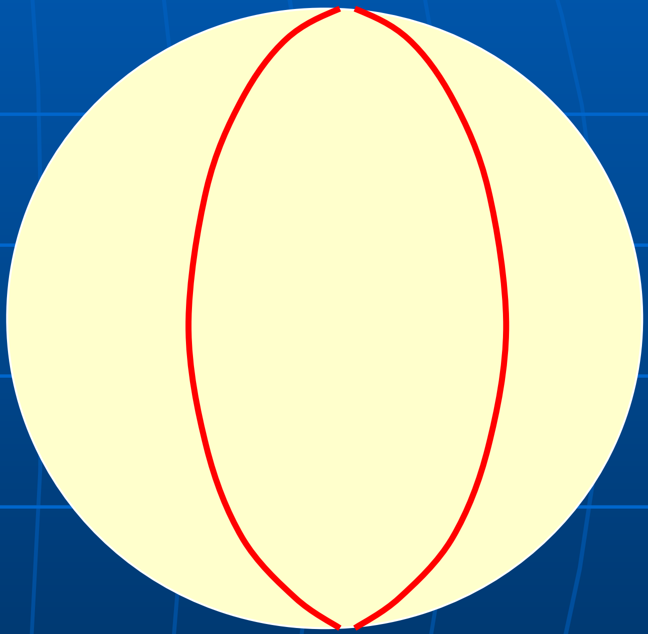
где L – длина окружности, r – радиус окружности.

Шар

- Определение шара
- Элементы шара (шаровая поверхность, радиус, диаметр)
- Определение шара как тела вращения
- Сечения шара плоскостями
- Симметрия шара
- Касательная плоскость к шару
- Пересечение двух сфер

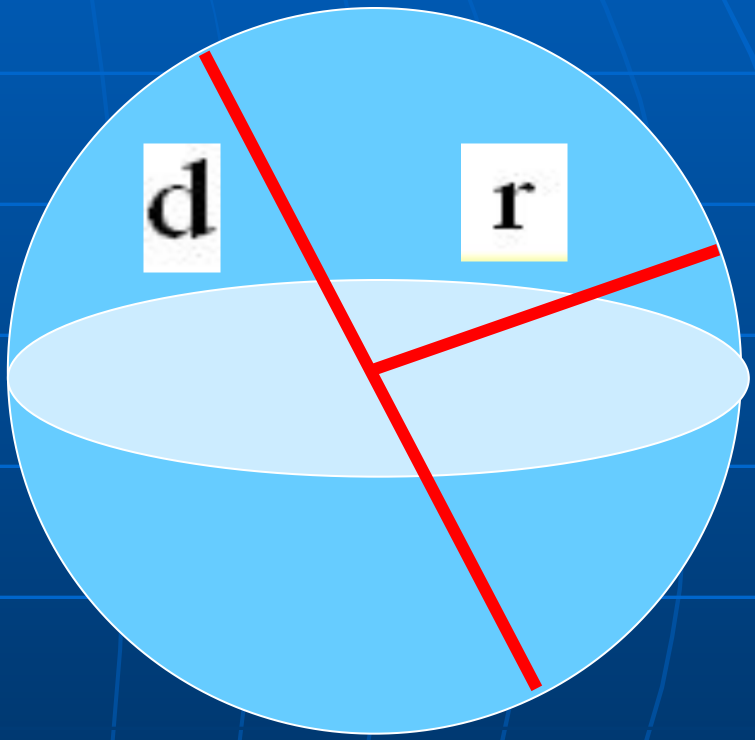
Шар

Шаром называется тело, которое состоит из всех точек пространства, находящихся на расстоянии, не большем данного, от данной точки. Эта точка называется центром шара.

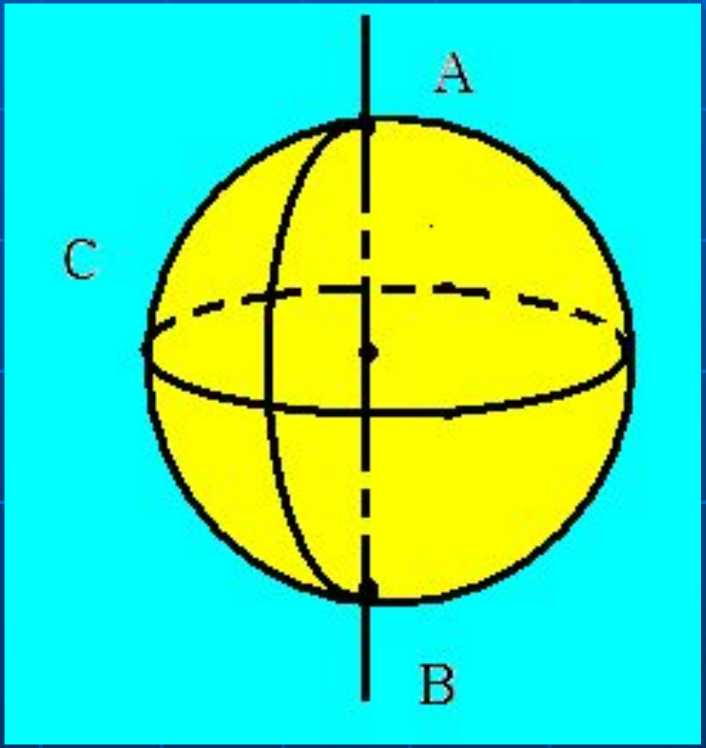


Любой отрезок, соединяющий центр шара с точкой шаровой поверхности, называется радиусом.

Отрезок, соединяющий две точки шаровой поверхности и проходящий через центр шара, называется диаметром.



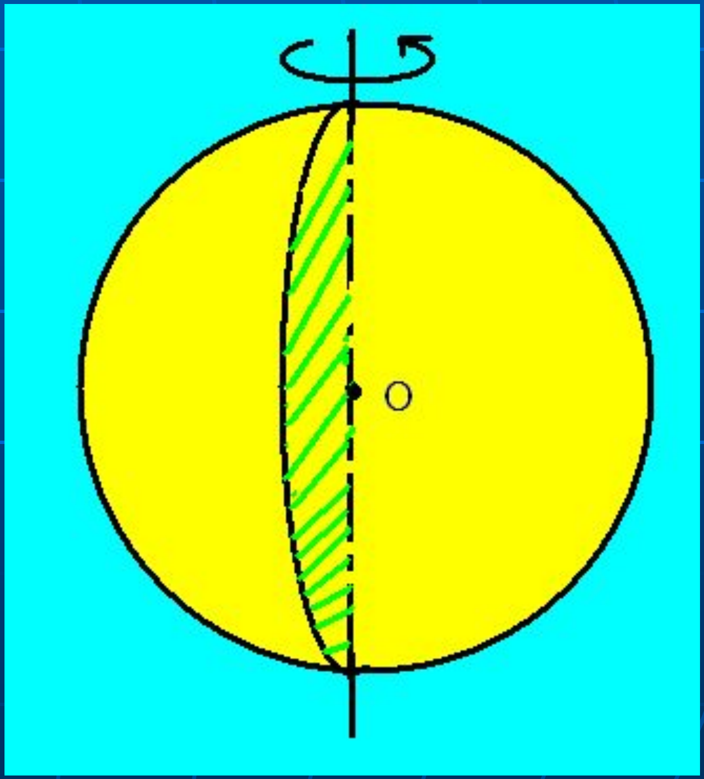
Граница шара называется шаровой поверхностью, или сферой. Т.о., точками сферы являются все точки шара, которые удалены от центра на расстояние, равное радиусу.



Концы любого диаметра называются диаметрально противоположными точками шара.

На рисунке точки A и B являются диаметрально противоположными.

Сфера может быть получена вращением полуокружности АСВ вокруг ее диаметра АВ как оси.

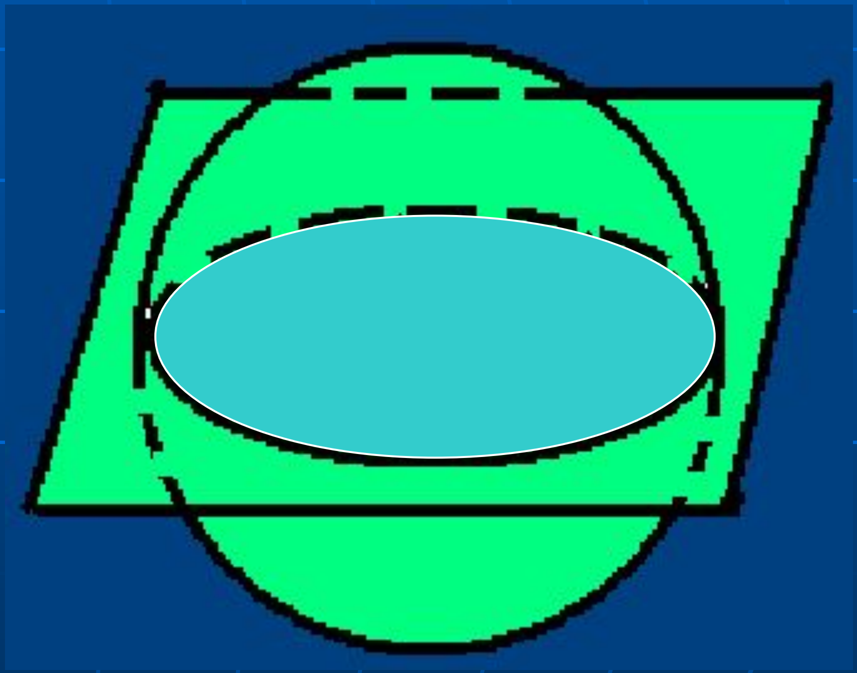


Сечение шара плоскостью

Теорема. Всякое сечение шара плоскостью есть круг. Центр этого круга есть основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость.

Плоскость, проходящая через центр шара, называется диаметральной плоскостью.

Сечение шара диаметральной плоскостью называется большим кругом, а сечение сферы – большой окружностью.



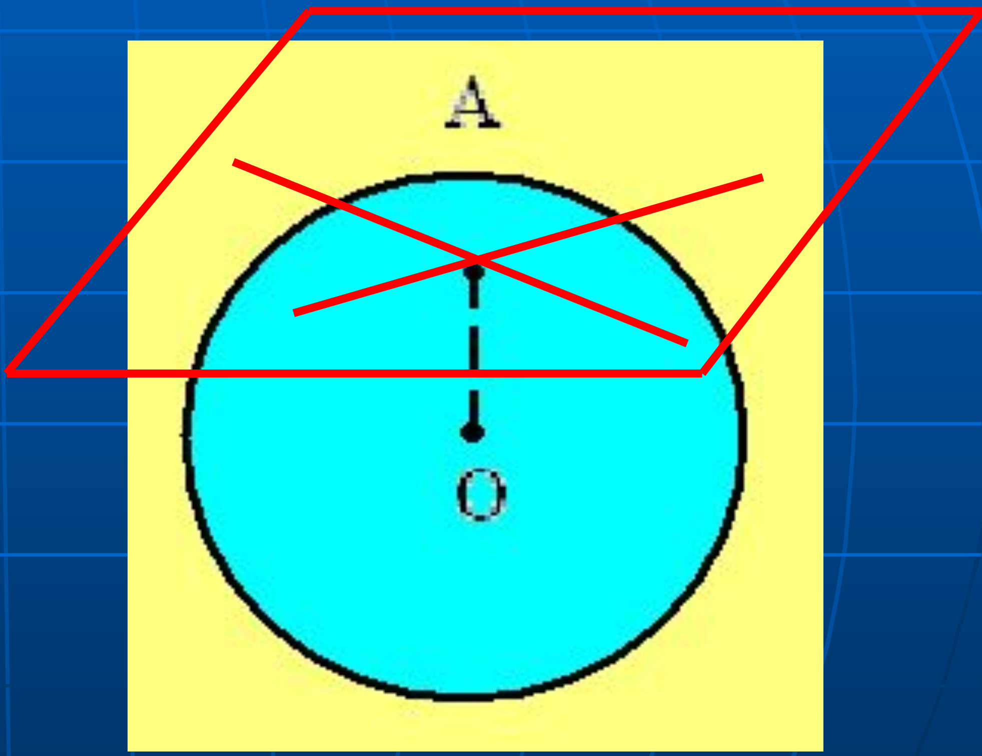
Симметрия шара

Теорема. Любая диаметральная плоскость шара является его плоскостью симметрии. Центр шара является его центром симметрии.

Касательная плоскость к шару

Плоскость, проходящая через точку А шаровой поверхности и перпендикулярная радиусу, проведенному в точку А, называется касательной плоскостью.

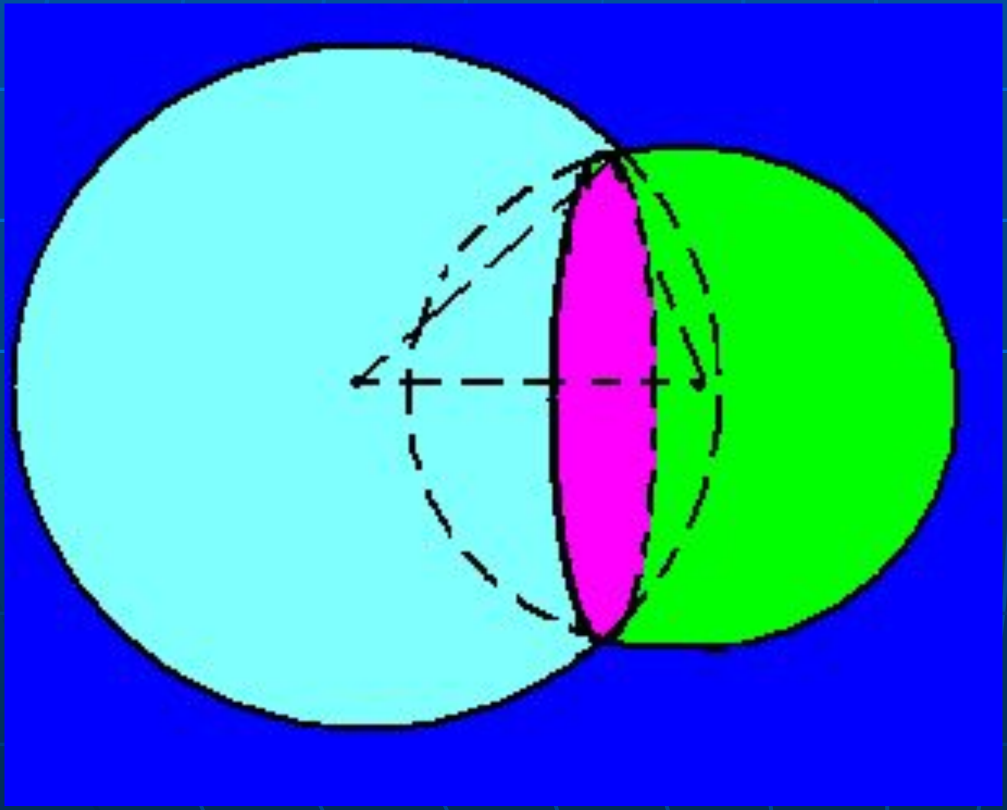
Точка А называется точкой касания. Прямая в касательной плоскости шара, проходящая через точку касания, называется касательной к шару в этой точке.

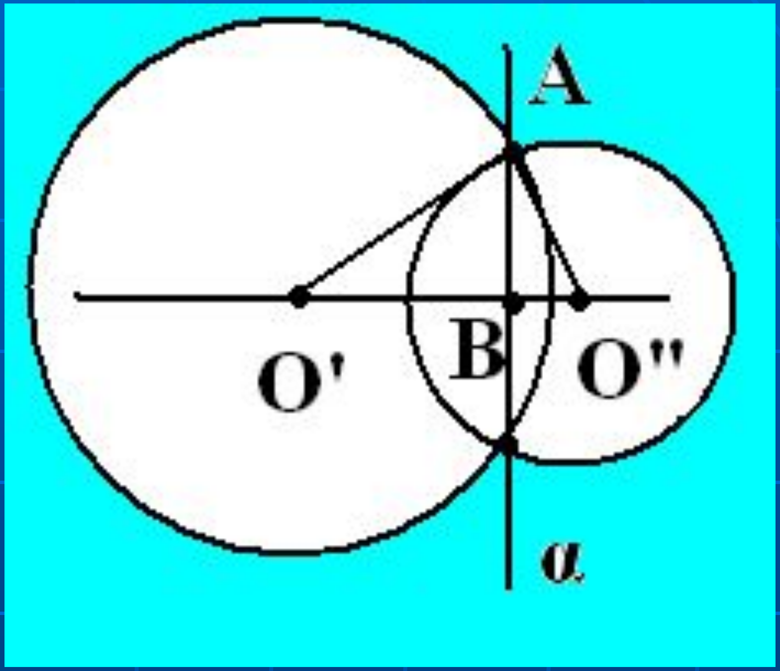


Теорема. Касательная плоскость имеет с шаром только одну общую точку – точку касания.

Пересечение двух сфер

Теорема. Линия пересечения двух сфер есть окружность.





Площадь сферы вычисляется

по формуле

$$S=4\pi R^2$$