

# МОДИФИЦИРОВАННЫЙ СИМПЛЕКС

## МЕТОД

*Симплекс-метод* – не самая эффективная компьютерная процедура, так как она вычисляет и хранит информацию, которая не нужна для текущей итерации и может вообще не использоваться для принятия решений при последующих итерациях. Для коэффициентов неосновных переменных в уравнении (0), коэффициентов введенных основных переменных в других уравнениях и правых частях уравнений при каждой итерации используется только релевантная информация. Поэтому нужна процедура, которая может получать эту информацию эффективно, без вычислений и хранения всех других коэффициентов (это и есть

Он вычисляет и хранит только информацию, необходимую на данный момент, а важные данные передает в более компактной форме.

Он использует *операции с матрицами*, поэтому необходимо описывать задачу используя матрицы.

**ЗАГЛАВНЫЕ** буквы, выделенные жирным шрифтом представляют **матрицы**, прописные буквы, выделенные жирным шрифтом представляют **векторы**.

*Курсив* – это скалярные величины, выделенный ноль (**0**) обозначает **нулевой вектор** (его элементы равны нулю, как строки, так и столбцы), ноль (0) представляет обычное число 0.

С использованием матриц стандартная форма модели линейного программирования принимает форму:

Максимизировать  $Z = c$

$x$ ,

согласно

$Ax \leq b$  and  $x \geq 0$ ,

где  $c$  вектор-

строка

$$c = [c_1, c_2, \dots, c_n],$$

$x$ ,  $b$ , и  $0$  векторы-

столбцы

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

**A** -  
матрица

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Для дополненной формы, вектор-столбец фиктивных переменных:

$$\mathbf{x}_s = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{bmatrix}$$

Ограничения  
:

$$[\mathbf{A}, \mathbf{I}] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_s \end{bmatrix} = \mathbf{b} \quad \text{and} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_s \end{bmatrix} \geq \mathbf{0},$$

$\mathbf{I} = (m \times m \text{ единичная матрица})$   
 $\mathbf{0} = (n + m \text{ элементы нулевого})$

# Нахождение базового допустимого решения

Общий подход симплекс-метода – получение последовательности *улучшающихся* ОД решений до тех пор, пока не будет найдено оптимальное решение. Одна из ключевых особенностей модифицированного симплекс-метода – то, как он находит новое ОД решение после определения его основных (базисных) и неосновных (небазисных) переменных. Имея эти переменные, получающееся основное решение – решение  $m$  уравнений

$$[A, I] \begin{bmatrix} x \\ x_s \end{bmatrix} = b$$

В котором  $n$  базисных переменных из  $n + m$  элементов  $\begin{bmatrix} x \\ x_s \end{bmatrix}$  устанавливаются равными нулю

Исключая эти  $n$  переменных приравниванием к нулю, получаем систему уравнений  $m$  с  $m$  переменными (основными (базисными) переменными):

$$Bx_B = b,$$

где вектор базисных переменных

$$x_B = \begin{bmatrix} x_{B1} \\ x_{B2} \\ \vdots \\ x_{Bm} \end{bmatrix}$$

получен исключением небазисных (неосновных) переменных:

$$\begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$$

# И базисная матрица

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1m} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{m1} & B_{m2} & \dots & B_{mm} \end{bmatrix}$$

Полученная исключением столбцов, соответствующих коэффициентам небазисных переменных из  $[\mathbf{A}, \mathbf{I}]$ .

**( $\mathbf{B}$  дополнение, элементы  $x_B$ , и столбцы  $B$  в разном порядке).** Симплекс метод вводит только базисные переменные, такие что  $\mathbf{B}$  - невырожденная, так что обратная матрица  $\mathbf{B}^{-1}$  всегда будет существовать. Чтобы решить  $\mathbf{B} x_B = b$ , обе стороны умножаются на  $\mathbf{B}^{-1}$ :

$$\mathbf{B}^{-1} \mathbf{B} x_B = \mathbf{B}^{-1} b$$

$$x_B = B^{-1}b.$$

**$c_B$  – вектор, чьи элементы - коэффициенты целевых функций (включая нули для фиктивных переменных) для соответствующих элементов  $x_B$ . Целевая функция  $Z$  решения:**

$$Z = c_B x_B = c_B B^{-1}b.$$



## Пример:

$$c = [3, 5], \quad [A, I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad x_s = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

- Итерация  
0

$$x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B^{-1},$$

$$\text{so } \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$$c_B = [0, 0, 0] \quad \text{so} \quad Z = [0, 0, 0] \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = 0$$

## - Итерация 1

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{so} \quad \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_B = [0, 5, 0] \quad \text{so} \quad Z = [0, 5, 0] \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} = 30$$

## - Итерация 2

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

so

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_B = [0, 5, 3] \quad \text{so} \quad Z = [0, 5, 3] \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = 36$$

# Матричная форма для текущего множества уравнений

Матричная форма для множества уравнений, появляющаяся в симплекс-таблице для любой итерации исходного симплекс-метода. Для исходной системы уравнений, *матричная форма такая:*

$$\begin{bmatrix} 1 & -c & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}.$$

Алгебраические операции, выполняемые симплекс-методом (умножить уравнение на константу и прибавить произведение одного уравнения на другое) выражаются в виде матрицы, предварительно умножив обе части исходной системы уравнений на соответствующие матрицы

Iteration	Basic Variable	Eq.	Coefficient of:			Right Side
			Z	Original Variables	Slack Variables	
0	Z $\mathbf{x}_B$	(0) (1, 2, . . . , m)	1 <b>0</b>	$-\mathbf{c}$ <b>A</b>	<b>0</b> <b>I</b>	0 <b>b</b>
Any	Z $\mathbf{x}_B$	(0) (1, 2, . . . , m)	1 <b>0</b>	$\mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} - \mathbf{c}$ <b><math>\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}</math></b>	$\mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1}$ <b><math>\mathbf{B}^{-1}</math></b>	$\mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$ <b><math>\mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}</math></b>

Эта матрица будет иметь те же элементы, что и единичная матрица, за исключением того, что каждое произведение для определенной алгебраической операции займет место, необходимое для выполнения этой операции, используя перемножение матриц. Даже после серии алгебраических операций в течение нескольких итераций, мы все еще можем сделать вывод, что эта матрица должна быть для всей серии, используя то, что мы знаем о правой стороне новой системы уравнений. После любой итерации,  $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$  и  $Z = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ , поэтому правые стороны новой системы

$$\text{уравнен } \begin{bmatrix} Z \\ \mathbf{x}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \\ \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

Так как мы выполняем одни и те же серии алгебраических операций с обеими сторонами исходного множества, для умножения правой и левой части, мы используем одну и ту же матрицу. Следовательно,

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\mathbf{c} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} & \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} - \mathbf{c} & \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} & \mathbf{B}^{-1} \end{bmatrix}$$

Желаемая матричная форма системы уравнений *после любой итерации*:

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} - \mathbf{c} & \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} & \mathbf{B}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \\ \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \end{bmatrix}.$$

**Example:** матричная форма, полученная после итерации 2 для задачи о стекольном заводе, используя  $\mathbf{B}^{-1}$  и  $\mathbf{c}_B$ :

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1} = [0, 5, 3] \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = [0, \frac{3}{2}, 1],$$

$$\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c} = [0, 5, 3] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - [3, 5] = [0, 0].$$



Используя величины  $x_B = B^{-1} b$  и  $Z = c_B B^{-1} b$ :

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc}
 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\
 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}
 \end{array} \right] \begin{array}{c} Z \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} = \begin{array}{c} 36 \\ 2 \\ 6 \\ 2 \end{array}$$

Только  $B^{-1}$  должна быть получена для вычисления всех чисел симплекс-таблицы из исходных параметров задачи  $(A, b, cB)$ . Любое из этих чисел может быть получено индивидуально, как правило, выполняют только векторное умножение (одна строка на один столбец) вместо полного матричного умножения. Необходимые числа для выполнения итераций симплекс-метода можно получить по мере необходимости, не проводя ненужные вычисления, чтобы получить все числа.

## **Краткий обзор модифицированного симплекс метода**

**1. Инициализация:** Как в исходном симплекс методе.

**2. Итерация:** Шаг 1 Определить введенные базисные (основные) переменные: Как в исходном симплекс методе.

Шаг 2 Определить уходящие базисные переменные: Как в исходном симплекс методе, за исключением подсчета только необходимых для этого чисел [коэффициенты введенных базисных переменных в каждом уравнении за исключением Ур. (0), а затем, для каждого строго положительного коэффициента, правая часть этого уравнения].

Шаг 3 Определить новое ОД решение: Получить  $B^{-1}$  и задать  $x_B = B^{-1}b$ .

**3. Анализ на оптимальность:** Как в исходном симплекс методе, за исключением подсчета только необходимых для этого анализа чисел, т.е., коэффициентов небазисных (неосновных) переменных в Уравнении (0).

На шаге 3 итерации,  $B^{-1}$  можно получить каждый раз используя стандартную компьютерную программу для обращения (инверсии) матрицы. Так как  $B$  (затем  $B^{-1}$ ) мало изменяется от

одной итерации к другой, более эффективная процедура через  $B^{-1}$