Введение

Плаксина Юлия Геннадьевна
Доцент кафедры электронных вычислительных машин
8(3466)-267-90-50
plaksinayg@yandex.ru
ЮУрГУ, 811/3б корпус

Дискретная математика – область математики, занимающаяся изучение дискретных структур (т.е. структур конечного характера), которые возникают как в пределах самой математики, так и в ее приложениях.

Дискретные структуры

1. конечные графы;
2. конечные автоматы;
3. машины Тьюринга и Поста;
4. некоторые модели преобразователей информации.

Это структуры конечного характера и раздел дискретной математики, изучающих их, называется <u>конечной математикой</u>.

Дискретная математика также изучает некоторые алгебраические системы:

- группы;
- кольца;
- поля;
- частично упорядоченные множества;
- решетки.

Разделы дискретной математики:

1. Математическая логика.
2. Математическая кибернетика.
3. Теория функциональных систем.
4. Общая алгебра.
5. Комбинаторика.
6. Теория графов.
7. Машинная арифметика.
8. Теория алгоритмов.
9. Теория игр.
10. Теория кодирования.
11. Теория искусственного интеллекта.

Разделы дискретной математики:

12. Теория конечных автоматов.
13. Теория множеств.
14. Теория формальных грамматик.
15. Теория булевых функций.
16. Логическое программирование.
17. Функциональное программирование.
18. λ - исчисление.
19. Булева алгебра.
20. Комбинаторная логика.
21. Математическая лингвистика.

В дискретной математике нет понятия

- бесконечного множества,
- предельного перехода,
- непрерывности,
- дифференцируемости.

Любое понятие дискретной математики можно определить с помощью понятия множества.

Основателем теории множеств является Георг Кантор немецкий математик

(3.3.1845, Петербург, - 6.1.1918, Галле)

Определение Г. Кантором понятия «множество»

Под «множеством» мы понимаем соединение в некое целое ***M*** определённых хорошо различимых предметов ***m*** нашего созерцания или нашего мышления (которые будут называться «элементами» множества *M*).

Unter einer ‚Menge‘ verstehen wir Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objecten m unsere Anschauung order unseres Denkens (welche die ‚Elementen‘ von M genannt werden) zu einem Ganzen.

Определения понятия «множество»

- Под множеством понимается некоторая, вполне определенная совокупность объектов или элементов.
- Множество – совокупность некоторых (произвольных) объектов, объединенных по какому-либо признаку.
- Множество - это совокупность определенных различаемых объектов, причем таких, что для каждого можно установить, принадлежит этот объект данному множеству или нет.

Таким образом:

Множество – любая совокупность объектов, которая обладает следующими свойствами:

- Элементы множества представляют собой **попарно различимые объекты**.
- Элементы и состав множества не меняются с течением времени.

- Объекты, составляющие множество, называются **элементами множества** и обозначаются маленькими латинскими буквами (например, x, a, b, b_i, c_{ij}).

- **Множества** обычно обозначаются заглавными латинскими буквами (например, A, B, C, D)

Для некоторых множеств приняты специальные обозначения:

N – множество натуральных чисел;

$$\{1,2,3,\ldots,100,101,\ldots\}$$

Z – множество целых чисел;

$$\{0,1,\ -1,\ 2,\ -2,\ \ldots\}$$

Q – множество рациональных чисел.

Целые и дробные числа (обыкновенные дроби, конечные десятичные дроби и бесконечные периодические дроби).

! Бесконечные периодические дроби НЕ входят в множество рациональных чисел.

Число «*ПИ*» (п=3.ю14…), основание натурального логарифма е (е = 2,718…) или $\sqrt{2}$ ***не являются рациональными числами.***

$$-\frac{3}{7};1;5;0;0{,}5;1\ldots$$

Любое рациональное число можно представить в виде дроби, у которой числитель принадлежит целым числам, а знаменатель – натуральным.

$$Q\left\{\frac{m}{n}|, m \in Z, b \in N\right\}$$

$$-\frac{3}{11}=\frac{-3\in Z}{11\in N}$$

$$-5\frac{2}{5}=\frac{-27\in Z}{5\in N}$$

R – множество действительных чисел;

Для некоторых множеств приняты специальные обозначения:

С – множество комплексных чисел.

Комплексное число – это выражение вида

$a + bi$, где a и b – действительные числа, а i – мнимая единица.

Мнимая единица – символ, квадрат которого равен -1, т.е

$$i^2 = -1$$

Число a – действительная часть, b – мнимая часть комплексного числа

$$z = a + bi$$

!Действительные числа – частный случай комплексных чисел.

Если b=0, z=a+0i = a.

Пример

{1,2.3,4} – множество, содержащее натуральные числа 1,2,3 и 4.

- a $\in$ A (a *принадлежит* A)
- a $\notin$ A (a *не принадлежит* A)

Пример

$3 \in \{1,2,3,4\}$

$5 \notin \{1,2,3,4\}$

- $\Leftrightarrow$ - «тогда и только тогда, когда»;
- $\exists x$ - «существует x такой, что»;
- $\forall x$ - «для всякого x»;
- $\Rightarrow$ - «следует» или «вытекает».

Понятие конечного множества

Множество называется

конечным, если оно состоит из

конечного числа элементов.

Пример

Элементы конечного множества A

можно обозначить через a_1, a_2, …, a_5:

$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_5\}$.

Пример

Бесконечными являются множества всех натуральных (N), целых (Z), действительных (R) чисел.

Понятие «счетного множества»

Счетное множество – это множество А, все элементы которого могут быть занумерованы в бесконечную последовательность a_1, a_2, a_3, …, a_n.. так, чтобы при этом каждый элемент получил лишь один номер n и каждое натуральное число n было бы номером лишь одного элемента множества А.

http://mathprofi.ru/mnozhestva.html

ссылка

- Например. Дано множество , тогда
- .
- Различия между отношениями принадлежности и включения:
- если , то , если , то и .

Понятие «мощность множества»

Мощностью множества А называется **количество** входящих в его состав различных элементов и обозначается через |А|.

Пример

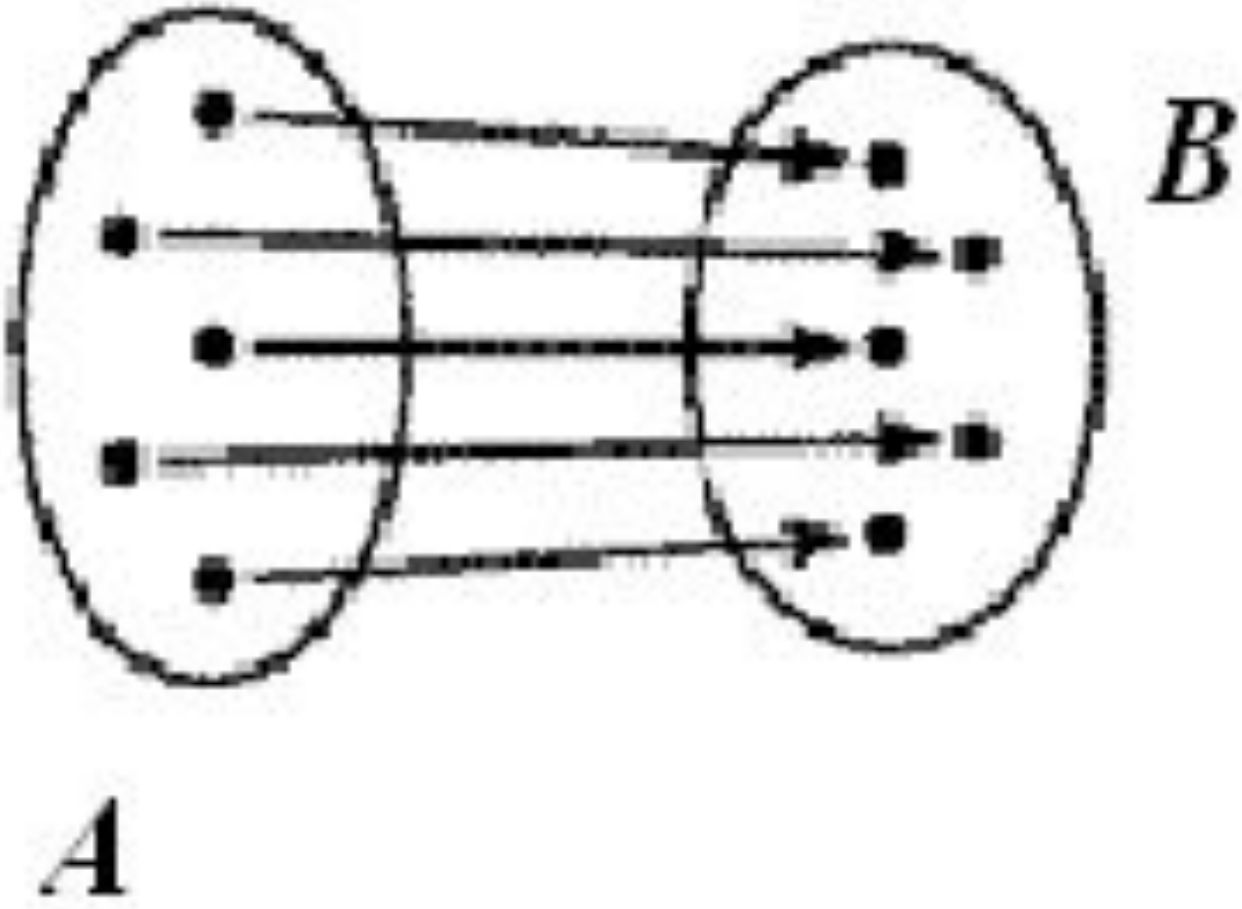
- $A = \{a, b, c, d\}$ $|A|=4$
- $B = \{a, b, \{a, b\}, a\}$ $|B|=3$
- $C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ $|C|=n$
- $D = \{N, 1, \{1, 2\}\}$ $|D|=3$
- $E = \{a\}$ $|E|=1$

Понятие равномощного множества

- Множества А и В называются ***равномощными***, если между их элементами существует **взаимно-однозначное** соответствие.

Взаимно-однозначное соответствие предполагает, что каждому элементу множества *B* поставлен в соответствие ровно один элемент множества *A.*

Графическое представление взаимно-однозначное соответствие



Пример

Множества {0, 1, 2} и {лошадь, корова, телевизор} - равномощны,

Множества {0, 1, 2} и {лошадь, корова} - неравномощны.

Пример

- Множество **N** и множество четных чисел также равномощны:
- N: 1 2 3 4 5 6 …

  ↕ ↕ ↕ ↕ ↕ ↕
- Четные числа: 2 4 6 8 10 12 …

Два множества равны, тогда и только тогда, когда они состоят из одних и тех же элементов.

Равенство двух множеств A и B обозначается $A = B$.

Примеры

Множества A = {2,4,6} и B = {2,6,4} равны.
Так как состоят из одних и тех же элементов.

Множества {{a,d},{d,c}} и {a,d,c} не равны.
Так как первое состоит из элементов {a,d} и {d,c}, а второе из a,d,c.

Множества {{1,2}} и {1,2} не равны.
Так как первое множество одноэлементное, а второе - двухэлементное.

Способы задания множеств

Способы задания множеств

1. Табличная форма или перечисление элементов.

$$A = \{ a_1, a_2, \ldots, a_n \}$$

Пример

- множество студентов данной группы определяется их списком в журнале;
- множество всех стран на земном шаре - их списком в атласе,
- множество всех костей в человеческом теле - их списком в учебнике анатомии.

Способы задания множеств

2. Описание признака или свойства элементов множества.

Множество = {x | x обладает свойством P}

Понятие свойства

Под ***свойством*** предмета *X* будем понимать такое повествовательное предложение, в котором нечто утверждается относительно предмета *X* и которое можно характеризовать как истинное или ложное по отношению к *X*.

Пример

1. Свойство «быть квадратом целого числа» задает (бесконечное) множество всех квадратов целых чисел:

$$A = \{y \mid \exists\, x \in Z \;\&\; y=x^2\}.$$

2. Свойство «делиться на число 2 без остатка» задает множество четных чисел:

$$B = \{y \mid \exists\, x \in Z \;\&\; y=2*x\}.$$

- 3. Свойство «рост студента 180 см» задает множество студентов:

C = {x | x – студент рост, которого 180 см}

Способы задания множеств

3. С помощью порождающей процедуры.

Каждый последующий элемент множества определяется на основании предшествующих элементов.

Примеры

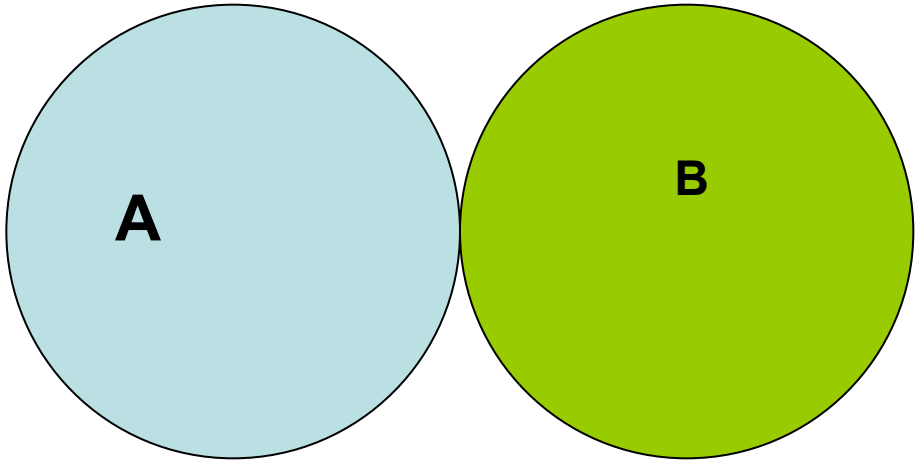
1. Каждый последующий элемент есть сумма двух предыдущих, задается следующим образом:

$$D = \{x_k \mid x_0=0,\ x_1=1,\ x_k=x_{k-2}+x_{k-1}\}.$$

2. $$B = \left\{ b \mid b = \pi/2 \pm \kappa\pi, \kappa \in \mathrm{N} \right\}$$

Способы задания множеств

4.) Графическое задание множеств с помощью диаграмм Эйлера-Венна.



<u>Таким образом,</u>

- 1. Способ задания множества должен быть адекватным, т.е. полностью определять множество. Это возможно, если объекты множества перечислены.
- 2. К описанию свойств естественно предъявить требования *точности* и *недвусмысленности*.

Понятие «пустое множество»

Пустое множество - множество, не содержащее ни одного элемента. Оно обозначается Ø и его мощность равна нулю (|Ø|=0).

Пустое множество единственно.

Множества {Ø} и {{Ø}} неравномощные.

В множестве {Ø} нет ни одного элемента,

а в множестве {{Ø}} есть один элемент

пустое множество.

Понятие универсального множества

- **<u>Универсальное множество U</u>**: есть множество, обладающее таким свойством, что все рассматриваемые множества являются его подмножеством.

- В теории чисел универсальное множество обычно совпадает со множеством всех целых или натуральных чисел.
- В математическом анализе универсальное множество может быть множеством всех действительных чисел.

Теоретико-множественные отношения

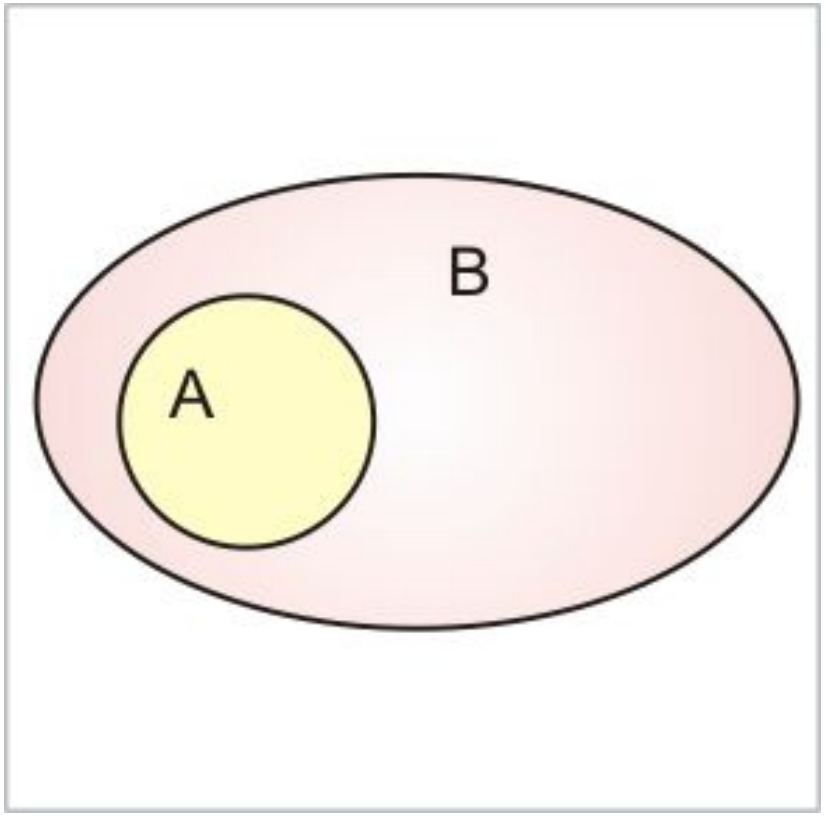
Отношение нестрогого включения

Множество А называют ***<u>подмножеством множества</u>*** В, если каждый элемент множества А является также элементом множества В.

- То, что множество А является подмножеством множества В обозначают так:

$$A \subseteq B . \cdot A \subseteq B \leftrightarrow \forall x \left(x \in A \rightarrow x \in B\right)$$

Диаграмма Эйлера-Венна



- При этом множество B называется ***<u>надмножеством</u>*** множества A.

Пример

- Множество всех четных чисел является подмножеством множества всех целых чисел, множество {0, 1, 2} – подмножеством множества {0, 1, 2, 3}.
- Множество должностных преступлений – подмножеством множества всех преступлений.

- Если A не является подмножеством B это записывается как A $\not\subseteq$ B
- Пример: $\{1,2,3\} \subseteq \{1,2,3,4\}$,

  $\{1,2,5,\} \not\subseteq \{1,2,3,4\}$,

  поскольку существует элемент A не принадлежащий B.

- Каждое множество есть подмножество универсального множества U.

- Пустое множество есть подмножество любого данного множества A, так как каждый элемент пустого множества содержится в A.
- Можно сказать, что не существует элементов пустого множества, которые не принадлежали бы A.

- Любое множество является подмножеством самого себя, т.е. для любого множества А справедливо включение

$$A \subset A$$

Отношение равенства

- Два множества называются ***равными***, если каждый элемент любого из них необходимо является элементом другого.
- A = B тогда и только тогда, когда

$$A \subseteq B \text{ и } B \subseteq A.$$

Отношение строгого включения

- Подмножество А ***<u>строго включается</u>*** во множество В $(A \subset B)$,

  если оно *нестрого включается* во множество В $(A \subseteq B)$ и при этом они не равны друг другу (А≠В).

$$A \subset B \leftrightarrow (A \subseteq B \ \& \ A \neq B).$$

- В этом случае A называется ***собственным подмножеством*** или собственной частью множества B.

- Любое множество, отличное от несобственного, называется собственным подмножеством данного множества.

Пример

Множество A = {a, b, c} является собственным подмножеством множества B = {a, b, c, d. e}.

Верна цепочка включений числовых множеств:

$$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$$

множество **натуральных чисел N** является подмножеством множества **целых чисел Z**, которое является подмножеством множества **рациональных чисел Q** множества **вещественных чисел R**, множества **комплексных чисел C**.

Выводы:

- 1. Пустое множество является подмножеством любого множества.
- 2. Любое множество является подмножеством самого себя.
- 3. У любого множества есть обязательно хотя бы два подмножества: пустое множество и само множество.

Выводы:

- 4. У пустого множества нет собственных подмножеств.
- 5. Оба несобственных подмножества равны между собой.
- 6. У любого одноэлементного множества нет собственных подмножеств. Его несобственные подмножества различны.

- Если А ={3,5}, то собственными подмножествами множества А будут являться множества {3} и {5}

Отношение включения и отношение принадлежности

- Если так, тогда операции включения и отношение принадлежности суть одно и то же?
- Нет. Принадлежность - это принадлежность элемента множеству. Включение - это включение подмножества в множество. Например, если мы возьмем множество из каких-нибудь трех элементов, то , , , , , , , , , , . Кстати, знак вводится для удобства, а на самом деле строка - это сокращение для формулы .

- Очень важно не смешивать отношения принадлежностии включения: если {a}M, то aM, и наоборот; но из {a}M не следует {a}M. Так, например, если M = {1, 2}, то это означает, что 1M и 2M, но для всех других объектов x справедливо xM; для включения же правильны следующие утверждения:
- M, {1}M, {2}M., {1, 2}M.
- Другой пример. Пустое множествоне имеет элементов xM для любого объекта x. Между темсодержит одно подмножество, а именно само себя.

в) Очень важно не смешивать отношения принадлежности $\in$ и включения $\subseteq$: если $\{a\} \subseteq M$, то $a \in M$, и наоборот; но из $\{a\} \subseteq M$ не следует $\{a\} \in M$. Так, например, если $M = \{1, 2\}$, то это означает, что $1 \in M$ и $2 \in M$, но для всех других объектов x справедливо $x \notin M$; для включения же правильны следующие утверждения:

$\varnothing \subseteq M$, $\{1\} \subseteq M$, $\{2\} \subseteq M$., $\{1, 2\} \subseteq M$.

Другой пример. Пустое множество $\varnothing$ не имеет элементов $x \notin M$ для любого объекта x. Между тем $\varnothing$ содержит одно подмножество, а именно само себя.

Понятие булеана множества

- Количество всех подмножеств (множество всех подмножеств) некоторого множества A называется его **булеаном**, или **множеством-степенью**, и обозначается через

$$\mathcal{P}(A),\ \mathcal{B}(A)$$

- и равно $2^{|A|}$,

  где |A| - мощность множества A.

Пример

$A = \{1, 3, 5\}$,

$P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1,3\}, \{1,5\}, \{3,5\}, \{1,3,5\}\}$.

Пример

Пусть $A = \{ 1,2,3,4,...,n \}$, $|A| = n$.

Найдем мощность множества $P(A)$.

- Для определения P(A) воспользуемся биномиальными коэффициентами

$$C_n^k$$

- (число сочетаний из n по k)

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Перечислим по порядку, начиная с пустого множества, все подмножества множества А:

- пустому подмножеству множества А поставим в соответствие число

$$1 = C_n^0$$

- булеан содержит одноэлементные подмножества:

$$\{ 1 \},\ \{ 2 \},\ \{ 3 \},\ \ldots,\ \{n\};$$

(число одноэлементных подмножеств равно n = C_n^1)

Булеан содержит следующие двухэлементные подмножества:

{ 1,2 },{ 1,3 },{ 1,4 },… ,{ 1,n },{ 2,3 },{ 2,4 }, …,{ 2,n },{ 3,4 },{ 3,5 }, …,{ 3,n },…,

{ n - 2,n - 1 },{ n - 2,n },{ n - 1,n}.

Количество двухэлементных подмножеств равно:

$$\frac{n(n-1)}{2} = C_n^2$$

Булеан содержит:

C_n^3 - трехэлементных подмножеств,

C_n^4 четырехэлементных подмножеств

Таким образом, булеан содержит

$$C_n^{n-1}$$

(n - 1)-элементных подмножеств и одно n элементное подмножество (само множество А), которому сопоставляется биномиальный коэффициент C_n^n

Сумма всех биномиальных коэффициентов покажет количество элементов булеана *P*(A)

$$2^n = (1 + 1)^n =$$

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n$$

$$P(A) = 2^n$$

- Количество собственных подмножеств некоторого множества A равно $2^{|A|} - 1$.

- **Теорема.**
  Каково бы ни было множество A,

  множество его подмножеств P(A)

  неравномощно самому множеству A.

Свойства теоретико-множественных отношений

Свойства отношения равенства:

A=A (рефлексивность);

A=B → B=A (симметричность);

A=B & B=C → A=C (транзитивность).

Свойства теоретико-множественных отношений

Свойства отношения нестрогого включения:

$A \subseteq A$ (рефлексивность);

$A \subseteq B \,\&\, B \subseteq A \rightarrow A=B$ (антисимметричность);

$A \subseteq B \,\&\, B \subseteq C \rightarrow A \subseteq C$ (транзитивность);

$\forall A\,(\varnothing \subseteq A)$ – пустое множество является частью любого множества.

Свойства теоретико-множественных отношений

Свойства отношения строгого включения:

$A \not\subset A$ (антирефлексивность);

$A \subset B \rightarrow B \not\subset A$ (асимметричность);

$A \subset B \,\&\, B \subset C \rightarrow A \subset C$ (транзитивность).