Лекция 21

4. Магнетизм

4.4. ЭМ колебания и волны

Колебательный контур. Свободные, затухающие и вынужденные электрические колебания. Формула Томсона. Электрический импеданс. Резонанс напряжений. Система уравнений Максвелла в интегральной форме. Вихревое электрическое поле. Токи смещения. Уравнение плоской волны. Скорость распространения ЭМ волн. Энергия ЭМ волны. Вектор Пойнтинга. Опыты Герца. Шкала ЭМ волн.

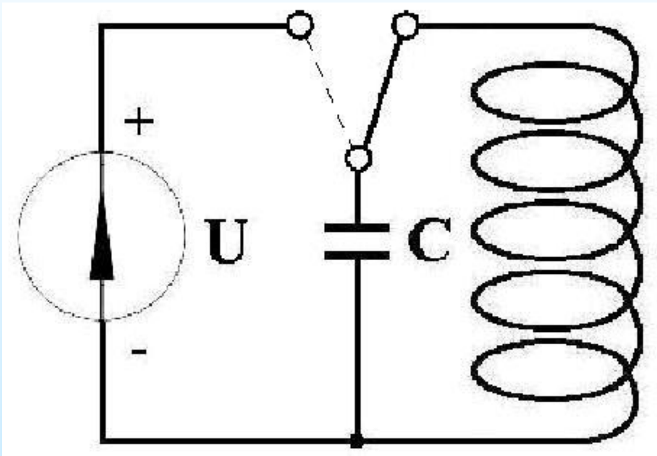
Колебательный контур

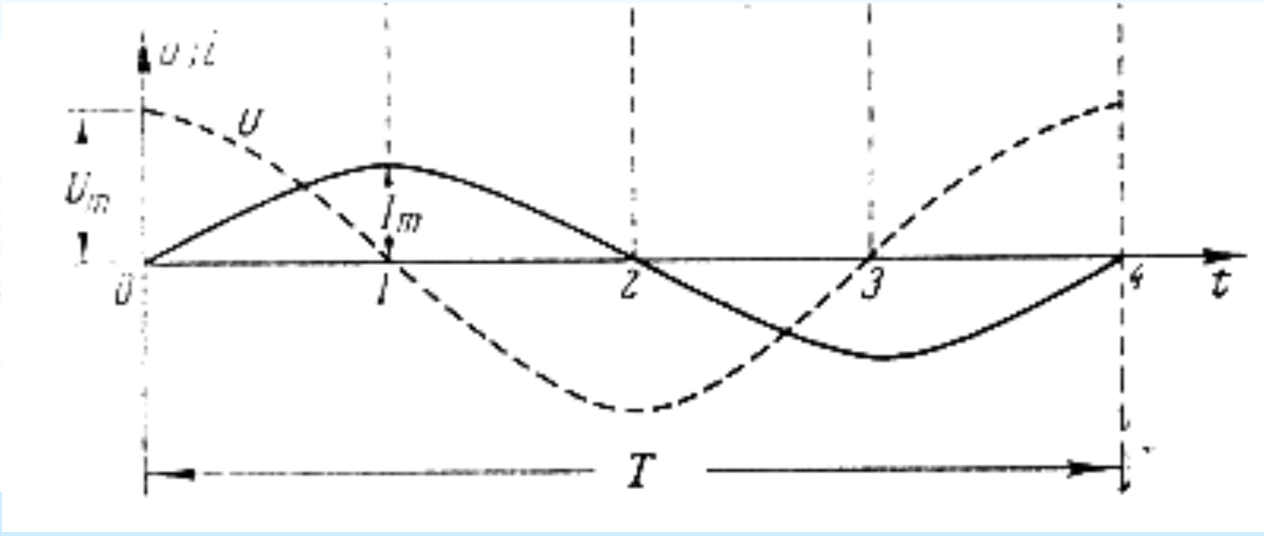
Колебательным контуром называется замкнутая электрическая цепь, содержащая катушку индуктивности и емкость (конденсатор), в которой могут возбуждаться электрические колебания.

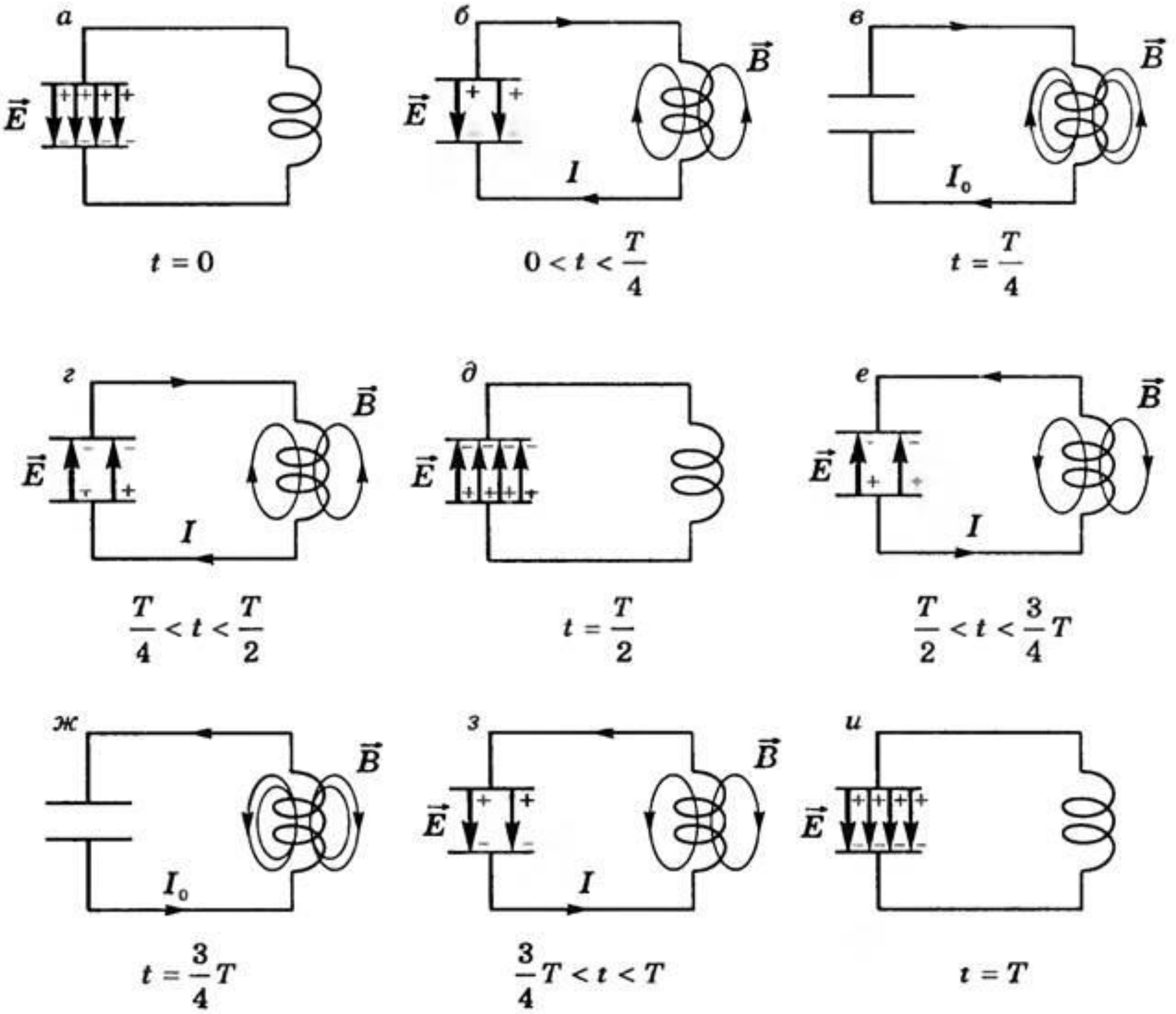
Электрические колебания

Колебания называются электрическими, поскольку в цепи периодически изменяются электрические величины – заряд конденсатора, напряжение на конденсаторе, ток в индуктивности.

$$W = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}LI^2$$







а
$\vec{E}$
$t = 0$
б
$\vec{E}$
$\vec{B}$
I
$0 < t < \frac{T}{4}$
в
$\vec{B}$
I_0
$t = \frac{T}{4}$
г
$\vec{E}$
$\vec{B}$
I
$\frac{T}{4} < t < \frac{T}{2}$
д
$\vec{E}$
$t = \frac{T}{2}$
е
$\vec{E}$
$\vec{B}$
I
$\frac{T}{2} < t < \frac{3}{4}T$
ж
$\vec{B}$
I_0
$t = \frac{3}{4}T$
з
$\vec{E}$
$\vec{B}$
I
$\frac{3}{4}T < t < T$
и
$\vec{E}$
$t = T$

Свободные электрические колебания

Поскольку внешнее напряжение к контуру не приложено, сумма падений напряжений на конденсаторе и катушке равна нулю.

$$U_L + U_C = 0 \;\Rightarrow\; L\frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \qquad \boxed{I = \frac{dq}{dt}} \;\Rightarrow\; L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \left(\frac{1}{LC}\right)q = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0} \;\Rightarrow\; \boxed{q = q_m \cos\omega_0 t}$$

$$U = \frac{q_m}{C}\cos\omega_0 t = U_m \cos\omega_0 t \qquad U_m = \frac{q_m}{C}$$

$$I = \frac{dq}{dt} = -q_m\omega_0 \sin\omega_0 t = -I_m \sin\omega_0 t = I_m \cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}) \qquad I_m = q_m\omega_0$$

Сила тока опережает по фазе напряжение на конденсаторе на $\frac{\pi}{2}$.

Формула Томсона

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \;\Rightarrow\; \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}} \qquad \boxed{\frac{U_m}{I_m} = \sqrt{\frac{L}{C}}}$$

Аналогия электрических и механических колебаний

Энергия электрического поля $\Longleftrightarrow$ Потенциальная энергия упругой деформации

$$W = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} \quad \Longleftrightarrow \quad W = \frac{1}{2}kx^2$$

Энергия магнитного поля $\Longleftrightarrow$ Кинетическая энергия

$$W = \frac{1}{2}LI^2 \quad \Longleftrightarrow \quad W = \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2$$

Индуктивность $\boxed{L}$ $\Longleftrightarrow$ Масса $\boxed{m}$

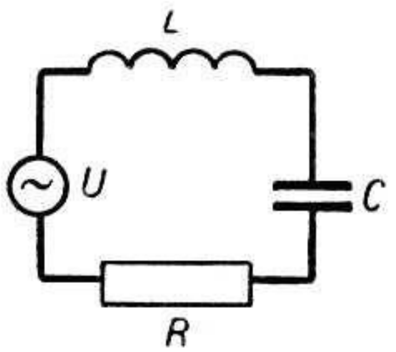
Обратная емкость $\boxed{\frac{1}{C}}$ $\Longleftrightarrow$ Коэффициент жесткости $\boxed{k}$

Заряд $\boxed{q}$ $\Longleftrightarrow$ Смещение из положения равновесия $\boxed{x}$

Сила тока $\boxed{I}$ $\Longleftrightarrow$ Скорость $\boxed{\mathrm{v}}$

Затухающие электрические колебания

$$U_L + U_R + U_C = 0 \rightarrow L\frac{dI}{dt} + IR + \frac{q}{C} = 0 \rightarrow L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

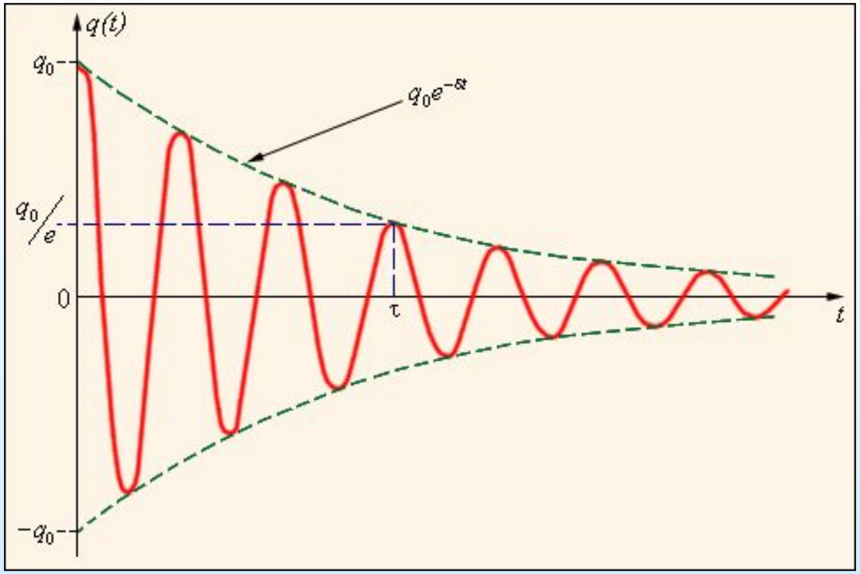


$$\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0} \rightarrow \boxed{\omega_0^2 = \frac{1}{LC}} \quad \boxed{\beta = \frac{R}{2L} = \frac{1}{\tau}}$$

$$\boxed{q = q_m e^{-\beta t}\cos\omega t} \rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}$$

Логарифмический декремент затуханий

$$\boxed{\lambda = \frac{1}{N_\tau} = \beta T = \frac{R}{2L}\frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi R}{L\omega}}$$



Добротность контура

$$\boxed{Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_\tau = \frac{L\omega}{R}}$$

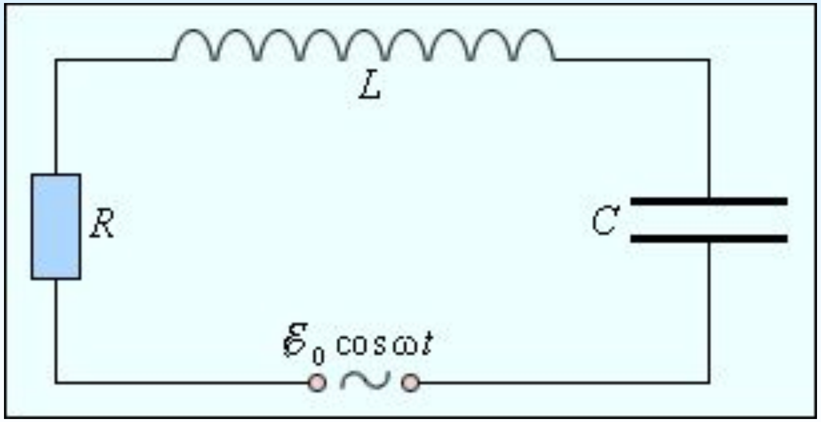
Если

$$\beta^2 << \omega_0^2 \rightarrow$$

$$\omega \approx \omega_0 \rightarrow Q = \frac{1}{\sqrt{LC}}\frac{L}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Вынужденные электрические колебания

$$U_L + U_R + U_C = U_m \cos\omega t \quad \Rightarrow \quad L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = U_m \cos\omega t$$



$$\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{U_m}{L}\cos\omega t}$$

$$\boxed{\omega_0^2 = \frac{1}{LC}} \qquad \boxed{\beta = \frac{R}{2L}}$$

Решение:

$$\boxed{q = q_m \cos(\omega t + \varphi)}$$

$$\boxed{q_m = \frac{U_m / L}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) + 4\beta^2\omega^2}} = \frac{U_m}{\omega\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}}$$

$$\boxed{tg\varphi = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\beta\omega} = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}}$$

Электрический импеданс (полное сопротивление цепи переменного тока)

$$I_m = q_m\omega \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} = \frac{U_m}{Z}}$$

Электрический импеданс

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} = \frac{U_m}{Z}$$

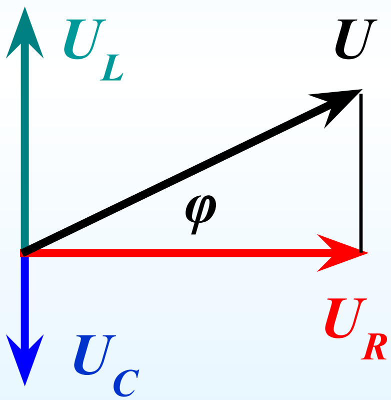
$$\boxed{Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} = \sqrt{R^2 + X^2}}$$ – полное сопротивление

$$\boxed{X = (\omega L - 1/\omega C) = X_L - X_C}$$ – реактивное сопротивление

$$\boxed{X_L = \omega L}$$ – индуктивное сопротивление

$$\boxed{X_C = 1/\omega C}$$ – емкостное сопротивление

$$I_R = I_m \cos\omega t$$



$$U_R = IR = I_m R\cos\omega t = U_{Rm}\cos\omega t$$

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C}\sin\omega t = U_{Cm}\cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

$$U_L = L\frac{dI}{dt} = -LI_m\sin\omega t = U_{Lm}\cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

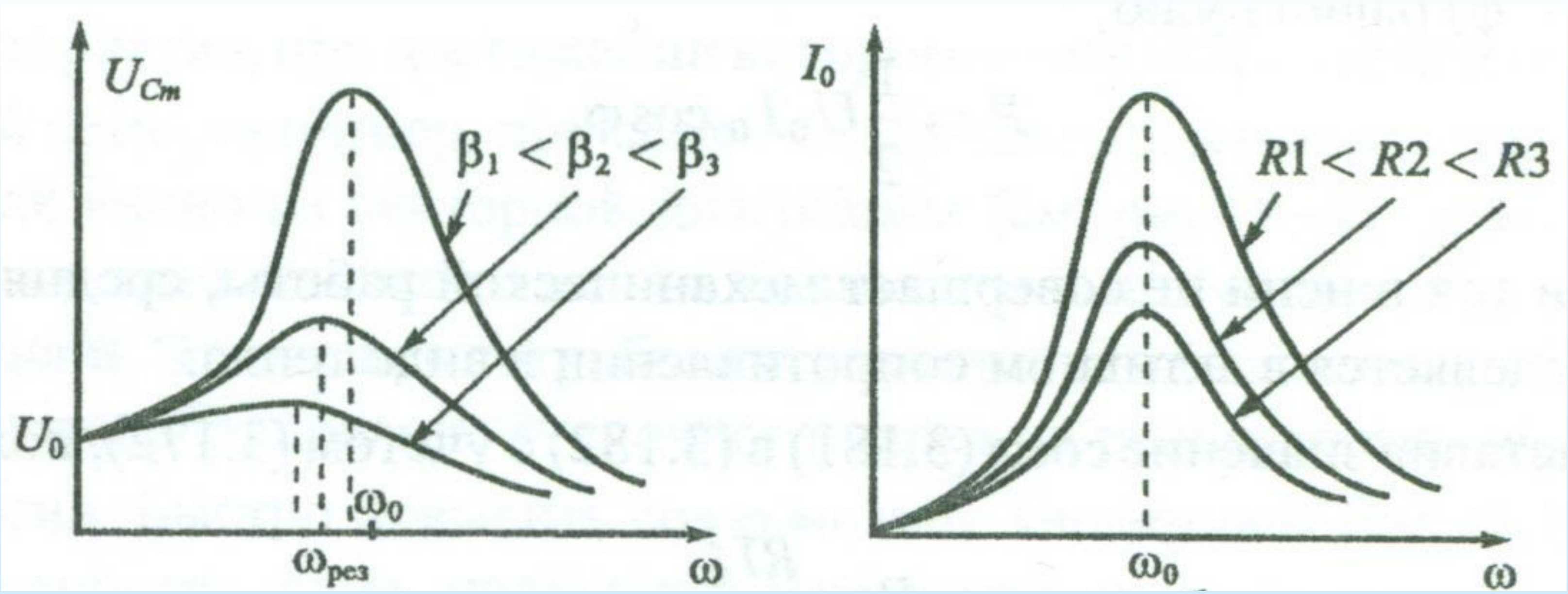
Резонанс напряжений

Сопротивление минимально, а ток максимален, если

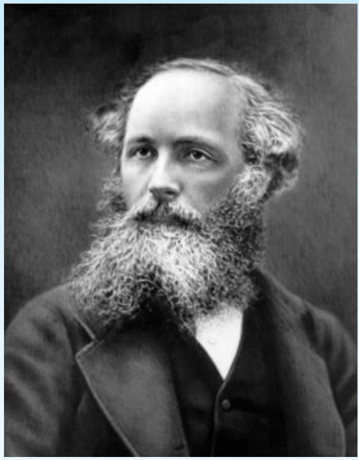
$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} = \frac{U_m}{Z}$$

$$(\omega L - 1/\omega C) = 0 \rightarrow \omega L = \frac{1}{\omega C} \rightarrow \boxed{\omega_{рез} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0}$$

Резонанс в последовательном колебательном контуре называют резонансом напряжений, поскольку в нем происходит полная компенсация напряжений на емкости и индуктивности, каждое из которых порознь, тем не менее, может существенно превышать приложенное к цепи напряжение.



Уравнения Максвелла (1860)



Джеймс Клерк Максвелл 1831–1879

Обобщив законы, установленные экспериментальным путем, Максвелл разработал законченную теорию о связи электрических и магнитных полей – единого электромагнитного поля, позволившую предсказать существование электромагнитных волн, вычислить скорость их распространения и затем создать ЭМ теорию света, по которой свет и есть такая волна.

Электрические и магнитные свойства среды в теории Максвелла характеризуются 3 величинами:

1) Диэлектрической проницаемостью ε ;
2) Магнитной проницаемостью μ ;
3) Удельной электрической проводимостью γ .

В уравнениях фигурируют 6 характеристик ЭМ поля:

1) Напряженность электрического поля E ;
2) Вектор электрического смещения $D = \varepsilon_0 \varepsilon E$;
3) Индукция магнитного поля B ;
4) Напряженность магнитного поля $B = \mu_0 \mu H$;
5) Плотность тока $j = \gamma E$;
6) Суммарный свободный заряд q .

Первое уравнение Максвелла

Закон Фарадея: любое изменение магнитного потока, сцепленного с контуром, вызывает в нем индукционный ток:

$$\boxed{\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}}$$

Это означает, что сторонние силы должны совершить работу по перемещению зарядов. Какие силы ?

Магнитные (сила Лоренца) не могут совершать работу.

Идея Максвелла: изменяясь во времени, магнитное поле порождает электрическое. Обозначим его напряженность $\vec{E}_B$.

Поскольку циркуляция вектора этой напряженности по замкнутому контуру и есть ЭДС индукции:

$$\mathcal{E} = \oint_l \vec{E}_B d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{B} d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \rightarrow \boxed{\oint_l \vec{E}_B d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}}$$

Ранее, для электростатического поля: $\boxed{\oint_l \vec{E} d\vec{l} = 0}$

→ Индуцированное электрическое поле другое !

Как и магнитное, оно вихревое ! непотенциальное !

Переменное магнитное поле создает в любой точке пространства вихревое электрическое поле независимо от того, находится в этой точке проводник, или нет.

Ток смещения

Закон Ампера: ток, текущий в проводнике, порождает магнитное поле с индукцией *B*. Однако 1) Противоречит закону сохранения заряда; 2) Почему только током ? Почему не переменным полем ?

Идея Максвелла (исходя из соображений симметрии):

Если всякое переменное магнитное поле порождает в окружающем пространстве вихревое электрическое поле, то и всякое изменение электрического поля должно вызывать появление вихревого магнитного поля.

Такое переменное электрическое поле, способное возбуждать магнитное, Максвелл назвал током смещения (в отличие от тока проводимости, обусловленного направленным движением зарядов)

Эта малая добавка к закону Ампера устраняет противоречие.

Пример: переменный ток проходит через конденсатор, потому что переменное электрическое поле создает в нем такое магнитное поле, как если бы между обкладками тек ток проводимости, т.е. плотность тока смещения должна равняться току проводимости. Найдем, чему она равна.

По теореме Гаусса для электрического поля:

$$\oint_S \vec{E}\,d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon}\sum_i^n q_i = \frac{q}{\varepsilon_0\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \oint_S \vec{D}\,d\vec{S} = q$$

$$\boxed{D = \varepsilon_0 \varepsilon E}$$

Продифференцируем по времени:

$$\frac{\partial}{\partial t}\oint_S \vec{D}\,d\vec{S} = \oint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\,d\vec{S} = \frac{\partial q}{\partial t} = I_{см} = \int_S \vec{j}_{см}\,d\vec{S} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{j}_{см} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$$

Плотность тока смещения в данной точке пространства равна скорости изменения в ней вектора электрического смещения.

$$\boxed{I_{см} = \int_S \vec{j}_{см}\,d\vec{S} = \oint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\,d\vec{S}}$$

Током смещения сквозь произвольную поверхность называется физическая величина, численно равная потоку вектора плотности тока смещения через эту поверхность.

Ток смещения так же, как и ток проводимости, создает вокруг себя магнитное поле – это единственное свойство, которое его роднит с током проводимости.

Второе уравнение Максвелла (закон полного тока)

Так как ток смещения возникает при любом изменении электрического поля, то он существует не только в вакууме, но и внутри проводников, по которым течет уже ток проводимости, т.е. они существуют вместе в одном и том же объеме проводника.

Идея Максвелла: ввел понятие полного тока, равного сумме токов проводимости и смещения

Согласно теореме о циркуляции магнитного поля:

$$\boxed{B = \mu_0 \mu H}$$

$$\oint_l \vec{B}\, d\vec{l} = \mu_0 \mu \sum_i^n I_i = \mu_0 \mu I \;\longrightarrow\; \oint_l \vec{H}\, d\vec{l} = I \;\longrightarrow\; \oint_l \vec{H}\, d\vec{l} = I + I_{см}$$

$$\boxed{\oint_l \vec{H}\, d\vec{l} = \int_S \vec{j}\, d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}}$$

Циркуляция вектора напряженности магнитного поля по произвольному замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов проводимости и тока смещения сквозь поверхность, ограниченную этим контуром.

Для области электромагнитного поля, где нет никаких свободных зарядов и токов проводимости, 1-е и 2-е уравнения Максвелла приобретают почти симметричный вид:

$$\boxed{\oint_l \vec{E}_B\, d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}} \;\Rightarrow\; \boxed{\oint_l \vec{E}\, d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}}$$

$$\boxed{\oint_l \vec{H}\, d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}} \;\Rightarrow\; \boxed{\oint_l \vec{H}\, d\vec{l} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}}$$

Между электрическим и магнитным полями существует тесная взаимная связь – изменение во времени электрического поля порождает магнитное поле, а переменное магнитное поле порождает вихревое электрическое поле, т.е. они неразрывно связаны друг с другом и образуют единое электромагнитное поле.

Третье уравнение Максвелла

Теорема Гаусса для электрического поля:

$$\oint_S \vec{D}\, d\vec{S} = q$$

Поток вектора электрического смещения через любую замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности зарядов.

Четвертое уравнение Максвелла

Теорема Гаусса для магнитного поля:

$$\oint_S \vec{B}\, d\vec{S} = 0$$

Поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равен нулю.

Идея Максвелла: обобщил теорему Гаусса, предположив что она справедлива не только для стационарных, но и переменных электрических и магнитных полей.

Система из 4 уравнений Максвелла достаточна для расчета поля в вакууме (4 неизвестных – E, B, j, q), но недостаточна для расчета поля в среде, так как нужны еще уравнения, характеризующие свойства среды:

$$B = \mu_0 \mu H \qquad D = \varepsilon_0 \varepsilon E \qquad j = \gamma E$$

Полная система уравнений Максвелла в интегральной форме

1) $$\oint_l \vec{E}\,d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$$

2) $$\oint_l \vec{H}\,d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}$$

Несимметричны,
так как существует
ток проводимости.

3) $$\oint_S \vec{D}\,d\vec{S} = q$$

4) $$\oint_S \vec{B}\,d\vec{S} = 0$$

Несимметричны, так как магнитных
зарядов не существует.

5) $$D = \varepsilon_0 \varepsilon E$$

6) $$B = \mu_0 \mu H$$

7) $$j = \gamma E$$

Характеризуют
свойства среды.

8-го уравнения нет, так как магнитных зарядов
не существует и поэтому они никуда не текут.

Система уравнений Максвелла для стационарных полей (E = const, B = const)

1) $$\oint_l \vec{E}\,d\vec{l} = 0$$

2) $$\oint_l \vec{H}\,d\vec{l} = I$$

3) $$\oint_S \vec{D}\,d\vec{S} = q$$

4) $$\oint_S \vec{B}\,d\vec{S} = 0$$

В этом случае электрическое и магнитное поля независимы друг от друга, что и позволяет изучать отдельно постоянные (статические) поля.

Волновые уравнения

Из уравнений Максвелла можно показать, что для непроводящей (j = 0) и электрически нейтральной (q = 0) среды:

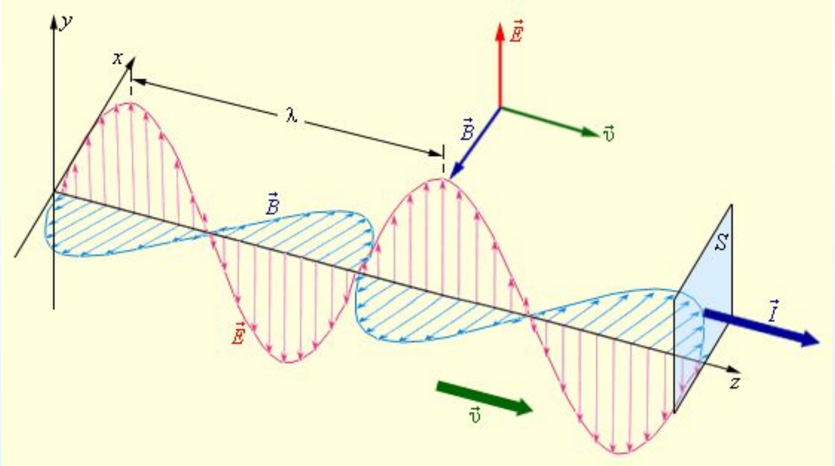
$$\boxed{\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}=\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}} \qquad \boxed{\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}=\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}}$$

Скорость распространения ЭМ волн в средах

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\mathrm{v}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu}}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}}$$

$$c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}=\sqrt{\frac{4\pi\cdot 9\cdot 10^9}{4\pi\cdot 10^{-7}}}=3\cdot 10^8\ м/сек$$



Для плоской волны

Плоской является ЭМ волна, распространяющаяся вдоль оси x (E и H не зависят от y и z).

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}=\frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}} \qquad \boxed{\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2}=\frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}}$$

Уравнение плоской волны

$$\begin{cases} E = E_m \cos(\omega(t - x/\mathrm{v})) = E_m \cos\left(\omega t - \dfrac{2\pi}{\lambda} x\right) \\ H = H_m \cos(\omega(t - x/\mathrm{v})) = H_m \cos\left(\omega t - \dfrac{2\pi}{\lambda} x\right) \end{cases}$$

Длина волны

$$\boxed{\lambda = \mathrm{v}T = \mathrm{v}\frac{1}{\nu} = \mathrm{v}\frac{2\pi}{\omega}}$$

Волновое число $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

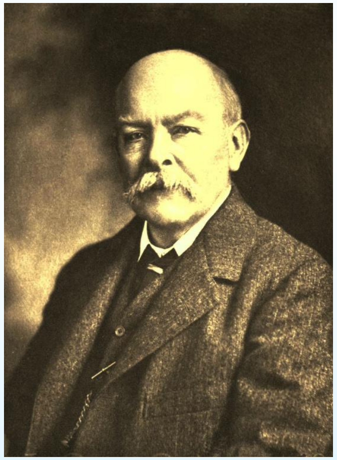
Колебания векторов происходят с одинаковой фазой, а их амплитуды связаны соотношением:

$$\boxed{E_m\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon} = H_m\sqrt{\mu_0\mu}}$$

Энергия электромагнитной волны

Плотность энергии:

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0\mu H^2}{2} = \sqrt{\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu}\,EH = \frac{EH}{\mathrm{v}}$$



Джон Генри Пойнтинг 1852–1914

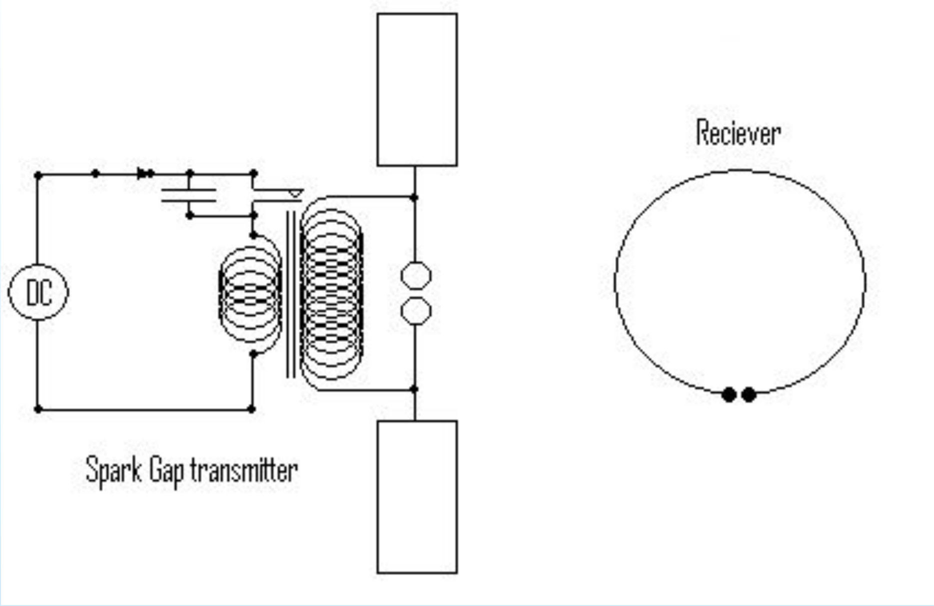
Плотность потока энергии (вектор Пойнтинга) – векторная физическая величина, характеризующая перенос энергии ЭМ волны в пространстве и численно равная энергии, переносимой волной в единицу времени через единичную площадку, расположенную перпендикулярно направлению распространения волны.

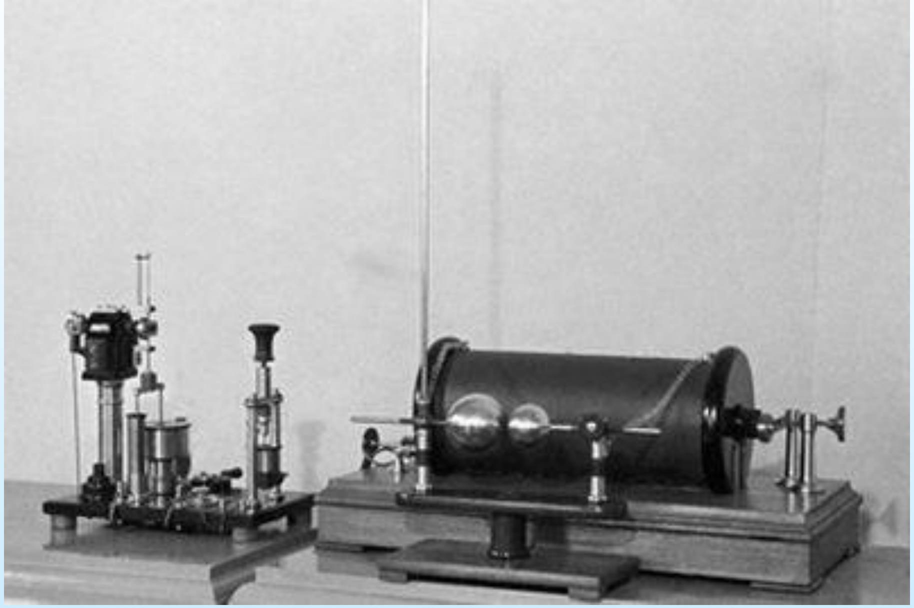
$$P = \frac{\Delta W}{\Delta S \Delta t} = \frac{w\Delta V}{\Delta S \Delta t} = \frac{w\Delta S \Delta x}{\Delta S \Delta t} = w\mathrm{v} \quad \Rightarrow \quad \boxed{P = w\mathrm{v} = EH} \qquad \boxed{\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}}$$

Опыты Герца (1887)

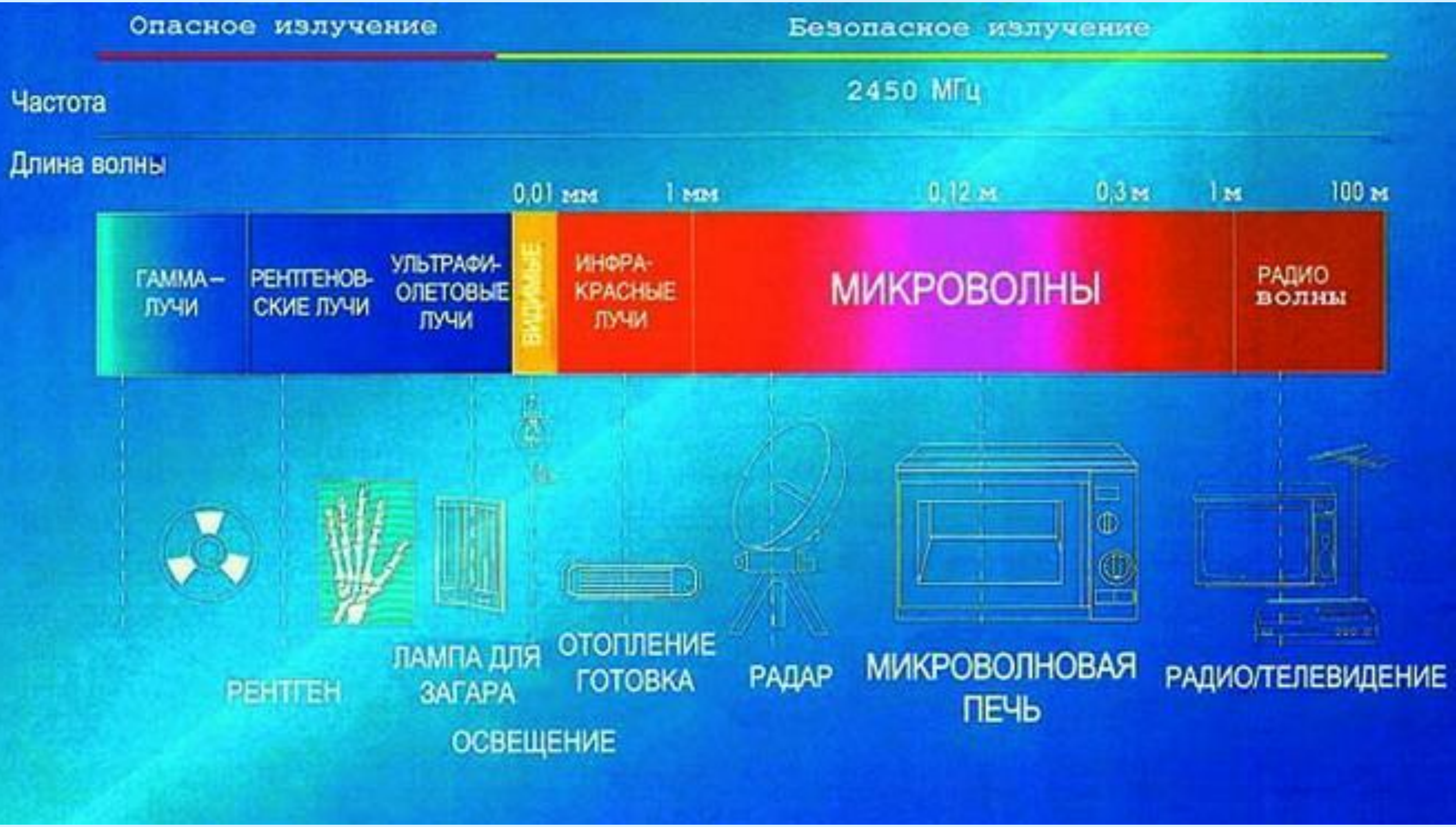
Генрих
Рудольф
Герц
1857–1894

Источниками электромагнитного излучения у него были искры в разрядниках (излучатель Герца). Электромагнитные волны от разрядников вызывали искровые разряды между шариками в "приемниках" — расположенных в нескольких метрах контурах, настроенных в резонанс. Герцу удалось не только обнаружить волны, в том числе, и стоячие, но и исследовать скорость их распространения, отражение, преломление и даже поляризацию.





Шкала электромагнитных волн



Спектр видимого света