

Томский политехнический университет

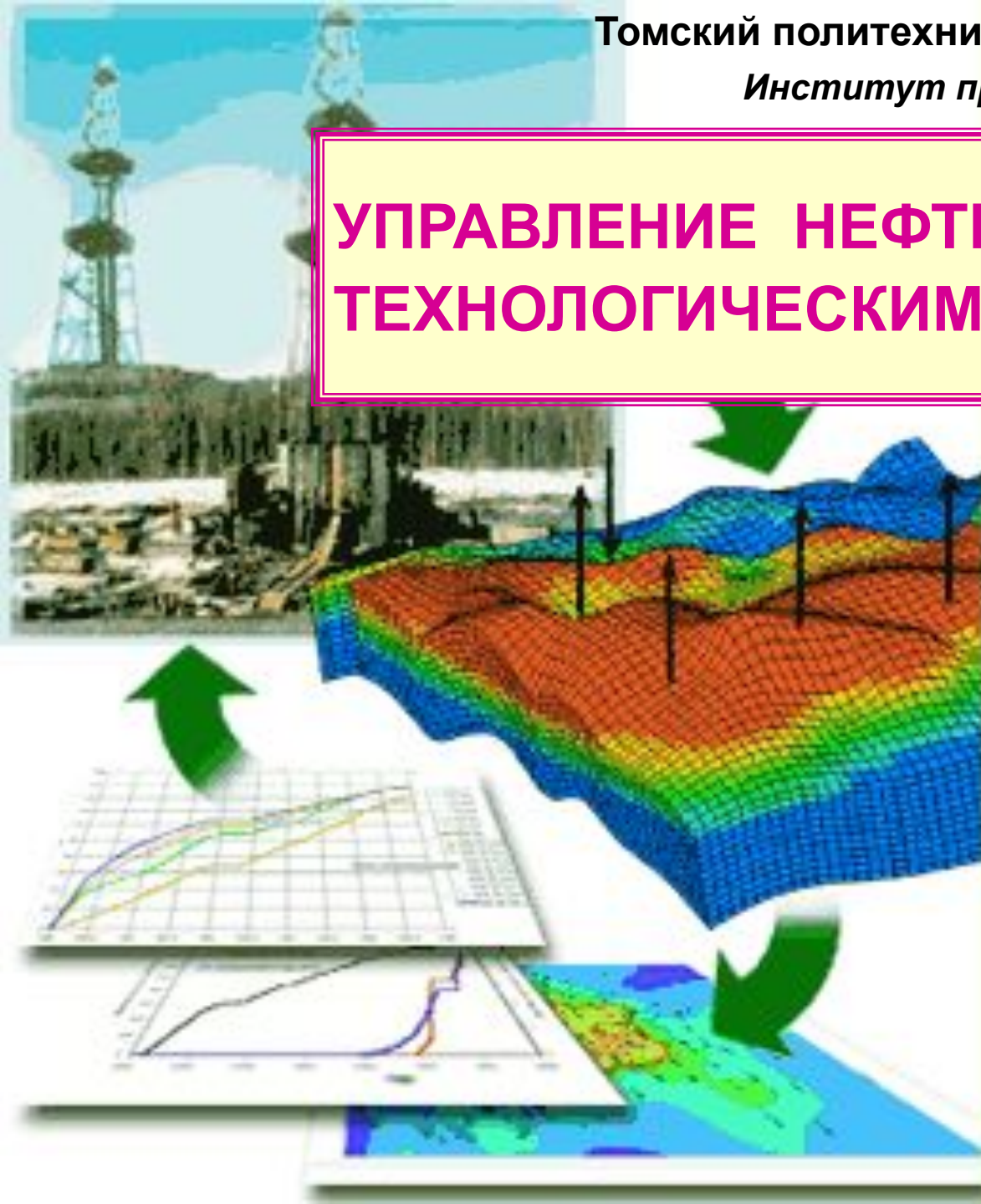
Институт природных ресурсов

УПРАВЛЕНИЕ НЕФТЕГАЗОВЫМИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ

Презентация учебного
курса для студентов
направления 21.04.01
«Нефтегазовое дело»
(магистры)

*КАФЕДРА
геологии и разработки
нефтяных
месторождений*

Подготовил
проф. каф. ГРНМ
Зятиков
Павел Николаевич



Физические свойства коллекторов

НЕФТЕ-, ГАЗО-, ВОДОНАСЫЩЕННОСТЬ ПОРОД-КОЛЛЕКТОРОВ

Коэффициентом **нефтенасыщенности** (**газонасыщенности**) коллектора называется отношение объема нефти (газа), содержащейся в открытом пустотном пространстве, к суммарному объему открытых пустот.

Коэффициентом **водонасыщенности** коллектора, содержащего нефть или газ, называется отношение объема остаточной воды, содержащейся в открытом пустотном пространстве, к суммарному объему открытых пустот.

Указанные коэффициенты связаны следующими соотношениями:

для нефтенасыщенного коллектора

$$S_H + S_{CB} = 1$$

для газонасыщенного коллектора

$$S_G + S_{CB} = 1$$

для коллектора, содержащего нефть и газ

$$S_G + S_H + S_{CB} = 1$$

Соотношение коэффициентов эффективной пористости и водонасыщенности:

$$m_{эф} = m \cdot (1 - S_{CB})$$

Физические свойства коллекторов

ПРОНИЦАЕМОСТЬ

Проницаемость коллектора — параметр, характеризующий его способность пропускать жидкость или газ. Как и пористость проницаемость не постоянная величина и изменяется по площади пласта и по пластованию.

Абсолютной называется проницаемость при фильтрации через породу одной какой-либо жидкости (нефти, воды) при полном насыщении пор этой жидкостью. Абсолютная проницаемость характеризует физические свойства породы, т. е. природу самой среды.

Фазовой или **эффективной** называется проницаемость, определенная для какого-либо одного из компонентов при содержании в порах других сред.

Отношение фазовой проницаемости к абсолютной называется **относительной проницаемостью**.

Проницаемость

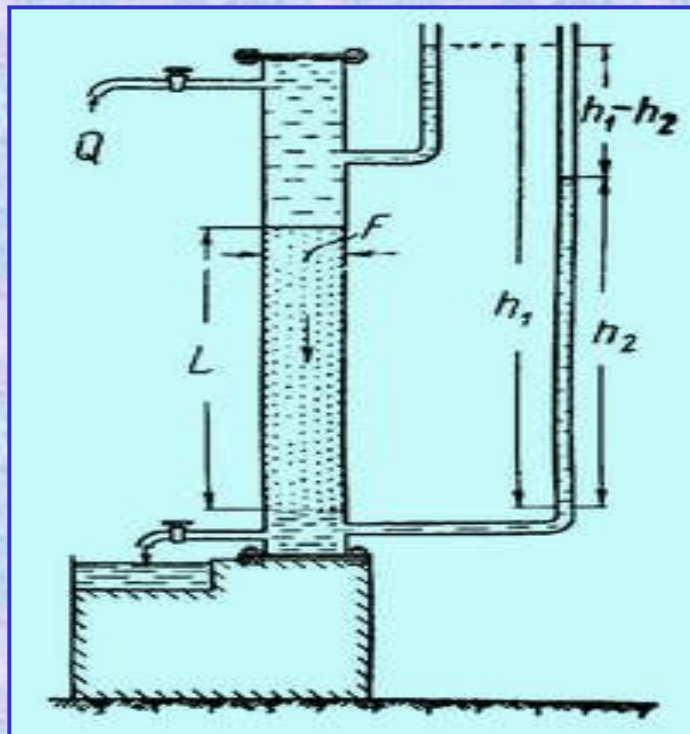
Количественной характеристикой проницаемости служит **коэффициент проницаемости**, являющийся коэффициентом пропорциональности в линейном законе фильтрации – **законе Дарси**.

Закон Дарси: v

скорость фильтрации прямо пропорциональна градиенту давления $\Delta p / \Delta l$ (перепаду давления, действующему на единицу длины) в пористой среде и обратно пропорциональна динамической вязкости μ фильтрующегося газа или жидкости

$$v = \frac{Q}{F} = \frac{k}{\mu} \cdot \frac{\Delta p}{\Delta l}$$

Q - объемный расход жидкости или газа,
 F - площадь фильтрации.



Проницаемость

Физический смысл размерности коэффициента проницаемости – это **величина площади сечения** каналов пористой среды горной породы, по которым происходит фильтрация флюидов.

$$k = \frac{Q \cdot \mu \cdot \Delta l}{F \cdot \Delta p}$$

За единицу проницаемости в 1 м^2 принимается проницаемость такой пористой среды, при фильтрации через образец которой площадью 1 м^2 , длиной 1 м и перепаде давления 1 Па расход жидкости вязкостью $1 \text{ Па} \cdot \text{с}$ составляет $1 \text{ м}^3 / \text{с}$.

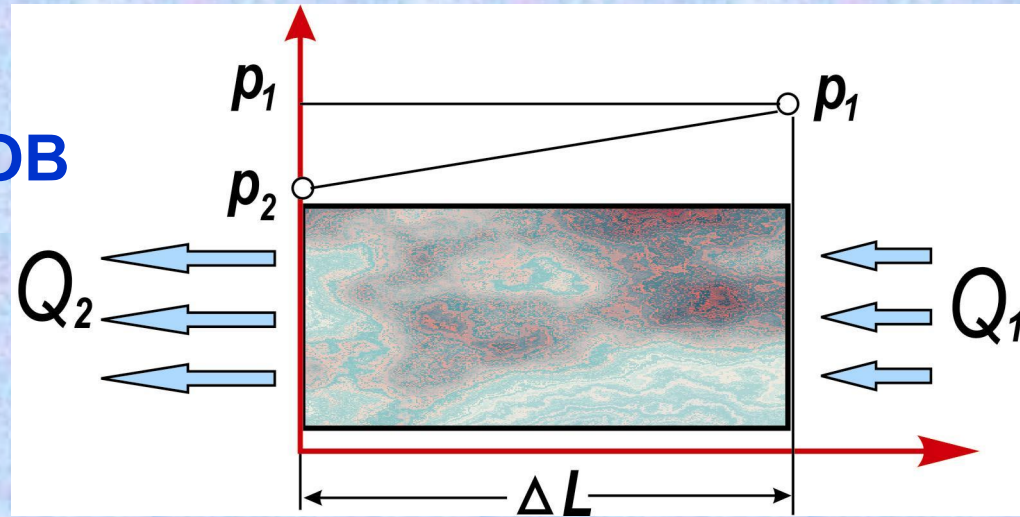
За единицу проницаемости в 1 дарси (1 Д) принимают проницаемость такой пористой среды, при фильтрации через образец которой площадью 1 см^2 и длиной 1 см при перепаде давления 1 кг/см^2 расход жидкости вязкостью 1 спз (сантипуаз) составляет $1 \text{ см}^3 / \text{сек}$. Величина, равная $0,001 \text{ Д}$, называется миллидарси (мД). Учитывая, что $1 \text{ кг/см}^2 = \sim 10^5 \text{ Па}$, $1 \text{ см}^3 = 10^{-6} \text{ м}^3$, $1 \text{ см}^2 = 10^{-4} \text{ м}^2$, $1 \text{ спз} = 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{сек}$, получим следующее соотношение:

$$1 \text{ Д} = \frac{10^{-6} (\text{м}^3 / \text{с}) \cdot 10^{-3} (\text{Па} \cdot \text{с}) \cdot 10^{-2} (\text{м})}{10^{-4} (\text{м}^2) \cdot 10^5 (\text{Па})} = 10^{-12} \text{ м}^2 = 1 \text{ мкм}^2$$

Проницаемость

ФИЛЬТРАЦИЯ ГАЗОВ

Газ – сжимаемая система и при уменьшении давления по длине образца **объёмный расход газа непостоянный**.



$$k = \frac{\bar{Q}_r \cdot \mu \cdot \Delta l}{F \cdot \Delta p}$$

$$\Delta p = p_1 - p_2$$

Закон Бойля-Мариотта \Rightarrow при $T = const$, $pV = const$

$$p_{cp} V_{cp} = p_0 V_0 = p_1 V_1 = p_2 V_2$$

$$p_{cp} = \frac{p_1 + p_2}{2}, \quad \bar{Q}_r = \frac{V_{cp}}{t}$$

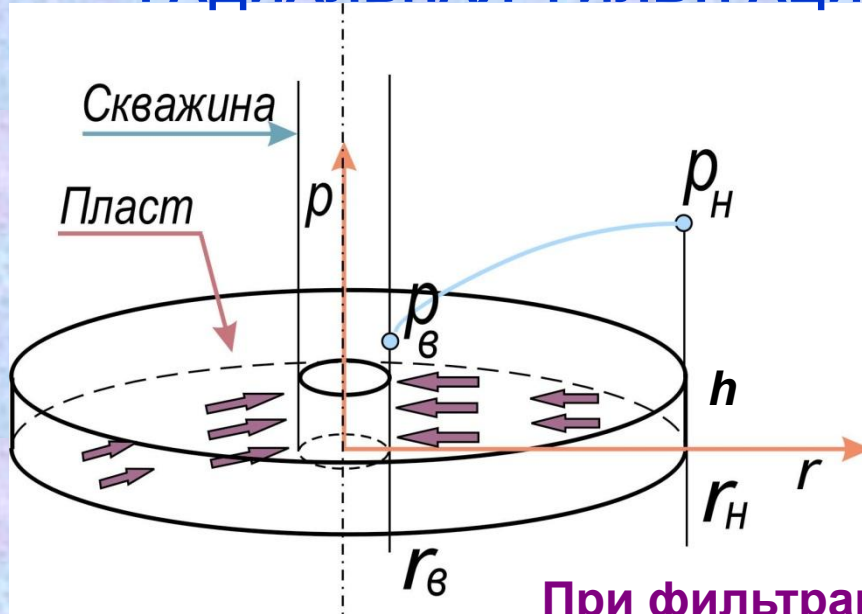
$$\bar{Q}_r = \frac{2Q_0 p_0}{p_1 + p_2}$$

Q_0 — расход газа при атмосферном давлении p_0 .

$$k = \frac{2Q_0 p_0 \mu L}{(p_1^2 - p_2^2) F}$$

Проницаемость

РАДИАЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ПЛАСТОВЫХ ФЛЮИДОВ



$$Q = \frac{2\pi h k_{np} (P_H - P_B)}{\mu \ln \frac{r_H}{r_B}}$$

При фильтрации жидкости

$$k_{np} = \frac{Q_{ж} \mu_{ж} \ln \frac{r_H}{r_B}}{2\pi h (P_H - P_B)}$$

$$\frac{Q}{F} = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot h} = \frac{k_{np} \cdot \Delta P}{\mu \cdot \Delta r} \Rightarrow \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot h} \cdot \int_{r_B}^{r_H} \frac{dr}{r} = \frac{k_{np}}{\mu} \int_{P_B}^{P_H} dP$$

При фильтрации газа

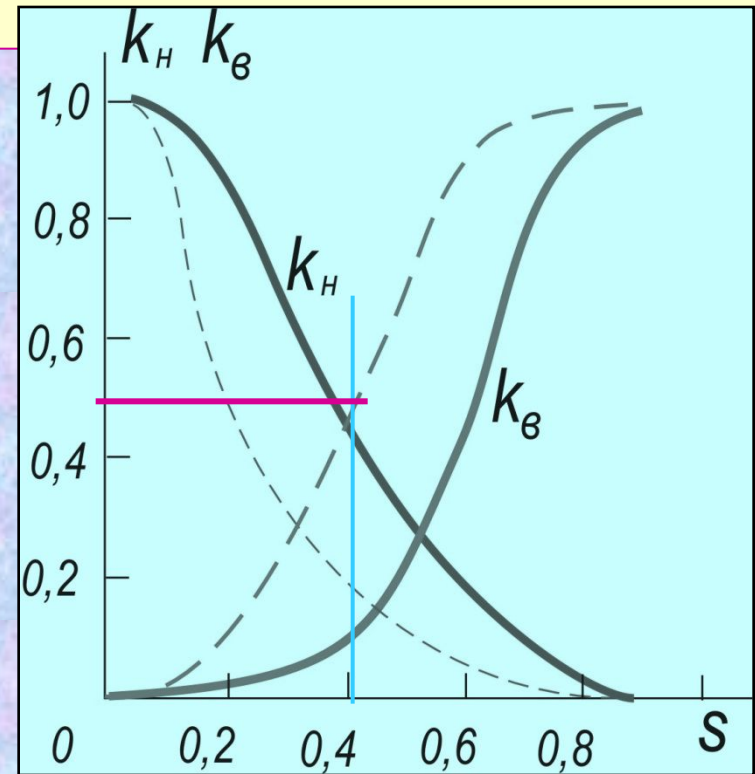
$$k_{np} = \frac{\mu_{г} \bar{Q}_{г} \ln \frac{r_H}{r_B}}{2 \cdot \pi \cdot h \cdot (p_H - p_B)} = \frac{\mu_{г} Q_0 \ln \frac{r_H}{r_B}}{\pi \cdot h \cdot (p_H^2 - p_B^2)}$$

Проницаемость

Эффективная и относительные проницаемости для различных фаз находятся в тесной зависимости от **нефте-, газо- и водонасыщенности** порового пространства породы и физико-химических свойств жидкостей.

При содержании воды в нецементированном песке до 26–28 % относительная проницаемость для неё остается равной нулю. Для других пород: песчаников, известняков, доломитов, процент остаточной водонасыщенности, как неподвижной фазы, еще выше.

При возрастании водонасыщенности до 40 % относительная проницаемость для нефти резко снижается, почти в два раза. При достижении величины водонасыщенности песка около 80 %, относительная фазовая проницаемость для нефти будет стремиться к нулю

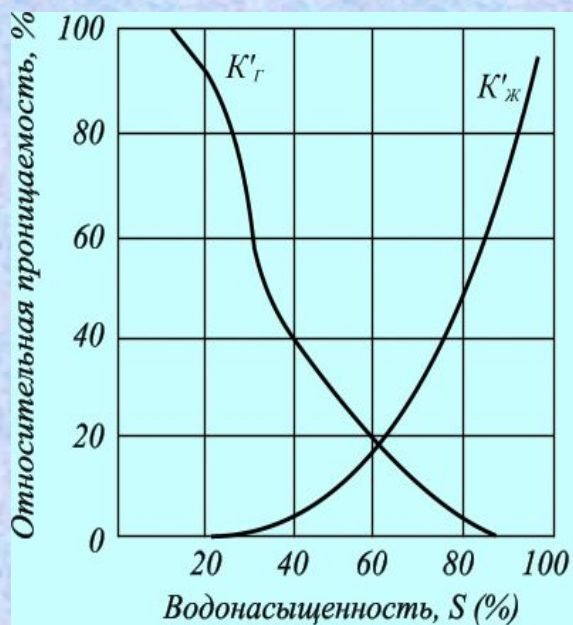


$$k_H = \frac{k_{Hф}}{k}$$

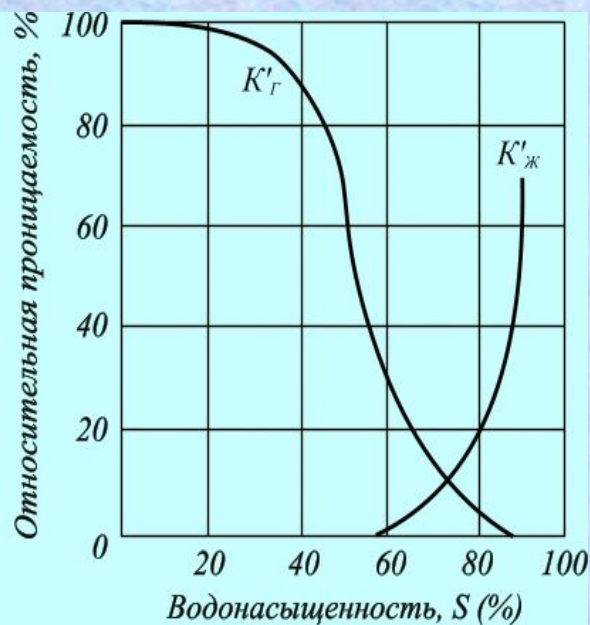
$$k_B = \frac{k_{Bф}}{k}$$

Проницаемость

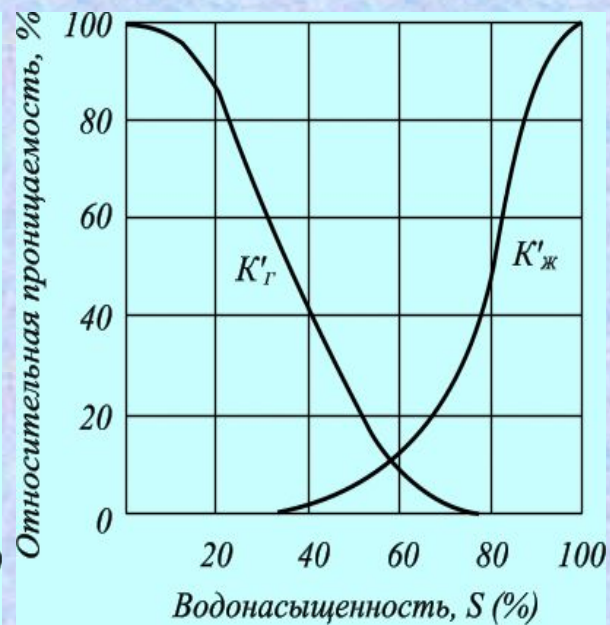
ФИЛЬТРАЦИЯ СМЕСИ ЖИДКОСТИ И ГАЗА



песок



песчаник



известняки и
доломиты

Вода с увеличением её содержания в пористой среде приблизительно от 30 до 60 % не влияет на фильтрацию газа.

При водонасыщенности до 60 % из пласта можно добывать чистый газ.

Физические свойства коллекторов

ПЬЕЗОПРОВОДНОСТЬ

П ь е з о п р о в о д н о с т ь — параметр, характеризующий скорость перераспределения давления в упругом пласте в связи с изменением пористости и проницаемости. В зоне насыщенной нефтью, она имеет меньшее значение, чем в зоне, насыщенной водой.

$$\chi = \frac{k}{\mu_{жс} \beta^*} = \frac{k}{\mu_{жс} (m_{\text{э}} \beta_{жс} + \beta_c)} \quad \beta^* = m_{\text{э}} \beta_{жс} + \beta_c$$

где k — коэффициент проницаемости в м²; $\mu_{жс}$ — динамическая вязкость жидкости в Па·с; $\beta_{жс}$ и β_c — коэффициенты объемной упругости или коэффициенты сжимаемости жидкости и пласта (пористой среды) в Па⁻¹;

β^* — коэффициент упругоэластичности пласта в Па⁻¹

ГРАНУЛОМЕТРИЧЕСКИЙ СОСТАВ ПОРОДЫ

Гранулометрический состав – содержание в горной породе зерен различной крупности, выраженное в % от массы или количества зерен исследуемого образца.



Физические свойства коллекторов

Гранулометрический состав

СИТОВОЙ АНАЛИЗ

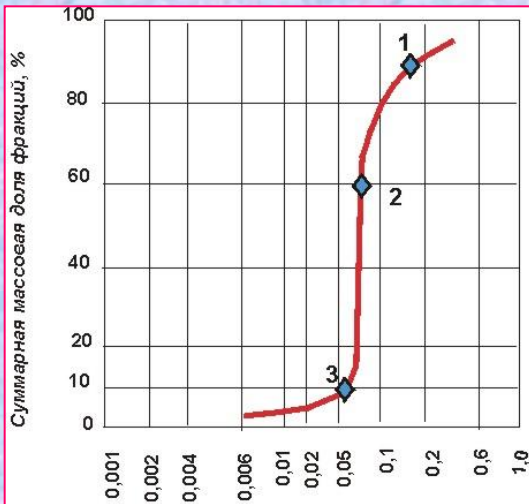


Рис. 3. Кривая суммарного гранулометрического состава
1-точка подбора размеров отверстия фильтров

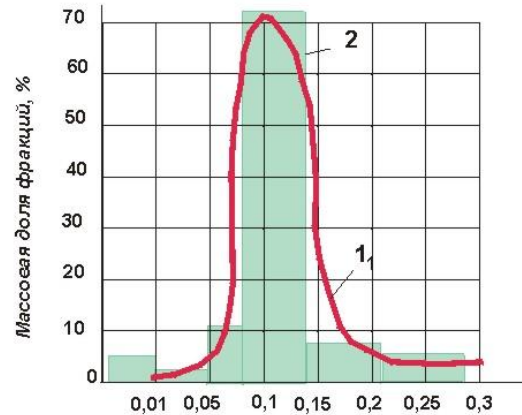
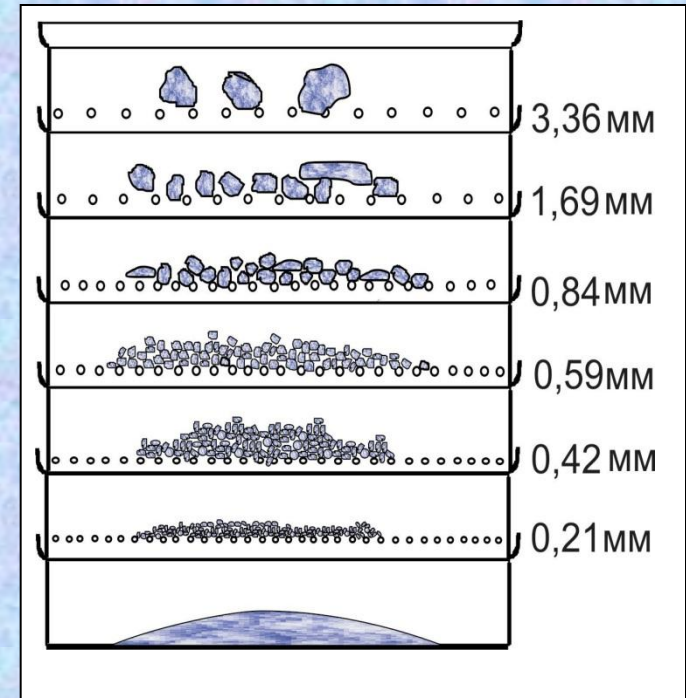


Рис.4. Кривая распределения по размерам (1) и гистограмма (2)



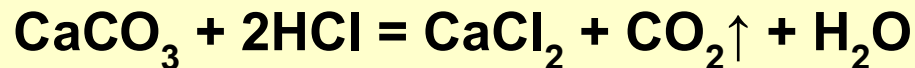
Ситовой анализ сыпучих горных пород применяют для определения содержания фракций частиц размером от 0,05 до 6—7 мм, а иногда и до 100 мм. В лабораторных условиях обычно пользуются набором проволочных или шелковых сит с размерами отверстий (размер стороны квадратного отверстия) 0,053; 0,074; 0,105; 0,149; 0,210; 0,227; 0,42; 0,59; 0,84; 1,69 и 3,36 мм.

Карбонатность горных пород

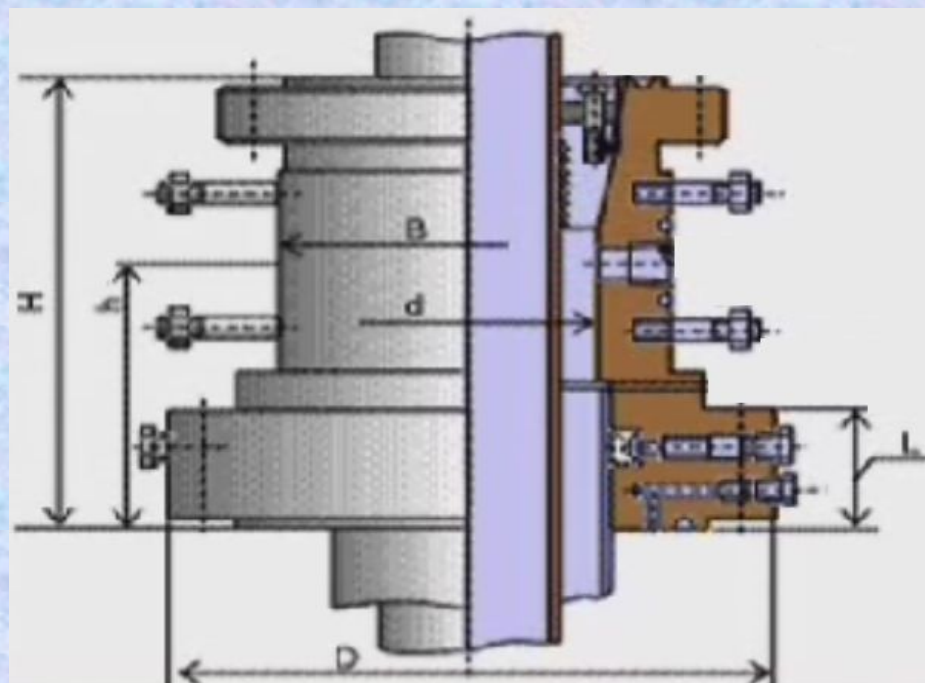
Под **карбонатностью** породы понимается содержание в ней солей угольной кислоты: **известняка** – CaCO_3 , **доломита** – $\text{CaCO}_3 \cdot \text{MgCO}_3$, **соды** – Na_2CO_3 , **поташа** – K_2CO_3 , **сидерита** – FeCO_3 и других.

Определение карбонатности пород проводят для выяснения возможности проведения солянокислотной обработки скважин с целью увеличения вторичной пористости и проницаемости призабойной зоны, а также для определения химического состава горных пород, слагающих нефтяной пласт.

Карбонатность пород продуктивных пластов определяют в лабораторных условиях по керновому материалу газометрическим методом.



По объёму выделившегося газа (CO_2) вычисляют весовое (%) содержание карбонатов в породе в пересчёте на известняк (CaCO_3).



Устьевая колонная обвязка предназначена для:

- Герметизации пространства между обсадными колоннами скважины;
 - Контроля и измерения давления среды в межколонных пространствах;
 - Опрессовки фланцевых соединений;
 - Проведения цементирования скважины;
- др. технологических операций

Таблица 1.1

Условный диаметр трубы, мм	27	33	42	48	60	73	89	102	114
Толщина стенки, мм	3	3.5	3.5	4.0	5.0	6.5 ÷ 7.0	8.0	6.5	7.0

Производятся НКТ (муфтовые гладкие):

- a) с конической резьбой треугольного профиля;
- b) с конической резьбой трапециидального профиля;
- c) с конической резьбой треугольного профиля, с повышенной пластичностью и хладостойкостью;
- d) с конической резьбой треугольного профиля с узлом уплотнения из полимерного материала

Таблица

Условный диаметр (d_H), мм	Толщина стенки (δ), мм	Группа прочности стали			
		Д	К	Е	Л
		Предел текучести (σ_m), кгс/см ²			
		3800	5000	5500	6500
		Страгивающая нагрузка для резьбового соединения ($Q_{стр}$), кгс			
48	4,0	11870	15600	17500	20300
60	5,0	20870	27400	30150	35600
73	5,5	29400	38700	42600	50500
89	6,5	44600	58500	64500	76250
102	6,75	45900	60800	66400	78500
114	7,0	56700	75200	82200	97200

С учетом срагивающей нагрузки, предельно допустимая длина подвески для одноразмерной колонны НКТ рассчитывается по формуле:

$$l = \frac{Q_{ст} \rho}{K q_T}, \text{ м} \quad (1.1)$$

где K – коэффициент запаса прочности (1,3÷1,5);

q_T – вес 1 м труб, кгс.

При этом, допустимое внутреннее давление для труб определяется по формуле Барлоу []:

$$p_{доп} = \frac{2\delta\sigma_T}{d_H K}, \text{ кгс/см}^2 \quad (1.2)$$

где $K = 2$ – коэффициент запаса прочности.

Пакеры выпускаются следующих типов:

- ПВ – пакер, воспринимающий усилие от перепада давления, направленного вверх;
- ПН – тоже, направленного вниз;
- ПД – то же, направленного как вниз, так и вверх.

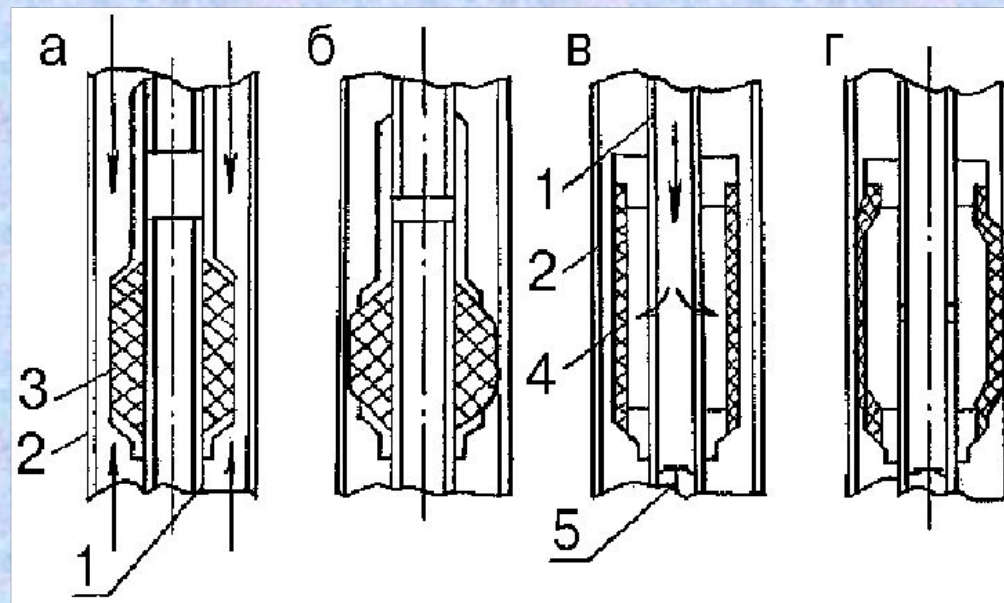


Рис.1.4 Пакеры:

1 — НКТ; 2 — обсадная колонна; 3 — пакер механический; 4 — пакер гидравлический; 5 — заглушка.

Материальный и тепловой балансы – законы сохранения массы и энергии для физико-химических процессов.

Материальный баланс – количество поступающих веществ $\sum G_{\text{н}}$ должно быть равно количеству веществ $\sum G_{\text{к}}$, получаемых в результате проведения процесса, в практических условиях неизбежны необратимые потери веществ $\sum G_{\text{п}}$:

$$\sum G_{\text{н}} = \sum G_{\text{к}} + \sum G_{\text{п}}.$$

Тепловой баланс – количество теплоты $\sum Q_{\text{н}}$, введенной в процесс, равно количеству теплоты $\sum Q_{\text{к}}$, выведенной из процесса, включая необратимые потери в окружающую среду $\sum Q_{\text{п}}$:

$$\sum Q_{\text{н}} = \sum Q_{\text{к}} + \sum Q_{\text{п}}.$$

Основное уравнение процесса в общем виде:

$$M = U A K \tau,$$

где M – количество перенесенного вещества или тепла; U – движущая сила; A – величина, к которой относят интенсивность процесса (рабочая поверхность, рабочий объем); K – **коэффициент скорости процесса**, учитывает все отклонения реального процесса от данной упрощенной зависимости, отражает влияние всех факторов, не учтенных остальными величинами, является мерой интенсивности процесса.

Интенсивность процесса ($M/A\tau$) – результат, отнесенный к единице времени и единице величины A :

$$KU = \frac{M}{A\tau}$$

Плотность потока – количество рассматриваемой субстанции M (массы вещества, теплоты и т.д.), проходящей в единицу времени τ через единицу площади F произвольной поверхности

$$q = \frac{M}{F\tau}$$

плотность любого потока q , как правило, прямо пропорциональна градиенту движущей силы процесса $grad U$:

$$q = K grad U$$

) **константа подобия**

$$k_1 = \frac{l_1}{l'_1} = \frac{l_2}{l'_2},$$

где k_1 – безразмерный масштабный множитель, выражающий отношение однородных сходственных величин подобных систем;

б) **инвариант подобия**

$$\text{inv} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{l'_1}{l'_2},$$

где **inv** – отношение сходственных величин в пределах каждой подобной системы.

Симплекс подобия – инвариант подобия, выраженный отношением двух однородных физических величин

$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}$$

Критерий подобия – инвариант подобия, выраженный отношением двух разнородных физических величин, характеризующих изучаемый процесс, т.е. представляет собой безразмерный комплекс, например, критерий Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{vd\rho}{\mu}$$

Процесс термодинамический – любое изменение термодинамического состояния системы основные виды термодинамических процессов представлены в табл.1.

Таблица 1.

Основные термодинамические процессы			
Название процесса	Название и уравнение кривой процесса	Показатель степени уравнения кривой процесса	Краткая характеристика процесса
Политропный	Политропа $pV^m = \text{const}$	m	Протекает при изменении температуры, давления и объема системы
Изохорный	Изохора $V = \text{const}$	$m = \pm \infty$	Протекает при постоянном объеме системы
Изобарный	Изобара $p = \text{const}$	$m = 0$	Протекает при постоянном давлении
Изотермический	Изотерма $pV = \text{const}$	$m = 1$	Протекает при постоянной температуре
Адиабатный	Адиабата $pV^k = \text{const}$	$m = k$ $k = \frac{c_p}{c_v}$	Протекает без теплообмена с окружающей средой при постоянной энтропии

Таблица 152

Параметр газа	Обозначение	Метан CH_4	Этан C_2H_6	Пропан C_3H_8	Изобутан C_4H_{10}	Нормальный бутан $n\text{-C}_4\text{H}_{10}$	Изопентан $i\text{-C}_5\text{H}_{12}$	Нормальный пентан $n\text{-C}_5\text{H}_{12}$	Углекислый газ CO_2	Оксид углерода CO	Сероводород H_2S	Азот N_2	Воздух
Молекулярная масса	M	16,04	30,05	44,06	58,08	58,08	72,15	72,15	44,01	28,01	34,08	28,02	28,97
Плотность по воздуху	ρ	0,554	1,038	1,523	2,007	2,007	2,491	2,491	1,529	0,968	1,191	0,967	1,000
Плотность при 0,1 МПа и 0 °С, кг/м^3	ρ'	0,717	1,344	1,967	2,598	2,598	3,046	3,046	1,977	1,250	1,539	1,250	1,293
Плотность при $T_{\text{кр}}$ и $p_{\text{кр}}$, кг/м^3	$\rho'_{\text{кр}}$	162	210	225,5	232,5	225,2	—	232	468	301	—	311	—
Критическая температура, °С	$T_{\text{кр}}$	-82,5	33,0	+96,6	+134,0	+152,0	+187,8	+197,2	+31,1	-140,2	+100,4	-147,0	-140,7
Критическое давление, МПа	$p_{\text{кр}}$	4,58	4,85	4,34	3,82	3,57	3,29	3,30	7,29	3,45	8,89	3,35	3,72
Объем 1 кг газа, м^3	$\frac{22,4}{M}$	1,4	0,74	0,51	0,39	0,39	0,31	0,31	0,51	0,80	0,66	0,80	0,78
Масса 1 м^3 газа, кг	$\frac{M}{22,4}$	0,714	1,35	1,97	2,85	2,85	3,22	3,22	1,96	1,25	1,52	1,25	1,29

Основные уравнения для сплошной среды выводятся из законов сохранения, представляющих собой фундаментальные законы природы. В механике сплошных сред основными законами сохранения являются законы сохранения массы, изменения количества движения, изменения момента количества движения, энергии и баланса энтропии. Для математической формулировки законов сохранения рассматривают или *материальный (подвижный)*, или *контрольный объем*.

Под *материальным (подвижным)* объемом понимается объем, состоящий во все моменты времени из одних и тех же материальных точек.

Область пространства, через границы которой могут проходить вещество, энергия, количество движения и т.д., называется контрольным объемом, а поверхность, ограничивающая эту область – контрольной поверхностью. Контрольная поверхность может перемещаться в пространстве, но обычно считается неподвижной.

При рассмотрении материального объема считается, что он представляет собой единое физическое тело, обладающее

массой
$$M = \int_{V(t)} \rho dV, \quad (2.1)$$

количеством движения
$$\vec{J} = \int_{V(t)} \rho \vec{v} dV, \quad (2.2)$$

моментом количества движения
$$\vec{M} = \int_{V(t)} (\vec{r} \times \rho \vec{v}) dV, \quad (2.3)$$

энергией
$$E = \int_{V(t)} \rho \left(u + \frac{v^2}{2} \right) dV, \quad (2.4)$$

которая представляет собой сумму

кинетической энергии
$$K = \int_{V(t)} \rho \frac{v^2}{2} dV \quad (2.5)$$

и внутренней энергии
$$U = \int_{V(t)} \rho u dV, \quad (2.6)$$

энтропией
$$S = \int_{V(t)} \rho s dV, \quad (2.7)$$

где $\rho = \rho(x_j, t)$ – плотность, $\vec{v} = \vec{v}(x_j, t)$ – скорость, $u = u(x_j, t)$ – удельная (отнесенная к единице массы) внутренняя энергия, $s = s(x_j, t)$ – удельная (отнесенная к единице массы) энтропия, \vec{r} – радиус-вектор материальной частицы, отсчитываемый от точки, относительно которой определяется момент количества движения, $V(t)$ – материальный (подвижный) объем.

Закон сохранения массы утверждает, что масса материального объема (2.1) остается постоянной. Следовательно, полная производная от выражения (2.1) равна нулю, то есть

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV = 0. \quad (2.8)$$

Согласно второму закону Ньютона, скорость изменения количества движения жидкого объема равна сумме всех внешних сил, действующих на этот объем. Поэтому материальная производная от величины (2.2) равна

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \vec{v} dV = \vec{F}^{(e)}, \quad (2.9)$$

где $\vec{F}^{(e)}$ – сумма всех внешних массовых и поверхностных сил, приложенных к объему $V(t)$.

С учетом этих замечаний закон изменения количества движения (2.9) можно представить в виде

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \vec{v} dV = \int_{V(t)} \rho \vec{F} dV + \int_{S(t)} \vec{p}_n dS. \quad (2.10)$$

Закон изменения момента количества движения утверждает, что скорость изменения момента количества движения материального объема относительно любой точки равна главному моменту всех внешних массовых и поверхностных сил относительно той же точки. Так как эти моменты, по определению, равны

$$\int_{V(t)} (\vec{r} \times \rho \vec{F}) dV, \quad \int_{S(t)} \vec{r} \times \vec{p}_n dS,$$

то закон изменения момента количества движения для материального объема представляется соотношением

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} (\vec{r} \times \rho \vec{v}) dV = \int_{V(t)} (\vec{r} \times \rho \vec{F}) dV + \int_{S(t)} \vec{r} \times \vec{p}_n dS. \quad (2.11)$$

В дальнейшем будем считать, что Q представляет собой только скорость притока тепла. Закон сохранения энергии иначе называется первым началом термодинамики.

Мощность внешних объемных сил W_1 равна, очевидно,

$$W_1 = \int_{V(t)} \rho \vec{F} \cdot \vec{v} dV,$$

а для мощности поверхностных сил W_2 имеем

$$W_2 = \int_{S(t)} \vec{p}_n \cdot \vec{v} dS.$$

Приток тепла в единицу времени Q можно представить как

$$Q = \int_{V(t)} \rho q_e dV.$$

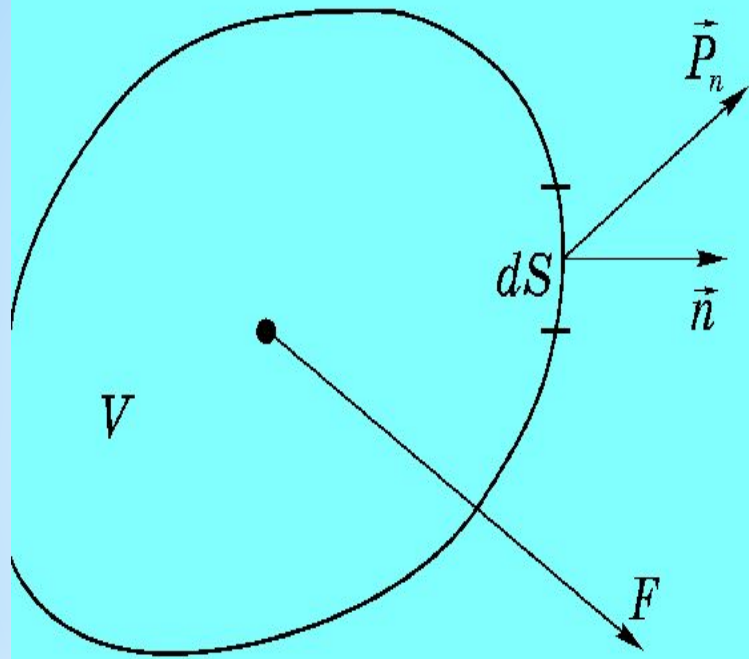


Рис. 2.1

Сумма внешних массовых сил может быть представлена в виде (рис. 2.1)

$$\int_{V(t)} \rho \vec{F} dV .$$

Сумма внешних поверхностных сил, очевидно, равна (рис. 2.1)

$$\int_{S(t)} \vec{p}_n dS ,$$

где $S(t)$ – замкнутая поверхность, ограничивающая материальный объем $V(t)$.

С учетом этих замечаний закон изменения количества движения (2.9) можно представить в виде

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \vec{v} dV = \int_{V(t)} \rho \vec{F} dV + \int_{S(t)} \vec{p}_n dS. \quad (2.10)$$

Закон изменения момента количества движения утверждает, что скорость изменения момента количества движения материального объема относительно любой точки равна главному моменту всех внешних массовых и поверхностных сил относительно той же точки. Так как эти моменты, по определению, равны

$$\int_{V(t)} (\vec{r} \times \rho \vec{F}) dV, \quad \int_{S(t)} \vec{r} \times \vec{p}_n dS,$$

то закон изменения момента количества движения для материального объема представляется соотношением

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} (\vec{r} \times \rho \vec{v}) dV = \int_{V(t)} (\vec{r} \times \rho \vec{F}) dV + \int_{S(t)} \vec{r} \times \vec{p}_n dS. \quad (2.11)$$

Закон сохранения энергии состоит в утверждении, что скорость изменения энергии материального объема $V(t)$ равна сумме механической работы внешних массовых и поверхностных сил W , совершенных в единицу времени (мощность внешних сил), и притока в единицу времени прочих видов энергии Q . Следовательно, материальная производная от выражения (2.4) будет связана с величинами W и Q соотношением

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \left(u + \frac{v^2}{2} \right) dV = W + Q. \quad (2.12)$$

В дальнейшем будем считать, что Q представляет собой только скорость притока тепла. Закон сохранения энергии иначе называется первым началом термодинамики.

Мощность внешних объемных сил W_1 равна, очевидно,

$$W_1 = \int_{V(t)} \rho \vec{F} \cdot \vec{v} dV,$$

а для мощности поверхностных сил W_2 имеем

$$W_2 = \int_{S(t)} \vec{p}_n \cdot \vec{v} dS.$$

Приток тепла в единицу времени Q можно представить как

$$Q = \int_{V(t)} \rho q_e dV,$$

где q_e – удельное по массе количество тепла, подводимое к жидкому объему $V(t)$ в единицу времени.

Тогда закон сохранения энергии (2.12) принимает вид

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \left(u + \frac{v^2}{2} \right) dV = \int_{V(t)} \rho \vec{F} \vec{v} dV + \int_{S(t)} \vec{p}_n \vec{v} dS + \int_{V(t)} \rho q_e dV. \quad (2.13)$$

Наряду с законами сохранения массы, изменения количества движения, момента количества движения и с законом сохранения энергии можно сформулировать теорему (закон) об изменении кинетической энергии (теорему живых сил)*. Эта теорема утверждает, что изменение кинетической энергии жидкого объема во времени равна сумме работ (мощностей) внешних и внутренних сил, действующих на этот объем. Поэтому материальная производная от выражения (2.5) представляется в виде

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \frac{v^2}{2} dV = \int_{V(t)} \rho \vec{F} \vec{v} dV + \int_{S(t)} \vec{p}_n \vec{v} dS + \int_{V(t)} \rho N^{(i)} dV, \quad (2.14)$$

где $N^{(i)}$ – удельная по массе мощность внутренних сил, то есть мощность, приходящаяся на единицу массы среды.

Закон баланса энтропии представляет собой второй закон термодинамики и формулируется следующим образом: скорость изменения энтропии жидкого объема $V(t)$ никогда не может быть меньше, чем сумма притока энтропии через его границу $S(t)$ и энтропии, производимой внутри объема внешними источниками. Математическая запись закона баланса энтропии в интегральной форме выражается неравенством

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho s dV \geq \int_{V(t)} \rho e dV - \int_{S(t)} \frac{\vec{q} \cdot \vec{n}}{T} dS, \quad (2.15)$$

которое носит название неравенства Клаузиуса-Дюгема. В неравенстве (2.15) приняты следующие обозначения: s – удельная по массе энтропия, e – мощность локальных внешних источников энтропии, отнесенная к единице массы, \vec{q} – вектор потока тепла через единицу площади в единицу времени. Равенство в формуле (2.15) осуществляется для обратимых процессов, а неравенство – для необратимых.

Уравнение неразрывности представляет собой дифференциальную форму закона сохранения массы сплошной среды. Полагая в равенстве (2.23) $\varphi = \rho$ и используя условие постоянства массы жидкого объема (2.8), получим

$$\int_{V(t)} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} \right) dV = 0. \quad (2.24)$$

Так как это равенство справедливо для произвольного жидкого объема, то подынтегральное выражение в соотношении (2.24) равно нулю, то есть

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (2.25)$$

Уравнение (2.25) называется уравнением неразрывности. Очевидно, что если вместо (2.23) использовать (2.22), то уравнение неразрывности можно представить в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0. \quad (2.26)$$

Для получения уравнения неразрывности для трубки тока воспользуемся соотношениями (2.8) и (2.20), положив в последнем $\varphi = \rho$. При этом получим

$$\int_{V(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{S(t)} \rho v_n dS = 0. \quad (2.27)$$

Соотношение (2.27) называется уравнением неразрывности в интегральной форме.

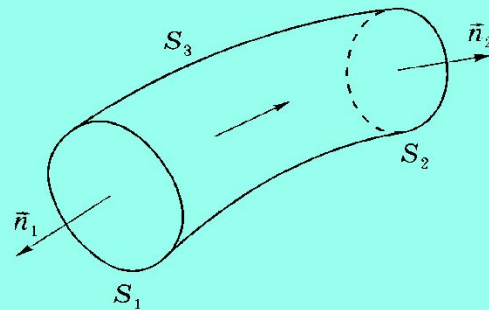


Рис. 2.3

Применим соотношение (2.27) к течению жидкости по трубке тока. Проведем живые сечения S_1 и S_2 (рис. 2.3). Контрольная поверхность S будет состоять из трех частей: живых сечений S_1 и S_2 , через которые жидкость втекает и вытекает из рассматриваемого участка трубки тока, и ее боковой поверхности S_3 .

В точках боковой поверхности S_3 , по определению трубки тока, $v_n = 0$, и соотношение (2.27) принимает вид

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{S_1} \rho v_n dS + \int_{S_2} \rho v_n dS = 0. \quad (2.28)$$

ет вид

