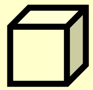
Объём прямоугольного параллелепипеда, призмы, цилиндра

Цель урока:

познакомиться с понятием объёма; рассмотреть свойства объёмов; теорему об объёме прямоугольного параллелепипеда и следствие о прямой призме, основании которой прямоугольный треугольник, вывести формулу объёма цилиндра.

Понятие объёма

За единицу измерения объёмов принимается куб, ребро которого равно единице измерения отрезков. Куб с ребром **1см** *называют* ***кубическим сантиметром,*** *обозначают* ñì^{3} . 

Аналогично определяются ***кубический метр*** $\left(\text{ì}^{3}\right)$, ***кубический миллиметр*** $\left(\text{ì ì}^{3}\right)$.

Свойства объёмов:

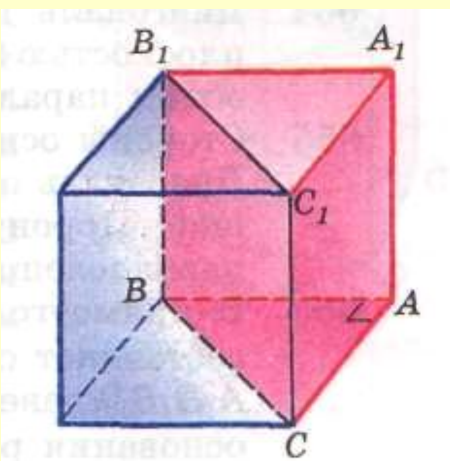
1. *Равные тела имеют равные объёмы.*
2. *Если тело составлено из нескольких тел, то его объём равен сумме объёмов этих тел.*
3. *Объём куба с ребром* $\frac{1}{n}$ *равен* $\frac{1}{n^3}$

Теорема: *Объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению трёх его измерений.*

$$V = abc$$

Следствие 1: Объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.

Следствие 2: Объём прямой призмы, основанием которой является прямоугольный треугольник, равен произведению площади основания на высоту.



Дано: $ABCFA_1B_1C_1$ – прямая треугольная призма,

$\angle A = 90$

Доказать: $V = S_{ABC} \cdot h$

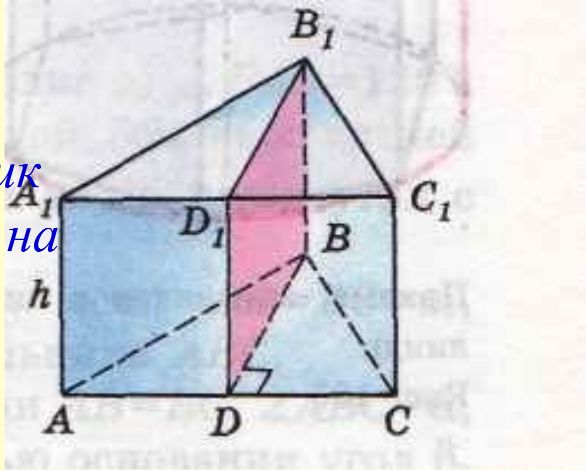
Доказательство: $V = S_{\text{î ñí}} \cdot h,\ S_{\text{î ñí}} = 2S_{ABC}$

$$V = S_{ABC} \cdot h.$$

Объём прямой призмы

Теорема: Объём прямой призмы равен произведению площади основания на высоту.

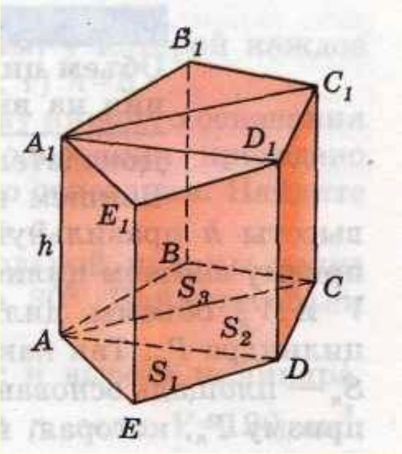
1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямая треугольная призма с объёмом V и высотой h. Проведём такую высоту треугольника ABC (BD), которая разделяет треугольник на два треугольника. (BB1D) разделяет данную призму на две призмы, основаниями которых являются прямоугольные треугольники ABD и BDC.



$V_1 = S_{ABD} \cdot h; \; V_2 = S_{BDC} \cdot h.$ $\quad V = V_1 + V_2,$

$V = S_{ABD} \cdot h + S_{BDC} \cdot h = (S_{ABD} + S_{BDC}) \cdot h.$ т. е. $V = S_{ABC} \cdot h.$

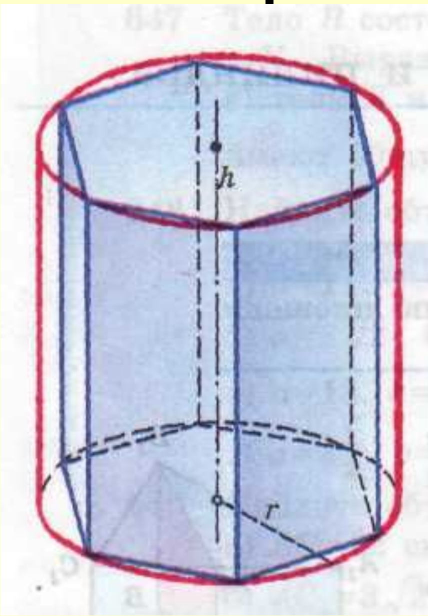
2. Произвольную призму разобьём на треугольные призмы с высотой h.



$$V = S_1 \cdot h + S_2 \cdot h + \ldots.. + S_n \cdot h =$$
$$(S_1 + S_2 + \ldots. + S_n) \cdot h = S \cdot h$$

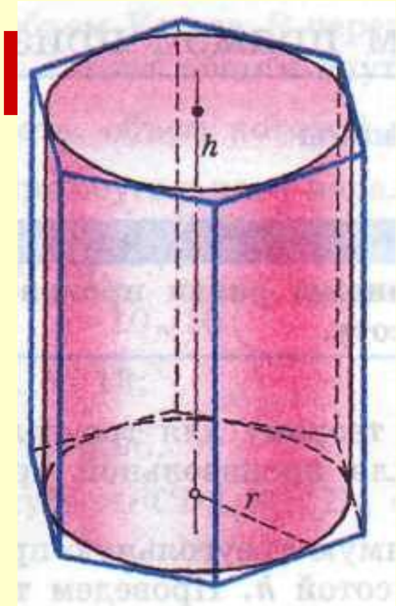
$$V = S \cdot h$$

Объём цилиндр



Призма **вписана в цилиндр**, если её основания вписаны в основания цилиндра.

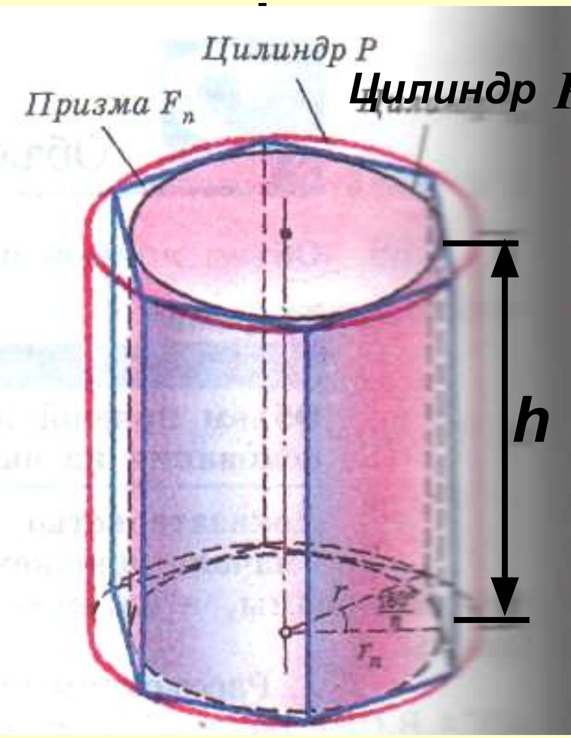
Призма **описана около цилиндра**, если её основания описаны около оснований цилиндра.



Высота любой призмы, вписанной в цилиндр или описанной около него, равна высоте самого цилиндра

Теорема: **Объём цилиндра равен произведению площади основания на высоту.**

Доказательство



Впишем в данный цилиндр P радиуса r и высоты h правильную n–угольную призму F_n, а в эту призму впишем цилиндр Pn. Пусть ***V – объём цилиндра P, V_n – объем цилиндра P_n; r_n радиус цилиндра P_n.*** *Так как объем призмы F_n равен* ***$S_n \cdot h$****, где* ***S_n — площадь основания призмы****, а* ***цилиндр P содержит призму F_n, которая, в свою очередь, содержит цилиндр Pn,*** *то* $V_n < S_n \cdot h < V$. **(2)**

Будем неограниченно увеличивать число n. При этом радиус r_n цилиндра P_n стремится к радиусу r цилиндра P

$$\left(r_n = r\cos\frac{180^{\circ}}{n} \to r \ \text{ïðè} \ n \to \infty\right)$$

Поэтому объём цилиндра Pn стремится к объёму цилиндра P: $\lim\limits_{n\to\infty} V_n = V.$

Из неравенства ***(2)*** *следует, что* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n \cdot h = V.$ *Но* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \pi r^2.$

Т.е. $V = \pi r^2 h.$ $\pi r^2 = S.$ **Итак, объём цилиндра равен:**

$$V = S \cdot h$$