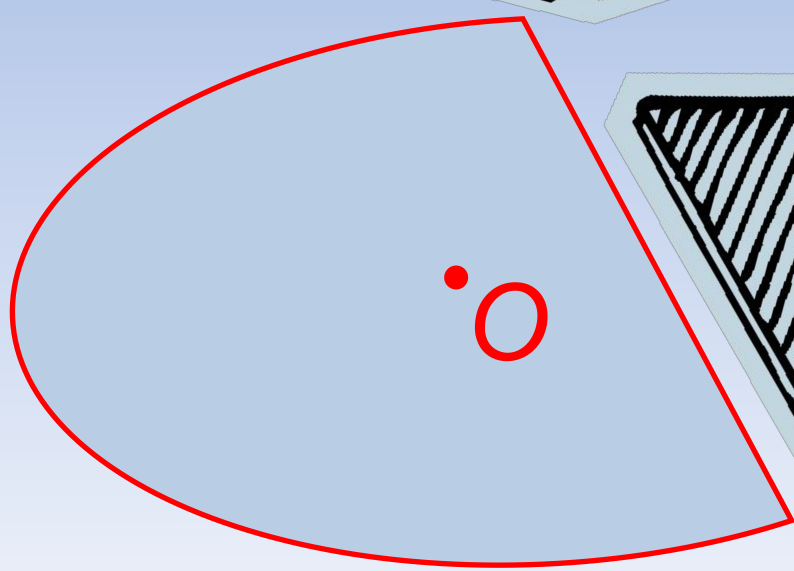
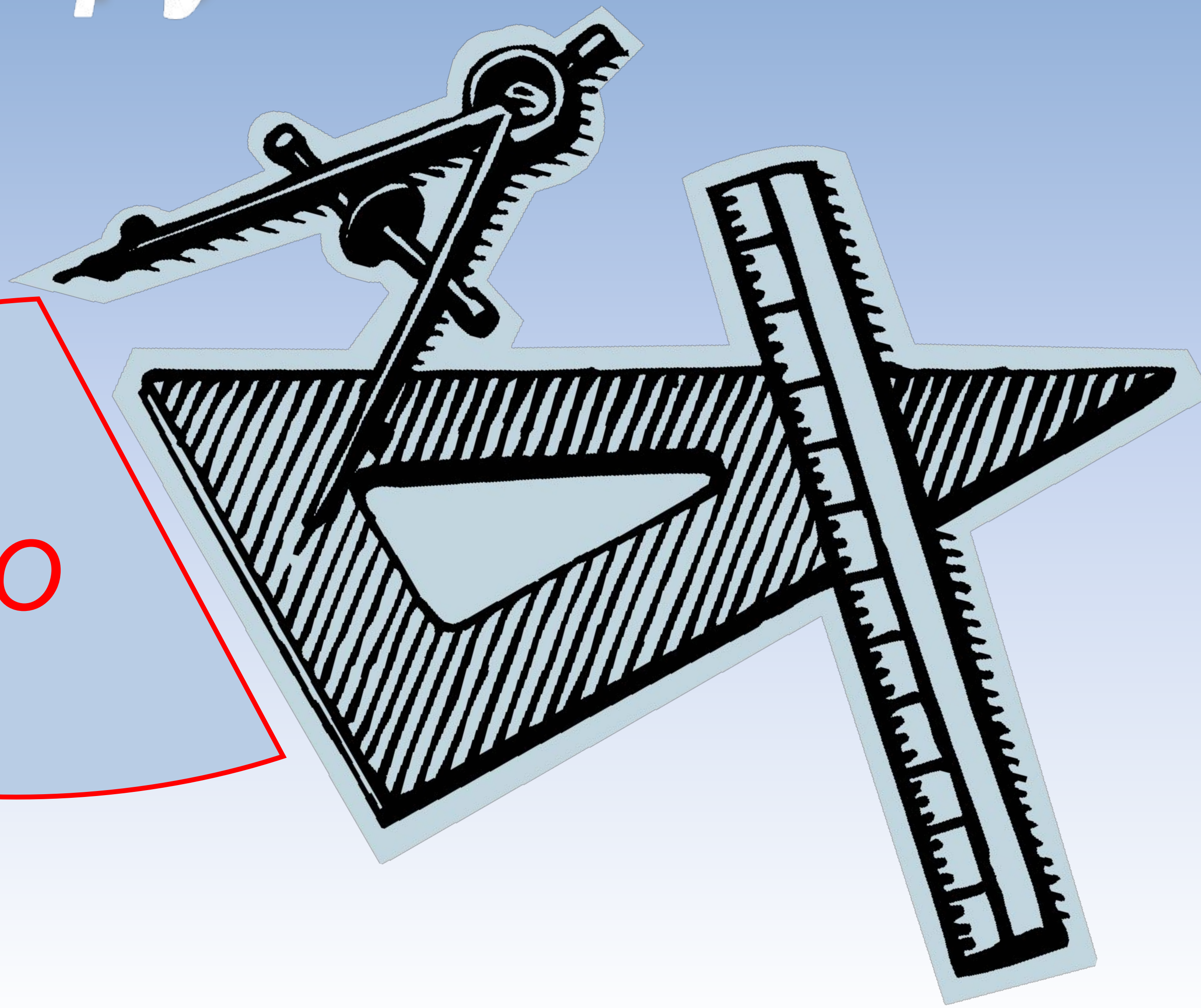
Окружность



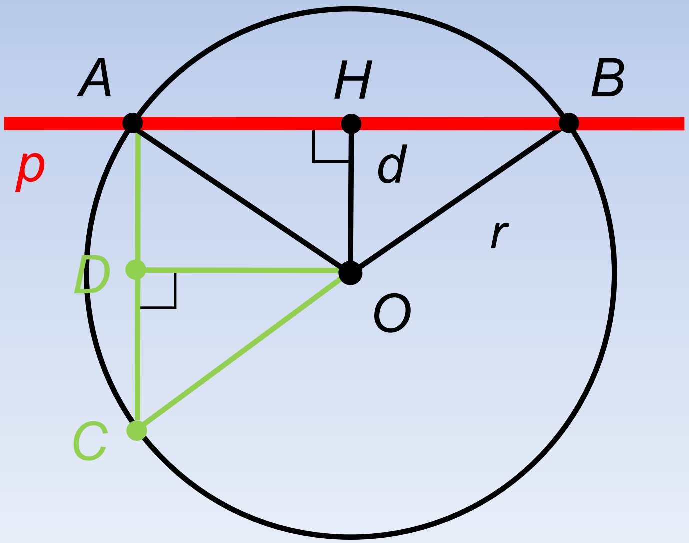


Касательная к окружности

Взаимное расположение прямой и окружности

Исследуем взаимное расположение прямой и окружности в зависимости от соотношения между перпендикуляром **d** *и радиусом* **r**.

Случай 1, когда $d < r$



На прямой **p** *отложим* $[HA]$ *и* $[HB]$, *длины которых* $= \sqrt{(r^2 - d^2)}$. *По теореме Пифагора*

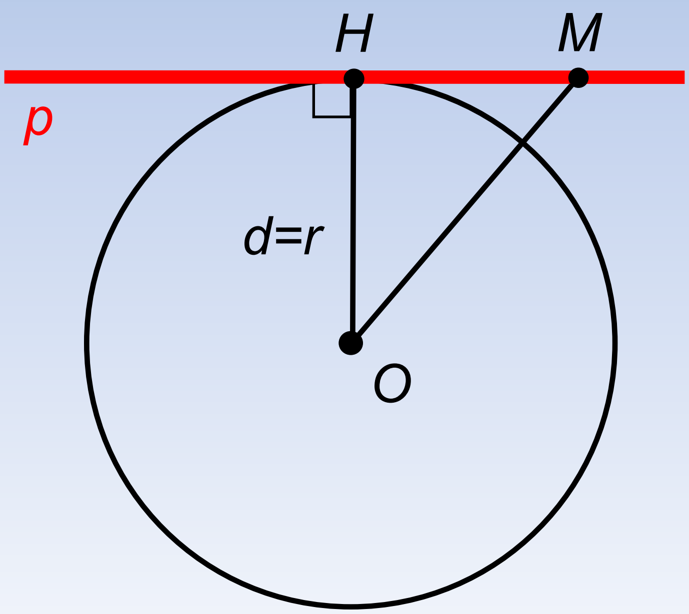
$$OA = \sqrt{OH^2 + HA^2} = \sqrt{d^2 + (r^2 - d^2)} = r$$

$$OB = \sqrt{OH^2 + HB^2} = \sqrt{d^2 + (r^2 - d^2)} = r$$

=> *т.* **A** *и* **B** *также* **Є** *на данной окружности. Докажем, что прямая* **p** *и данная окружность не имеют других общих точек. Пусть они имеют еще одну общую т.***C**. *Тогда медиана* **OD** *равнобедренного* **△OAC**, *проведенная к основанию* **AC**, *является высотой этого* △, *поэтому* **OD** $\perp$ **p**. *Отрезки* **OD** *и* **OH** *не совпадают, т.к. середина* **D** *отрезка* **AC** *не совпадает с т.* **H** *– серединой отрезка* **AB** => *из т.* **O** *проведены два* $\perp$: **OH** *и* **OD** *– к прямой* **p**, *что* ***НЕВОЗМОЖНО***.

Если расстояние от центра окружности до прямой меньше радиуса окружности (d<r), то прямая и окружность имеют две общие точки. В этом случае прямая называется СЕКУЩЕЙ по отношению к окружности.

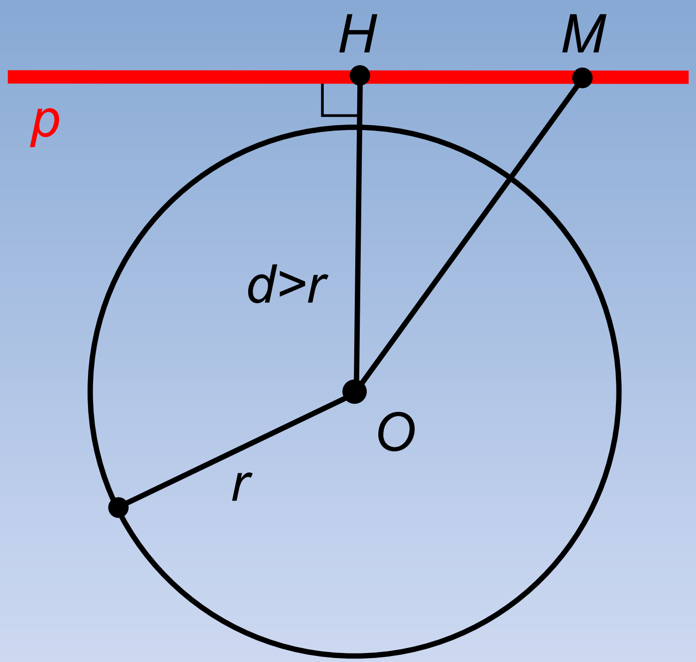
Случай 2, когда d = r



В этом случае ***OH = r****, т.е. т.* ***H*** *лежит на окружности и, значит, является общей точкой прямой и окружности. Прямая* ***p*** *и окружность не имеют других общих точек, т.к. для любой точки* ***M*** *прямой* ***p****, отличной от точки* ***H, OM>OH=r*** *(наклонная* ***OM >*** *перпендикуляра* ***OH****), и, =>, точка* ***M*** *не лежит на окружности.*

Если расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу окружности (d=r), то прямая и окружность имеют только одну общую точку. В этом случае прямая называется КАСАТЕЛЬНОЙ по отношению к окружности.

Случай 3, когда d > r



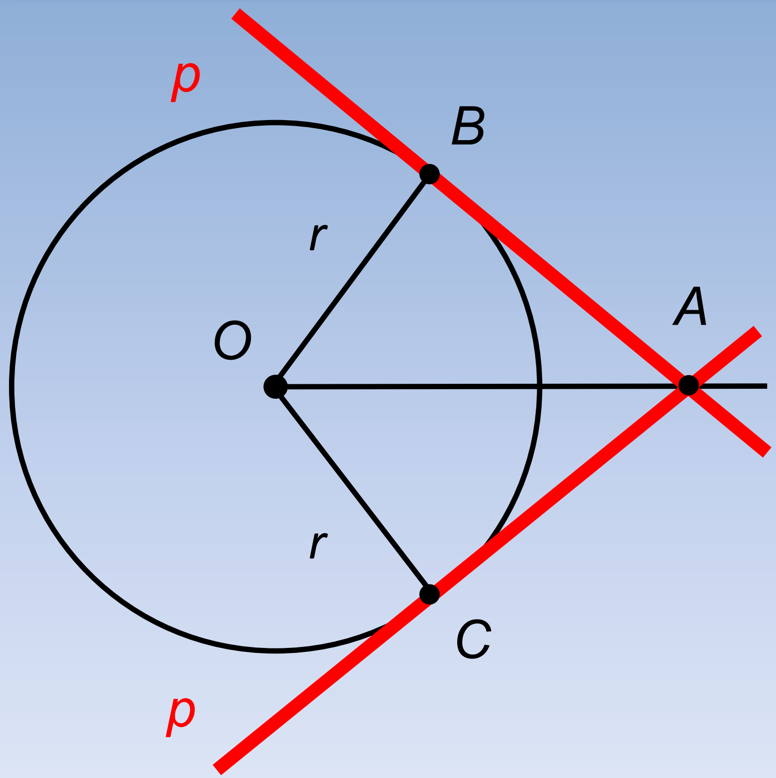
В этом случае ***OH>r****, поэтому для любой точки* ***M*** *прямой* ***p*** ***OM>OH>r.*** *Следовательно, точка* ***M*** *не лежит на окружности.*

Если расстояние от центра окружности до прямой больше радиуса окружности (d>r), то прямая и окружность не имеют общих точек.

Касательная и окружность

Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется ***КАСАТЕЛЬНОЙ*** *по отношению к окружности, а их общая точка называется точкой касания прямой и окружности. Докажем теорему о свойствах касательной.*

Теорема. ***Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания***



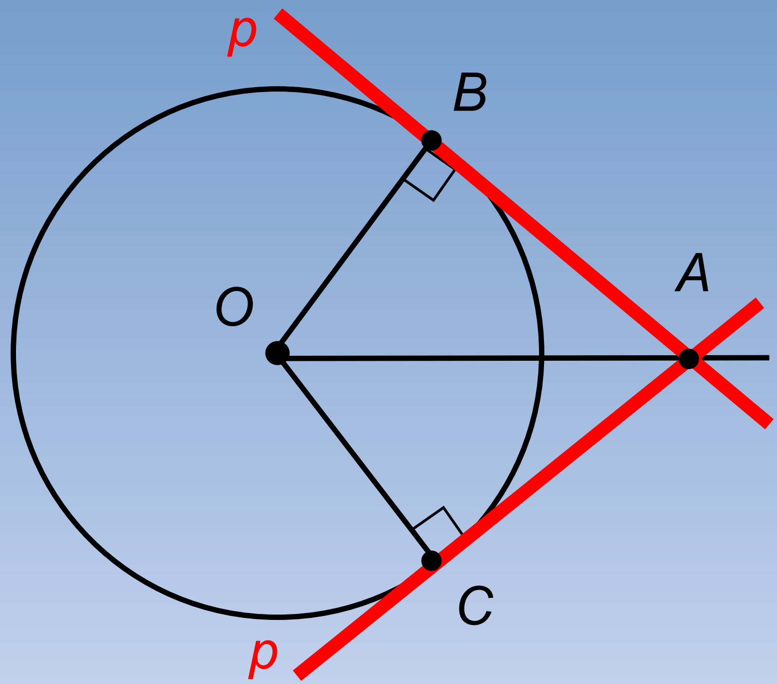
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

*Пусть **p** – касательная к окружности с центром **O**, **A** – точка касания. Предположим, что это не так. Тогда радиус **OA** является наклонной к прямой **p**. Т.к. ⊥ , проведенный из т. **O** к **p**, < наклонной **OA**, то расстояние от центра **O** окружности до **p<r** => **p** и окружность имеют две общие точки. Но это противоречит условию: прямая p – касательная . Следовательно **p** ⊥**OB**.*

⇩

Отрезки AB и AC обладают следующими свойством, вытекающем из теоремы:

Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

По теореме о свойстве касательной углы АВО и АСО прямые. Они равны, т.к. имеют общую гипотенузу ОА и равные катеты ОВ и ОС. Следовательно, АВ=АС и ВАО= ОАС ∠

Обратная теорема. ***Если прямая проходит через конец радиуса, лежащий на окружности, и перпендикулярна к этому радиусу, то она является касательной***

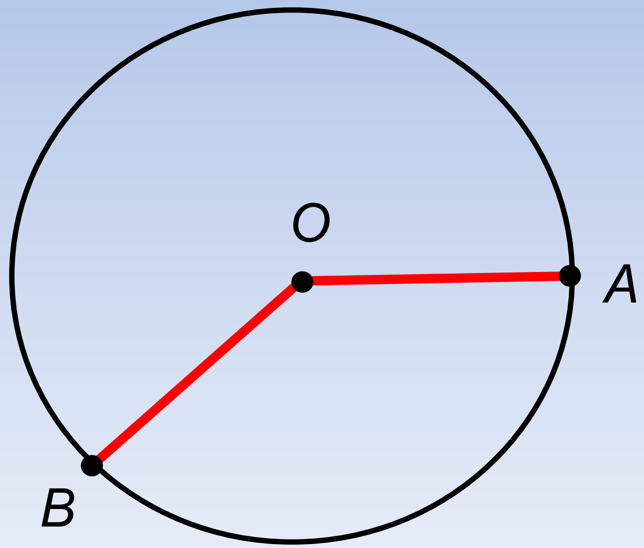
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Из условия теоремы следует, что данный радиус является перпендикуляром, проведенным из центра окружности к данной прямой. Поэтому расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу, и, следовательно, прямая и окружность имеют только одну общую точку. Это означает, что данная прямая является касательной к окружности

Центральные и вписанные углы

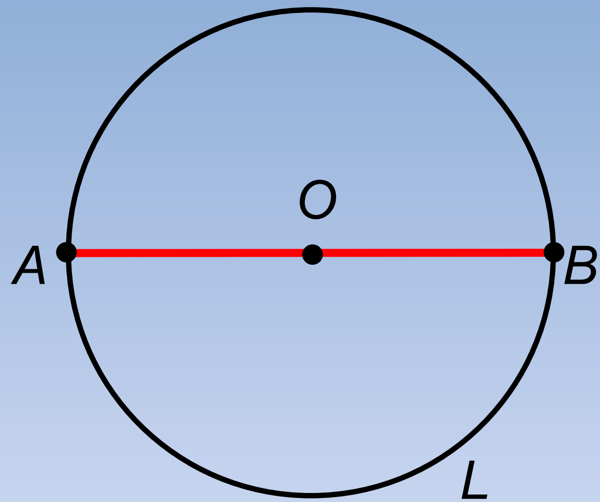
Центральный угол - угол, образованный двумя радиусами

Центральный угол равен дуге, на которую он опирается



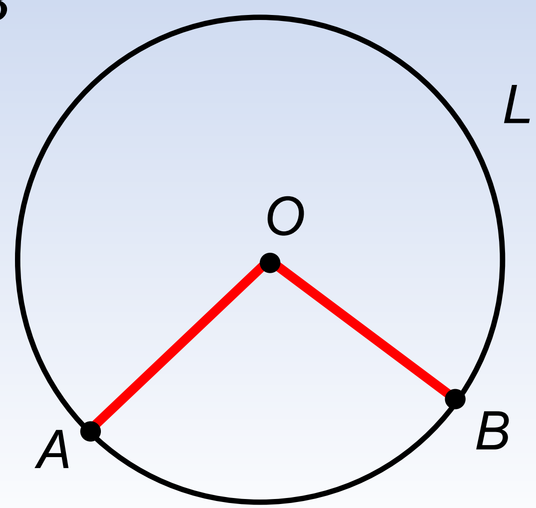
$\angle AOB = \cup AB$

- *Если дуга AB окружности с центром O меньше полуокружности или является полуокружностью, то её градусная мера считается равной градусной мере центрального угла AOB*



$\cup ALB = \angle ALB = 180^{\circ}$

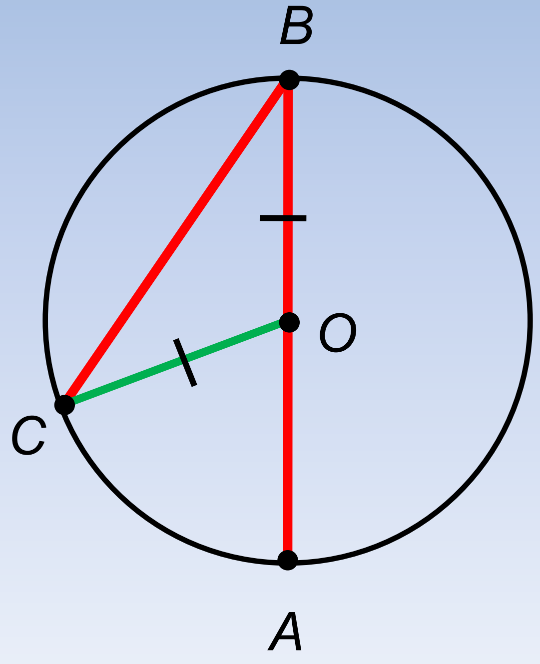
- *Если дуга AB больше полуокружности, то её градусная мера считается равной* $360^{\circ} - \angle AOB$



$\cup ALB = 360^{\circ} - \angle AOB$

Вписанный угол – угол, образованный двумя хордами, выходящими из одной окружности

Теорема. **Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается**



Доказательство 1:

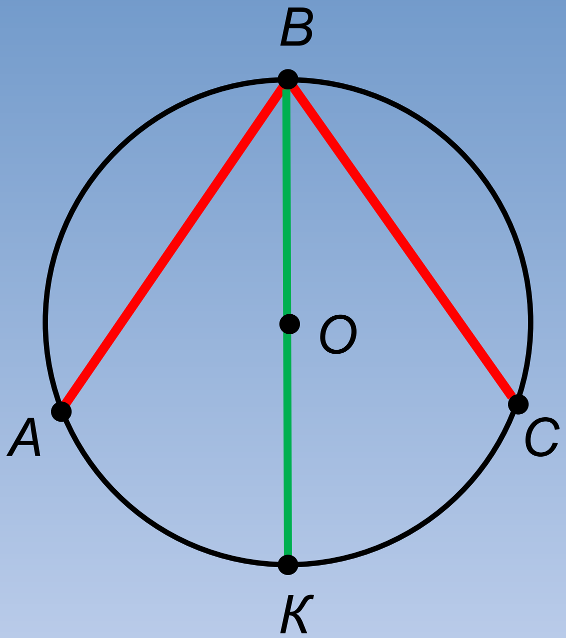
$\angle AOC = \cup AC$

$\angle AOC = \angle ABC + \angle BCO$ (вн.угол)

$\angle ABC = \angle BCO$ (т.к. $\triangle AOC$ – р/б)

$\left.\begin{array}{l} \angle AOC = 2\angle ABC \\ \angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC \end{array}\right] \angle ABC = \frac{1}{2}\cup AC$

Продолжение



Доказательство 2:

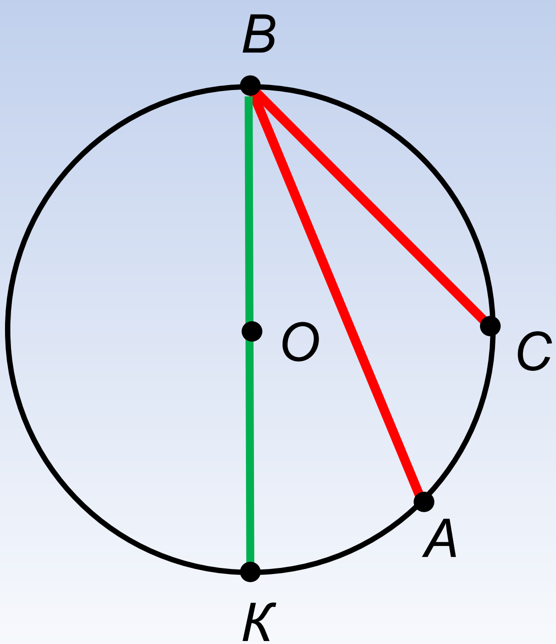
$$\angle ABK = \frac{1}{2} \cup AK$$

$+$

$$\angle CBK = \frac{1}{2} \cup KC$$

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \left(\cup AK + \cup KC\right)$$

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$$



Доказательство 3:

$$\angle KBC = \cup KC$$

$-$

$$\angle ABK = \frac{1}{2} \cup AK$$

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \left(\cup KC - \cup AK\right)$$

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$$

Следствие 1. ***Все углы, которые опираются на диаметр равны 90° (рис.1)***

Следствие 2. ***Углы, опирающиеся на одну и ту же дугу равны (рис.2)***

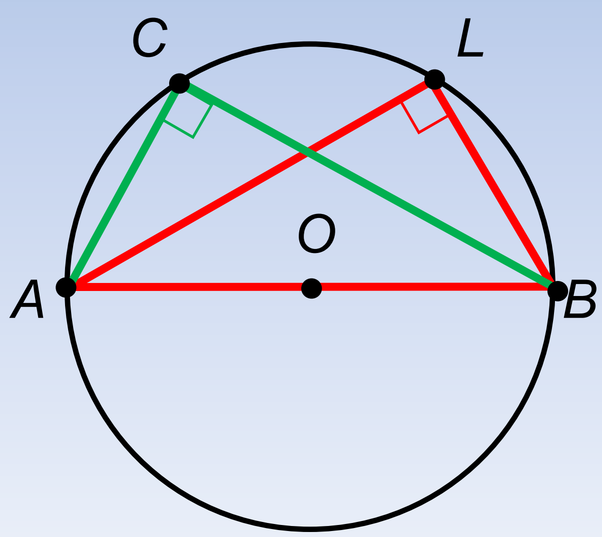


Рис.1

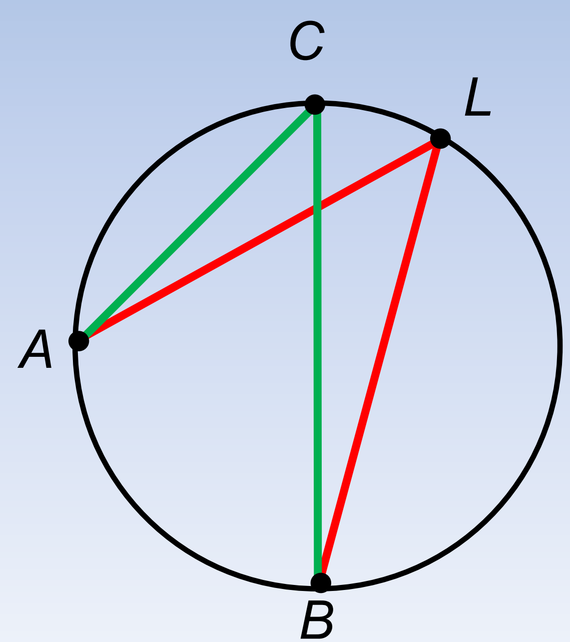
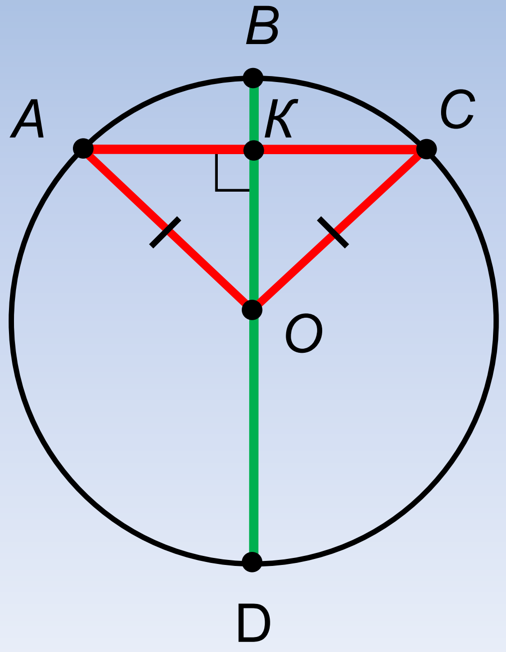


Рис.2

Свойство дуг и хорд

1) **Диаметр, перпендикулярный хорде делит эту хорду и стягиваемые ей дуги пополам**



Доказательство :

$AO = OC = r$
KO - общ.

$\triangle AKO = \triangle CKO$
(по катету и гипотенузе)

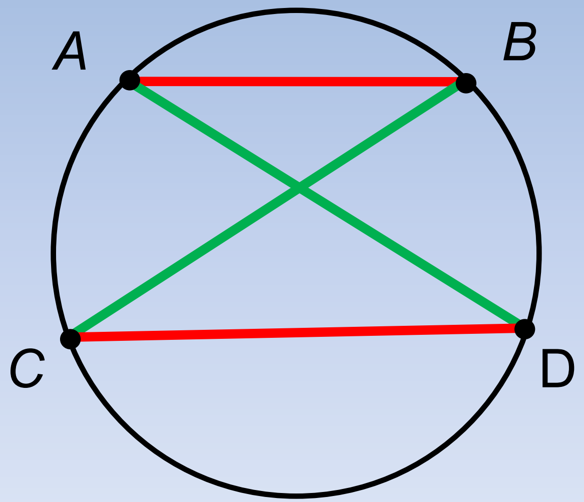
$\Downarrow$

$AK = KC$; $\angle AOK = \angle KOC$

$\Downarrow$

$\cup AB = \cup BC$

2) Дуги, заключенные между параллельными хордами, равны друг другу



Доказательство :

$\angle ABC = \angle BCD$ (т.к. накрест лежащие)

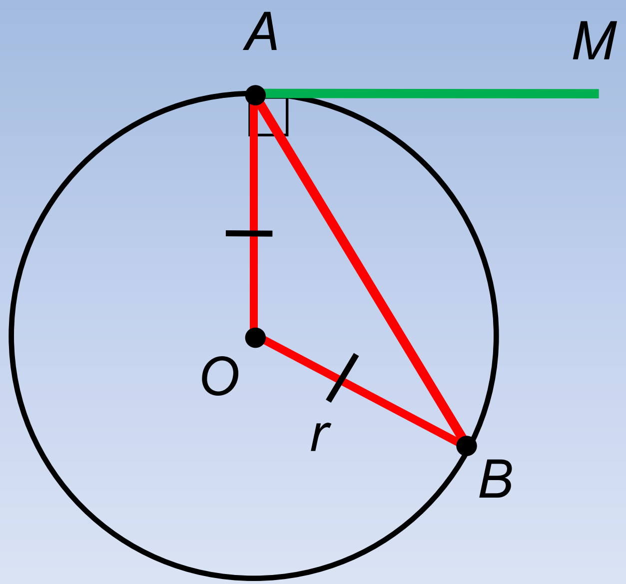
$\angle BAD = \angle ADC$

$\angle BAD, \angle ADC$ – вписанные углы

$\Downarrow$

$\cup AC = \cup BD$

3) Угол, заключенный между касательной и хордой равен половине дуги, заключенной внутри угла



Доказательство :

$AO=OB=r \Rightarrow \triangle AOB - р/б$

$\angle OAB = \angle ABO$

$\angle AOB = \cup AB$

$\angle AOB = 180^\circ - 2\angle OAB$

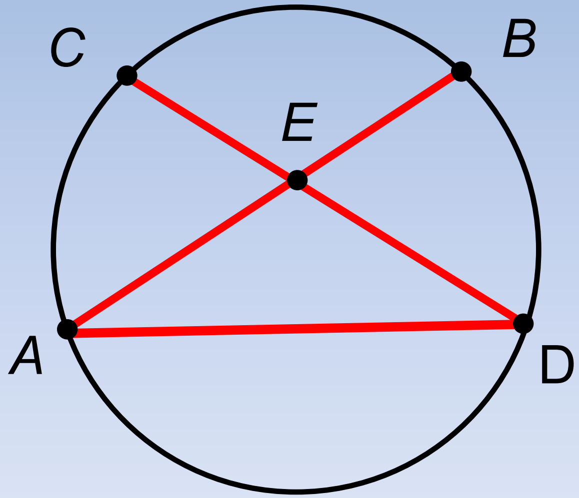
$\angle MAO = 90^\circ$

$\angle MAB = 90^\circ - \angle OAB$

$\Downarrow$

$$\angle MAB = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{1}{2}\cup AB$$

4) Угол с центром внутри окружности равен полусумме соответствующих дуг



Доказательство :

$$\angle BAD = \frac{1}{2} \cup BD$$

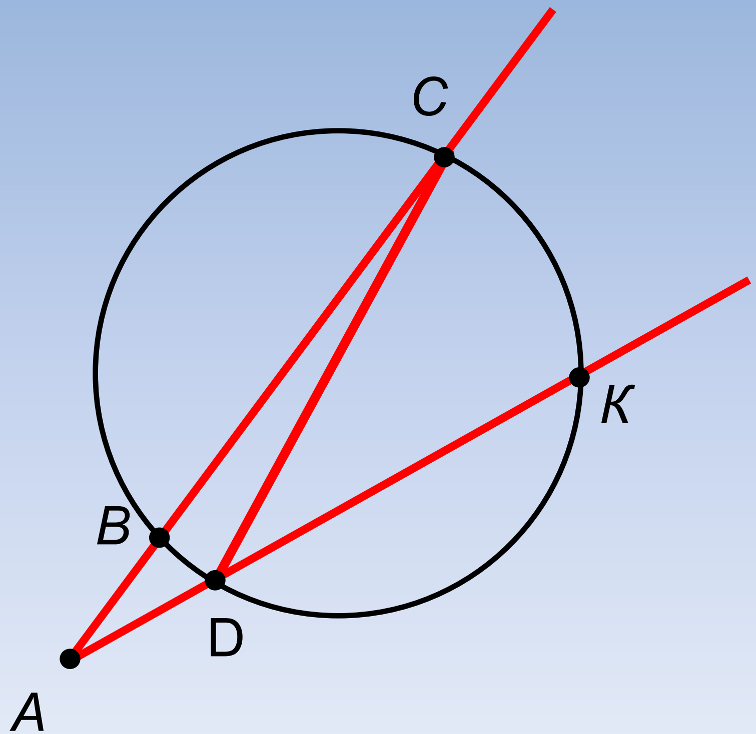
$$\angle CDA = \frac{1}{2} \cup AC$$

$$\angle BED = \angle BAD + \angle CDA \text{ (вн.угол)}$$

$$\Downarrow$$

$$\angle BED = \frac{1}{2} (\cup AC + \cup BD)$$

5) Угол с центром вне окружности равен полуразности соответствующих дуг



Доказательство :

$$\angle CDK = \angle ACD + \angle CAK$$

$$\angle ACD = \frac{1}{2} \cup BD$$

$$\angle CDK = \frac{1}{2} \cup CK$$

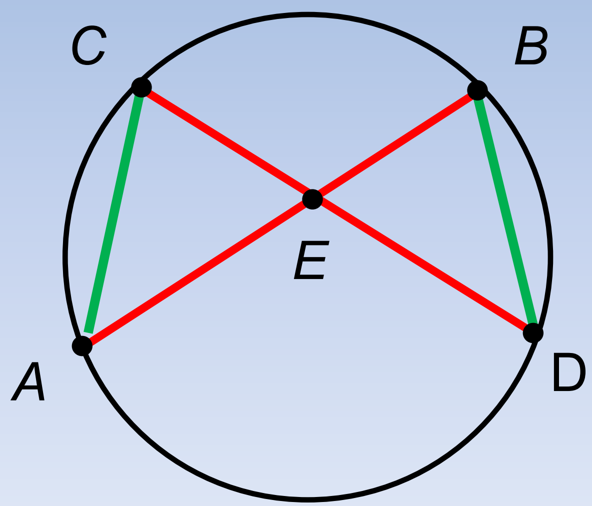
$$\angle CAK = \angle CDK - \angle ACD$$

$$\Downarrow$$

$$\angle CAK = \frac{1}{2} \cup BD - \frac{1}{2} \cup CK$$

$$\angle CAK = \frac{1}{2} (\cup CK - \cup BD)$$

6) Произведение отрезков, пересекающихся хорд равны



Доказательство :

$\angle ACD = \angle ABD$

$\angle CEA = \angle BED$

$$\frac{BD}{AC} = \frac{ED}{AE} = \frac{BE}{CE}$$

$$AE \bullet BE = ED \bullet CE$$