Системы двух линейных уравнений с двумя переменными

Вспомним!

Линейное уравнение с двумя переменными

Уравнение вида:

$$ax + by + c = 0$$

называется линейным уравнением с двумя переменными (где x, y - переменные, a, b и c - некоторые числа).

$$(x;y)$$

Решением уравнения с двумя неизвестными называется пара переменных, при подстановке которых уравнение становится верным числовым равенством.

Решить линейное уравнение – это значит найти те значения переменной, при каждом из которых уравнение обращается в верное числовое равенство.

Таких решений бесконечно много.

Уравнение вида: $kx + m = 0$

называется линейным уравнением с одной переменной (где x – переменная, k и m некоторые числа).

Внимание!

x – переменная входит в уравнение обязательно в первой степени.

$5x - 8 = 0$ *линейное уравнением с одной переменной*

$2x^2 + 3x + 7 = 0$ *не линейное уравнением с одной переменной*

Вспомним!

$$x + y - 8 = 0$$

Реальная ситуация (словесная модель)	Алгебраическая модель	Геометрическая модель
Сумма двух чисел равна 8.	$x + y = 8$ (линейное уравнение с двумя переменными)	прямая (график линейного уравнения с двумя переменными)

Графиком любого линейного уравнения $ax + by + c = 0$ есть прямая.

Для построения графика достаточно найти координаты двух точек.

Вспомним!

Алгоритм построения графика уравнения $ax + by + c = 0$

1. Придать переменной x конкретное значение x_1; найти из уравнения $ax + by + c = 0$ соответствующее значение y_1. Получим $(x_1;y_1)$.

2. Придать переменной x конкретное значение x_2; найти из уравнения $ax + by + c = 0$ соответствующее значение y_2. Получим $(x_2;y_2)$.

3. Построим на координатной плоскости точки $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ и соединим прямой.

4. Прямая – есть график уравнения.

Часто приходится рассматривать математическую модель состоящую из ***двух линейных уравнений с двумя переменными.***

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

$$(x;y)$$

Решение системы уравнений с двумя неизвестными ***называется пара переменных, при подстановке которых уравнения становятся верными числовыми равенствами.***

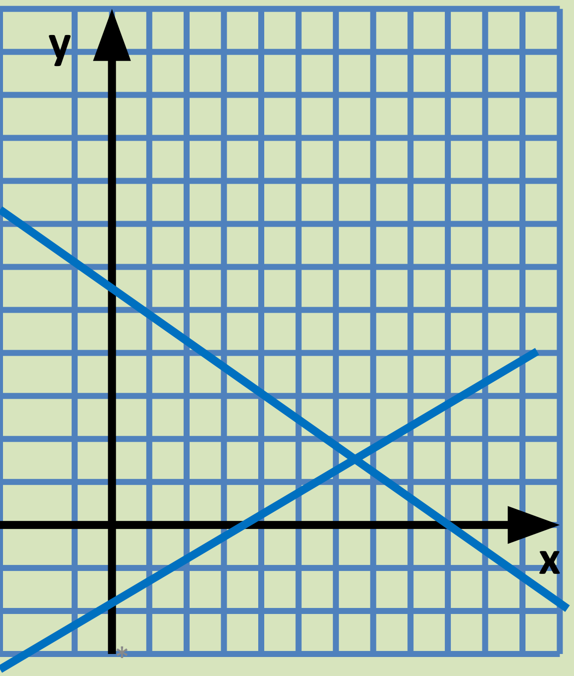
***Решить систему** - это значит найти все ее решения или доказать, что их нет.*

Как определить сколько решений имеет система уравнений без построения графиков?

$$\begin{cases} y = x - 2 \\ y = -2x + 3 \end{cases}$$

$K_1 \neq K_2$, значит прямые пересекаются.

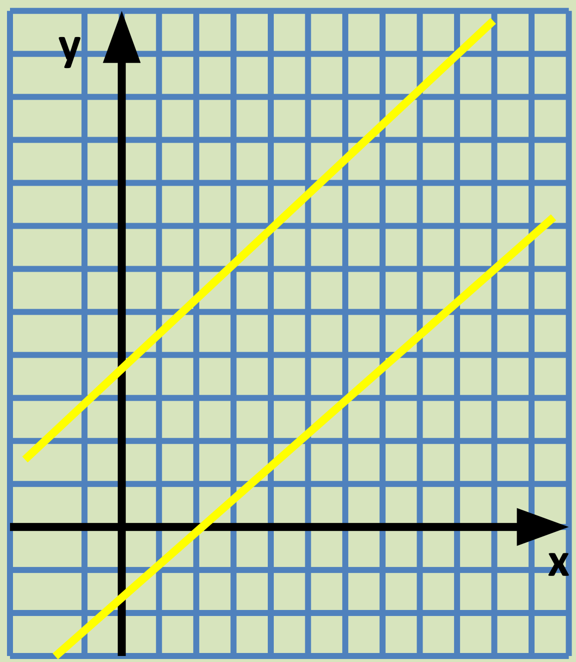
Система имеет одно решение!



$$\begin{cases} y = 5x - 2 \\ y = 5x + 3 \end{cases}$$

$K_1 = K_2$, значит прямые параллельны.

Система не имеет решения(она несовместимая)!

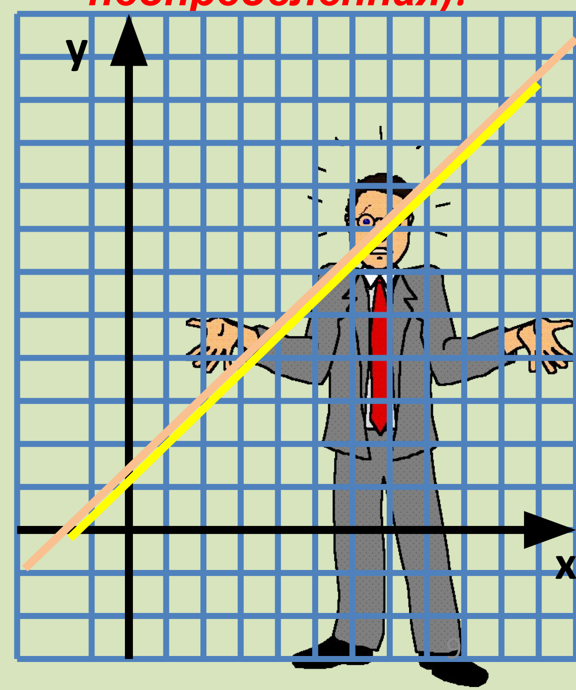


$$\begin{cases} y = 3x + 1 \\ 3x - y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = 3x + 1 \end{cases}$$

прямые совпадают.

Система имеет бесконечно много решений (она неопределённая)!



Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x - y - 3 = 0, \\ x + 2y - 4 = 0. \end{cases}$$

1. Построим график уравнения
$2x - y - 3 = 0$, $y = 2x - 3$.

x	1	2
y	-1	1

Получим точки:
(1; -1), (2; 1)

2. Построим график уравнения
$x + 2y - 4 = 0$, $2y = -x + 4$,
$y = (-x + 4) : 2$.

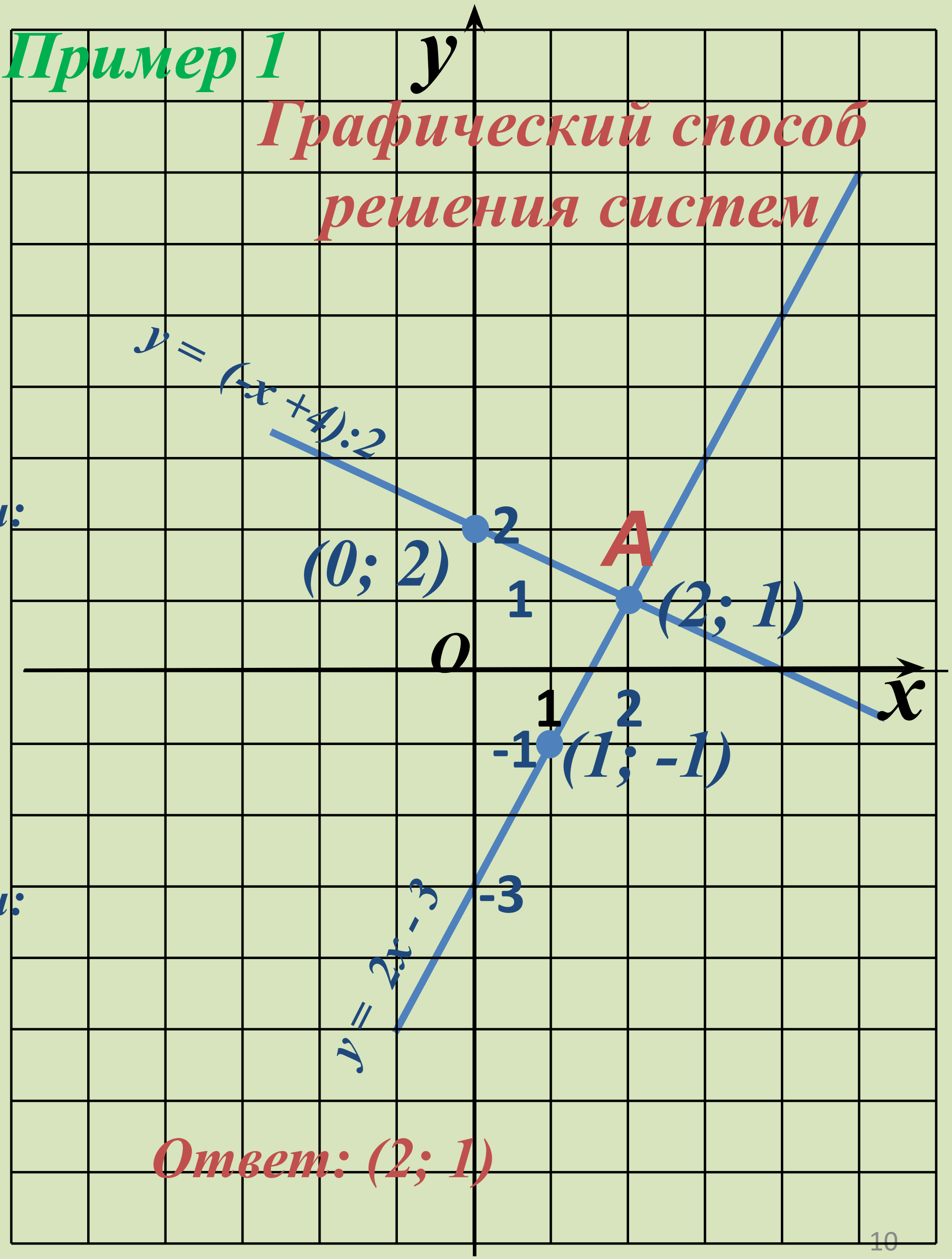
x	0	2
y	2	1

Получим точки:
(0; 2), (2; 1)

3. Прямые пересекаются в единственной точке A(2;1)

Пример 1

Графический способ решения систем



Ответ: (2; 1)

*

Алгоритм решения системы уравнений графическим способом

1. Приводим оба уравнения к виду линейной функции $y = kx + m$.
2. Составляем расчётные таблицы для каждой функции.
3. Строим графики функций в одной координатной плоскости.
4. Определяем число решений:
   - Если прямые пересекаются, то одно решение пара чисел (х ; у) – координаты точки пересечения;
   - Если прямые параллельны, то нет решений;
   - Если прямые совпадают, то бесконечно много решений.
5. Записываем ответ.

Количество решений двух линейных уравнений с двумя переменными.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

1) Если $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$, то прямые пересекаются и система имеет единственное решение.

2) Если $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$, то прямые параллельны и система не имеет решений. Система называется несовместной.

3) Если $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$, то прямые совпадают и система имеет бесконечно много решений. Система называется неопределенной.

Пример 2

Графический способ решения систем

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x + 2y - 5 = 0, \\ 2x + 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

1. Построим график уравнения

$x + 2y - 5 = 0$, $y = (5 - x):2$.

x	*1*	*3*
y	*2*	*1*

Получим точки:

(1; 2), (3; 1)

2. Построим график уравнения

$2x + 4y + 3 = 0$, $4y = -2x - 3$,

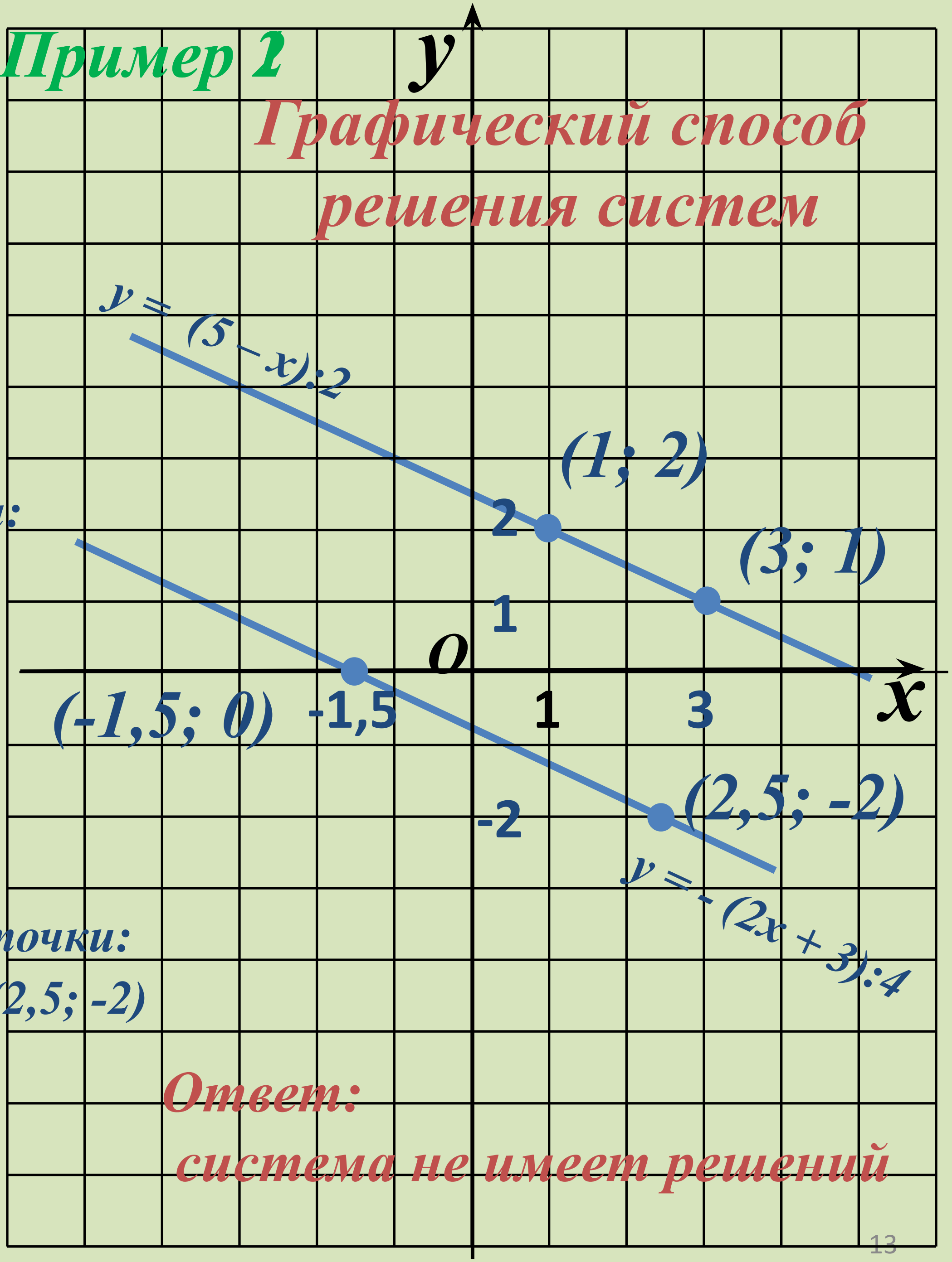
$y = -(2x + 3) : 4$.

x	*-1,5*	*2,5*
y	*0*	*-2*

Получим точки:

(-1,5; 0), (2,5; -2)

3. Прямые параллельны.



Ответ:

система не имеет решений

Пример 3

При каких значениях *а* система уравнений имеет единственное решение:

$$\begin{cases}(2a-1)x+3y=7a+1,\\(a+2)x+2y=5a-3.\end{cases}$$

Решение

Условие при которых система уравнений имеет единственное решение:

$$\frac{2a-1}{a+2}\neq\frac{3}{2},$$

Используем свойство пропорции:

$$2(2a-1)\neq 3(a+2),$$

$$4a-2\neq 3a+6$$

$$4a-3a\neq 2+6$$

$$a\neq 8$$

Ответ: при всех значениях *а*, кроме а = 8, данная система имеет единственное решение.

Пример 4

При каких значениях а система уравнений несовместна (т.е. не имеет решений):

$$\begin{cases} (2a-1)x+3y=7a+1, \\ (2a+1)x+5y=5a-3. \end{cases}$$

Решение

Условие при которых система уравнений несовместна (не имеет решений):

$$\frac{2a-1}{2a+1}=\frac{3}{5}\neq\frac{7a+1}{5a-3}$$

1) Сначала рассмотрим равенство $\frac{2a-1}{2a+1}=\frac{3}{5}$

Используем свойство пропорции: $5(2a-1)=3(2a+1),$

$10a-5=6a+3$ $\quad 10a-6a=3+5$ $\quad 4a=8$ $\quad a=2$

2) Теперь проверим неравенство: $\dfrac{3}{5} \neq \dfrac{7a+1}{5a-3}$

При подстановке значения $a = 2$ имеем: $\dfrac{3}{5} \neq \dfrac{7 \cdot 2 + 1}{5 \cdot 2 - 3}$

$\dfrac{3}{5} \neq \dfrac{15}{7}$ - верное неравенство

Ответ: при $a = 2$, данная система несовместна.

Пример 5

При каких значениях *a* система уравнений неопределенна:

$$\begin{cases}(2a-1)x+3y=7a+1,\\(a+1)x+6y=11a+5.\end{cases}$$

Укажите решения системы.

Решение

Условие при которых система уравнений неопределенна:

$$\frac{2a-1}{a+1}=\frac{3}{6}=\frac{7a+1}{11a+5}$$

1) Сначала рассмотрим равенство $\frac{2a-1}{a+1}=\frac{3}{6}$ $\quad \frac{2a-1}{a+1}=\frac{1}{2}$

Используем свойство пропорции: $2(2a-1)=a+1,$

$4a-2=a+1 \quad 4a-a=1+2 \quad 3a=3 \quad a=1$

*

2) Теперь проверим равенство: $\frac{3}{6} = \frac{7a+1}{11a+5}$

При подстановке значения $a = 1$ имеем: $\frac{3}{6} \neq \frac{7 \bullet 1 + 1}{11 \bullet 1 + 5}$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ - верное равенство

Итак при $a = 1$, данная система неопределенна.

При подстановке значения $a = 1$ в данную систему имеем:

$$\begin{cases} (2 \cdot 1 - 1)x + 3y = 7 \cdot 1 + 1, \\ (1+1)x + 6y = 11 \cdot 1 + 5. \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 3y = 8, \\ 2x + 6y = 16. \end{cases}$$

Поделим второе уравнение на 2, имеем: $\begin{cases} x + 3y = 8, \\ x + 3y = 8. \end{cases}$

Ответ: решением системы будет любая пара чисел x и y, в которой $x = 8 - 3y$, а y – произвольное число.

Спасибо за внимание!