ФУНКЦИИ

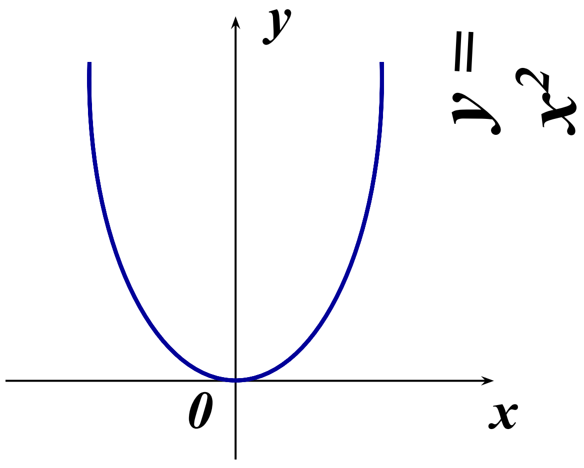
3. Основные характеристики функции
Чётность функции

- *Функция f(x)* ***четная***, *если* $\forall x \in X$ *справедливо равенство* $f(-x) = f(x)$

- *График четной функции симметричен относительно оси ОУ.*

$$f(x) = x^2$$

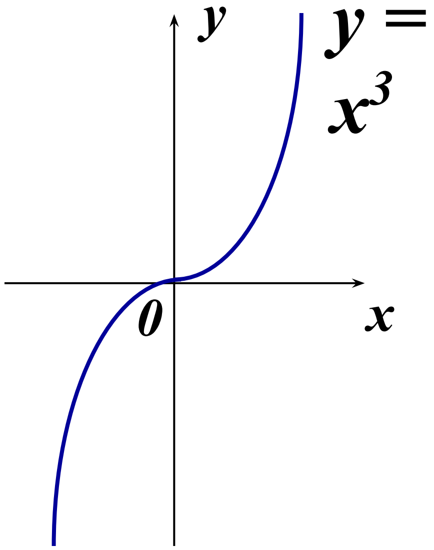
$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$



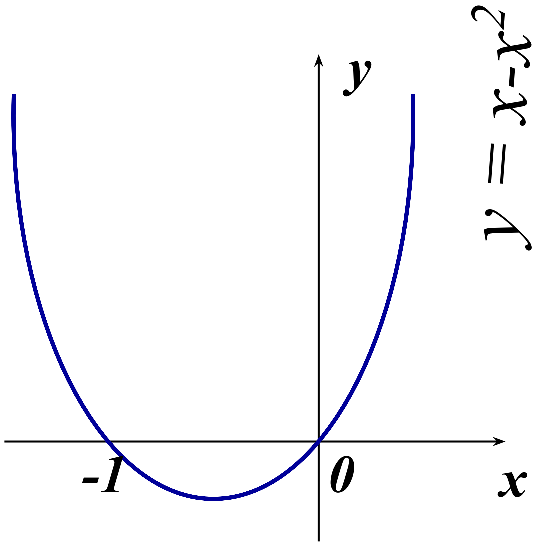
- *Функция f(x)* ***нечетная****, если* $\forall x \in X$ *справедливо равенство* $f(-x) = -f(x)$
- *График нечетной функции симметричен относительно начало координат (0;0)*

$$f(x) = x^3$$

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$



- *Функция, которая не является четной или нечетной называется функцией* ***общего вида.***



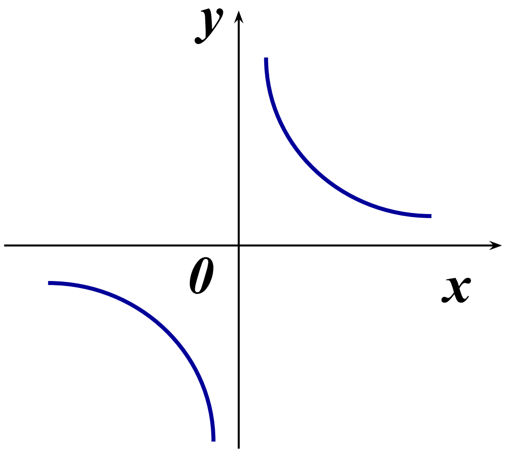
$$f(x) = x - x^2$$

$$f(-x) = -x - (-x)^2 = -x - x^2$$

14. Определить четность функции:

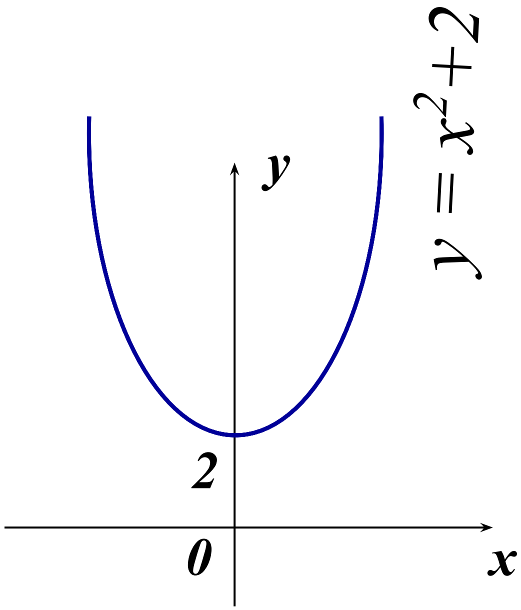
$$f(x)=\frac{1}{x}$$ - нечетная, т.к.

$$f(-x)=\frac{1}{-x}=-\frac{1}{x}=-f(x)$$



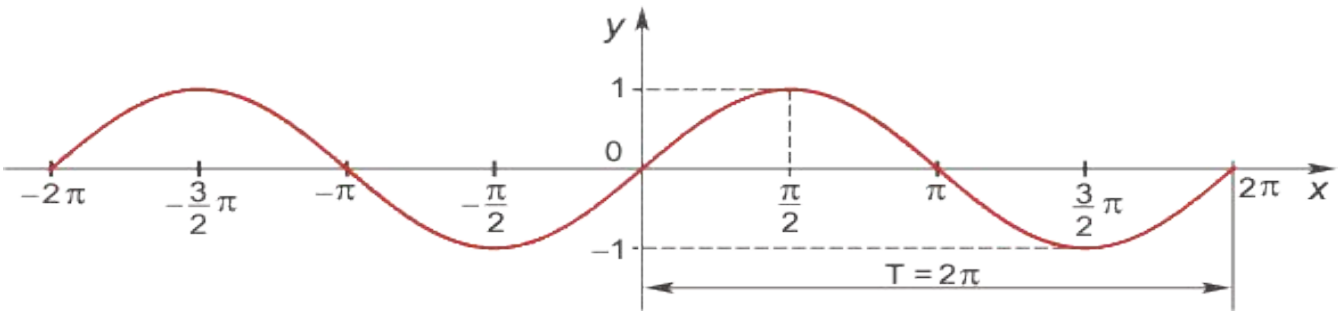
$$f(x)=x^2+2$$ - четная, т.к.

$$f(-x)=(-x)^2+2=x^2+2=f(x)$$



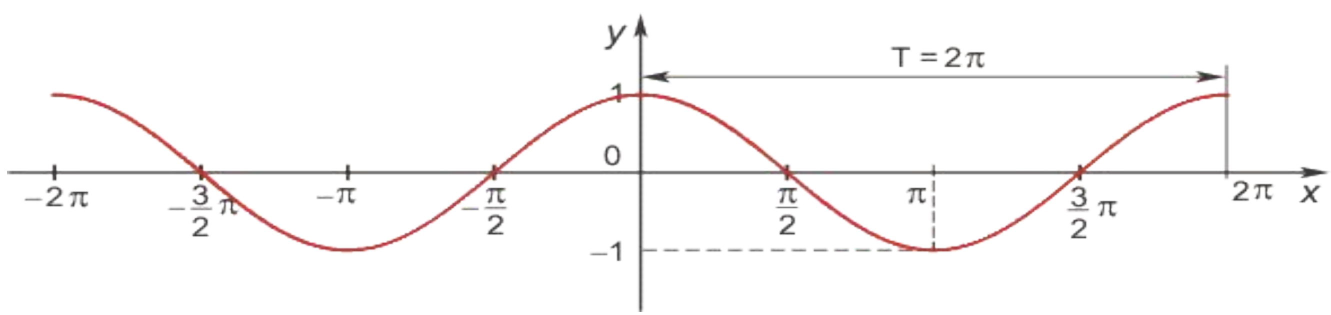
$f(x) = \sin x$ - нечетная, т.к.

$$f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$$

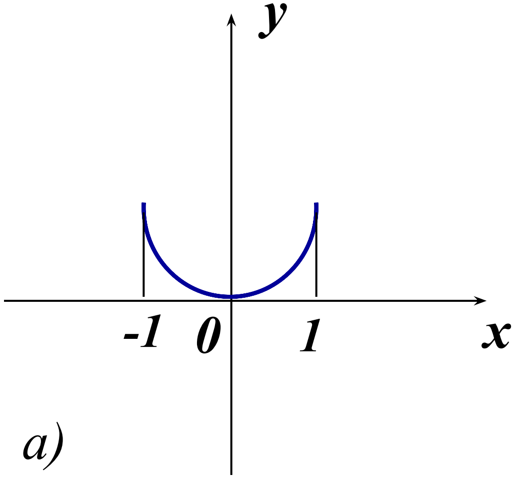


$f(x) = \cos x$ - четная, т.к.

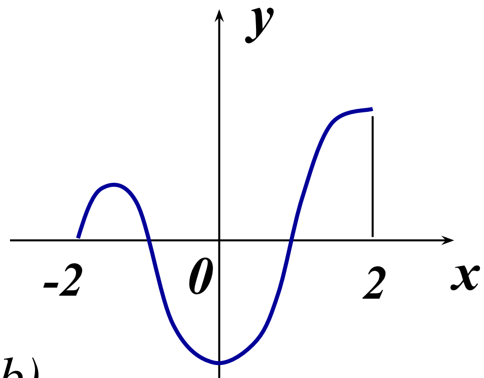
$$f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$$



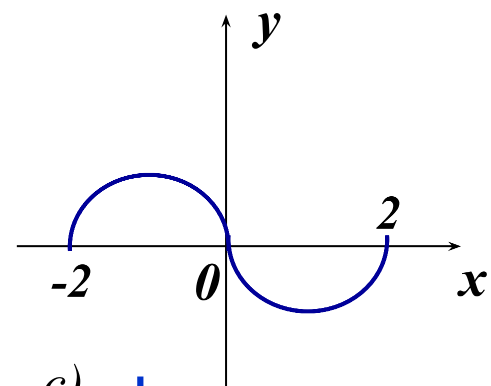
На каком из рисунков изображён график нечётной функции?



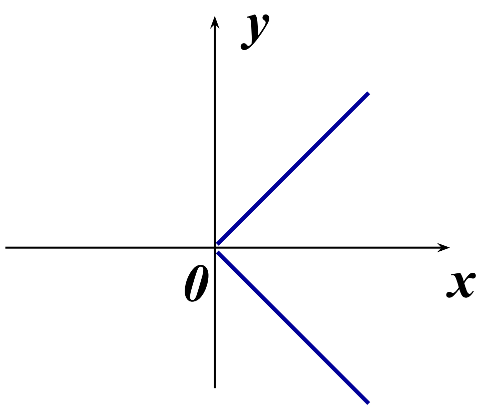
a)



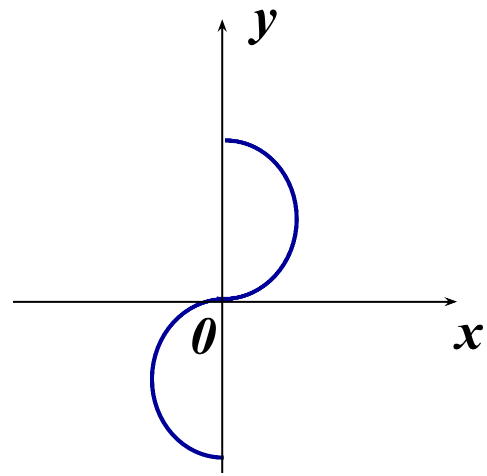
b)



c) +

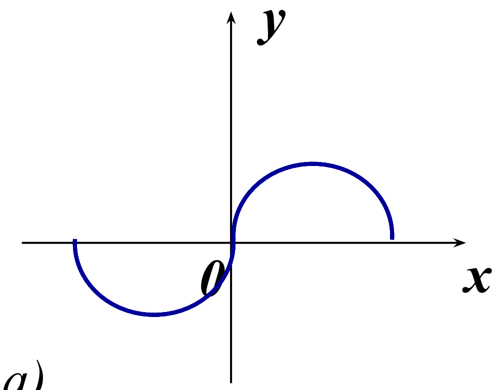


d)

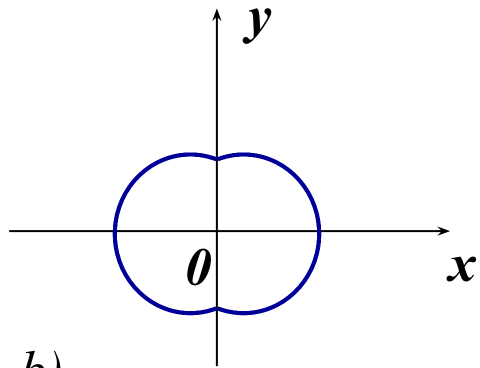


e)

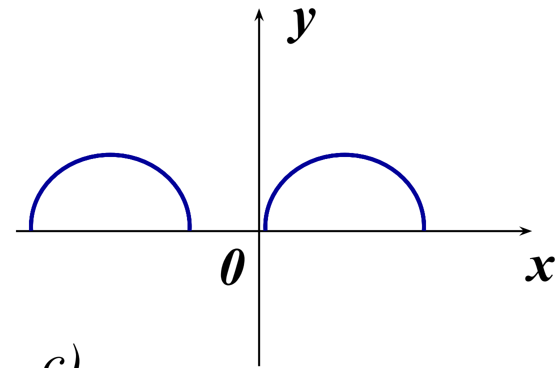
На каком из рисунков изображён график чётной функции?



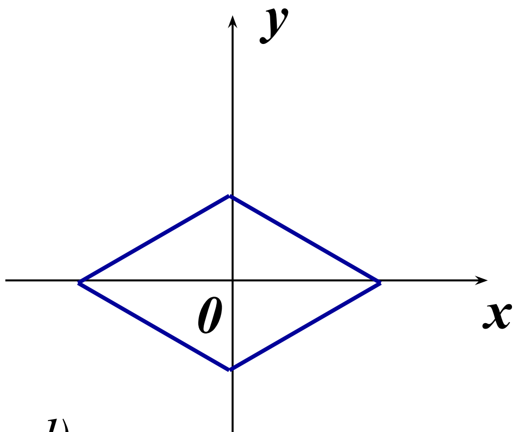
a)



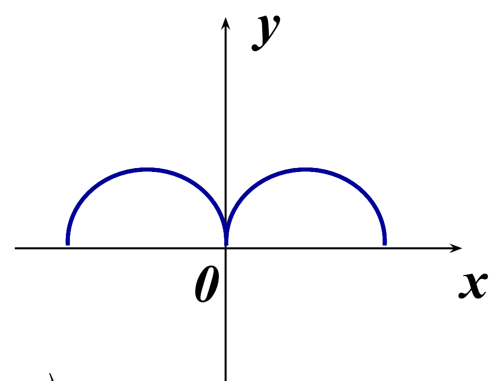
b)



c)



d)

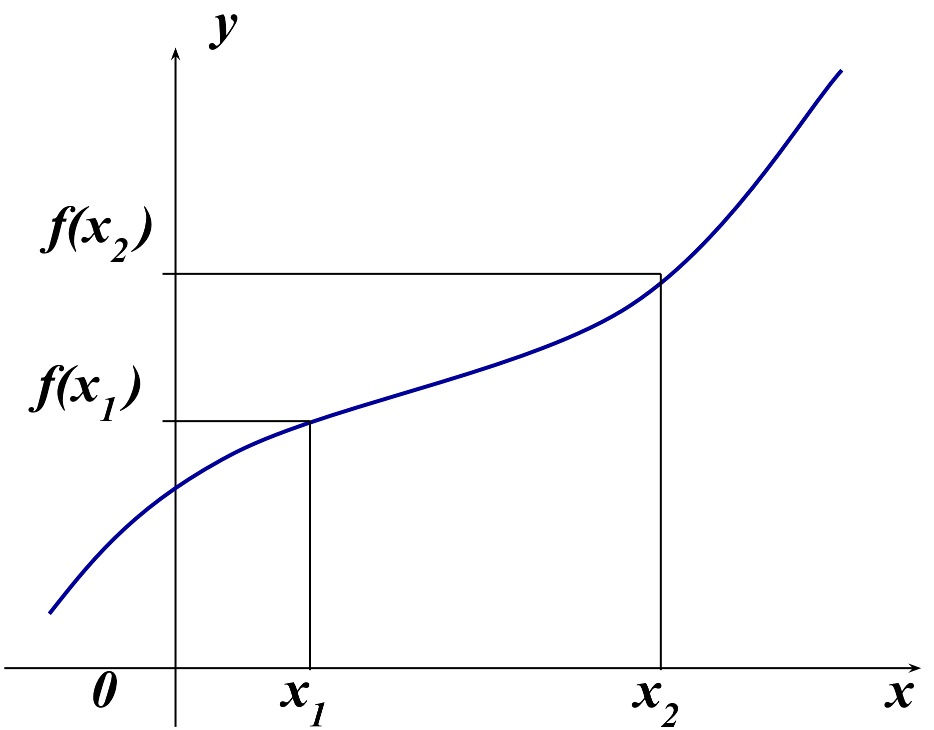


e) **+**

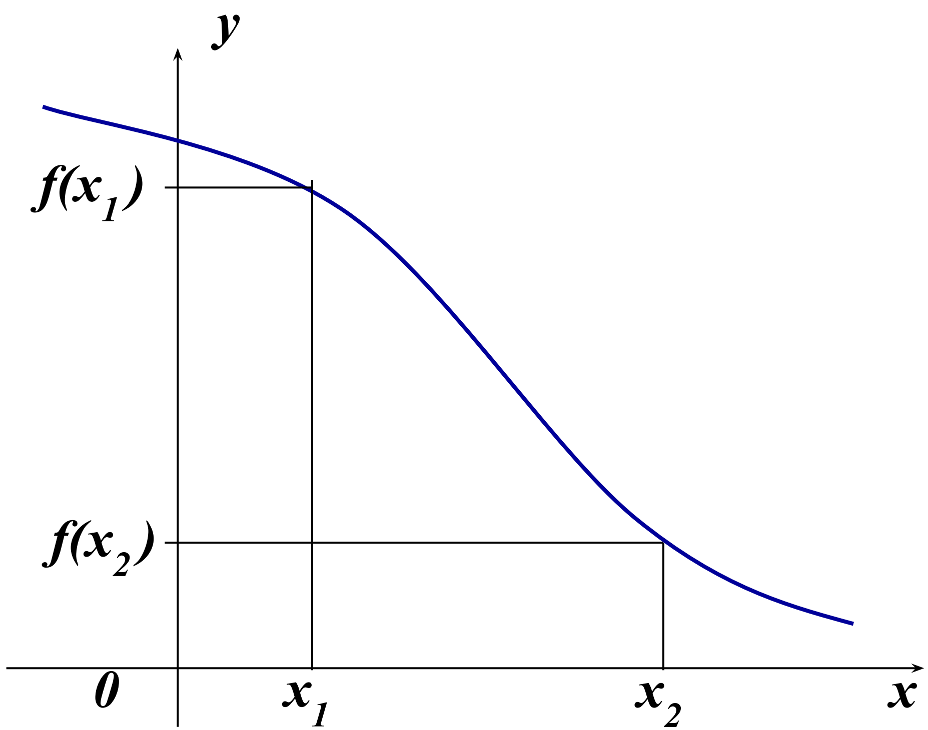
Монотонность

- Функция $f(x)$ называется **возрастающей** на $(a;b)$, если $\forall x_1, x_2$ $(a;b)$ функции $f(x)$ таких, что $x_1<x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$

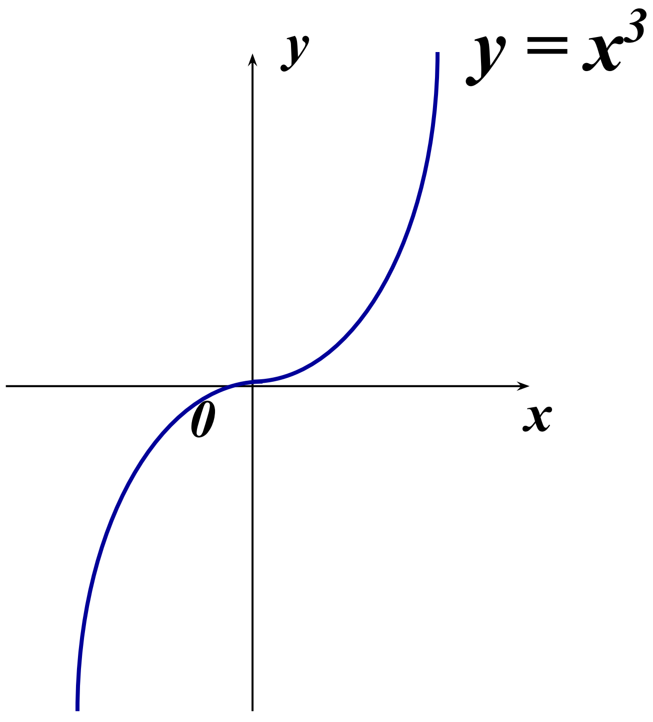
  (меньшему значению аргумента соответствует меньшее значение функции).



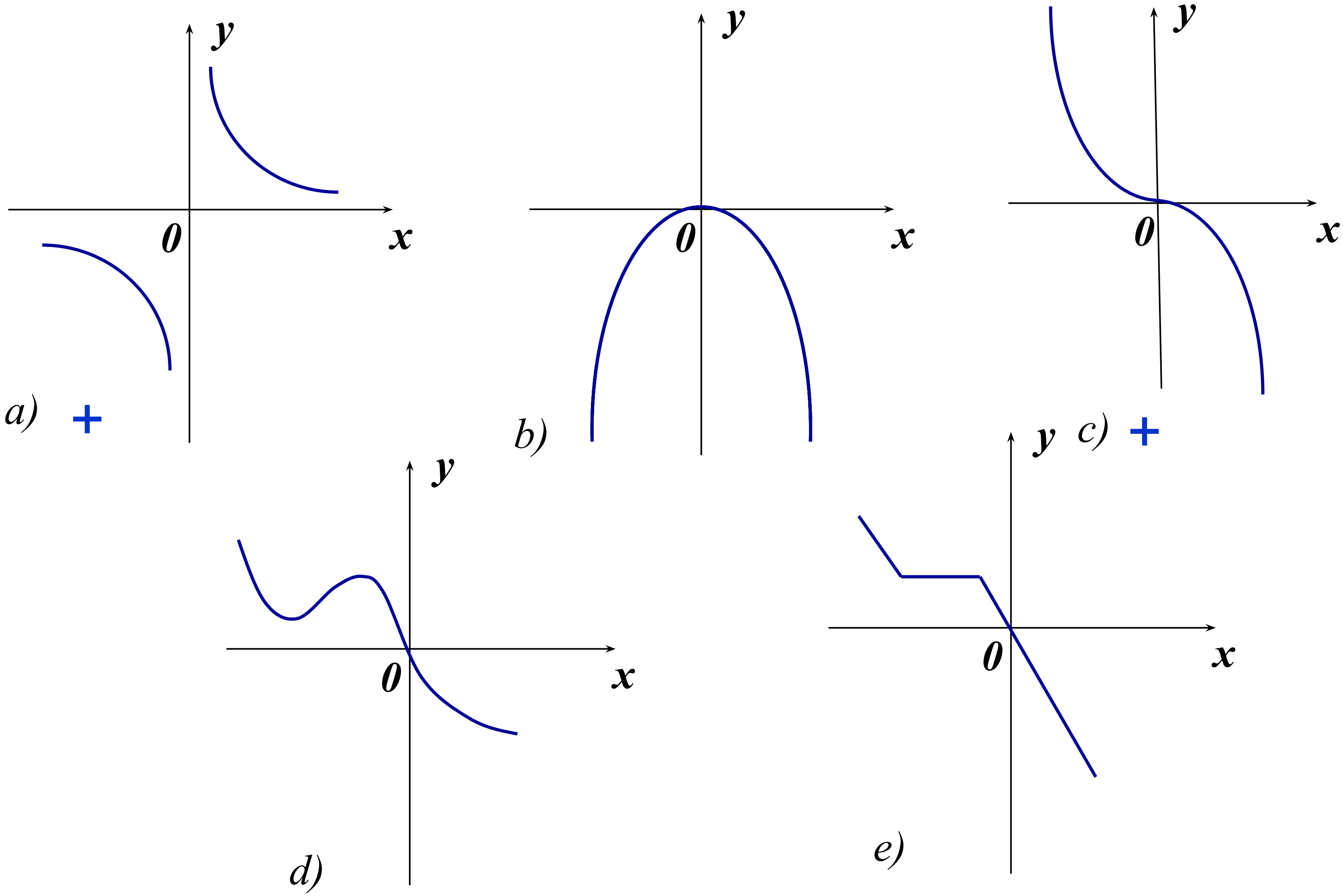
- Функция $f(x)$ называется **убывающей** на $(a;b)$, если $\forall x_1, x_2 \in (a;b)$ функции $f(x)$ таких, что $x_1<x_2$ выполняется неравенство $f(x_1)>f(x_2)$ (меньшему значению аргумента соответствует большее значение функции).



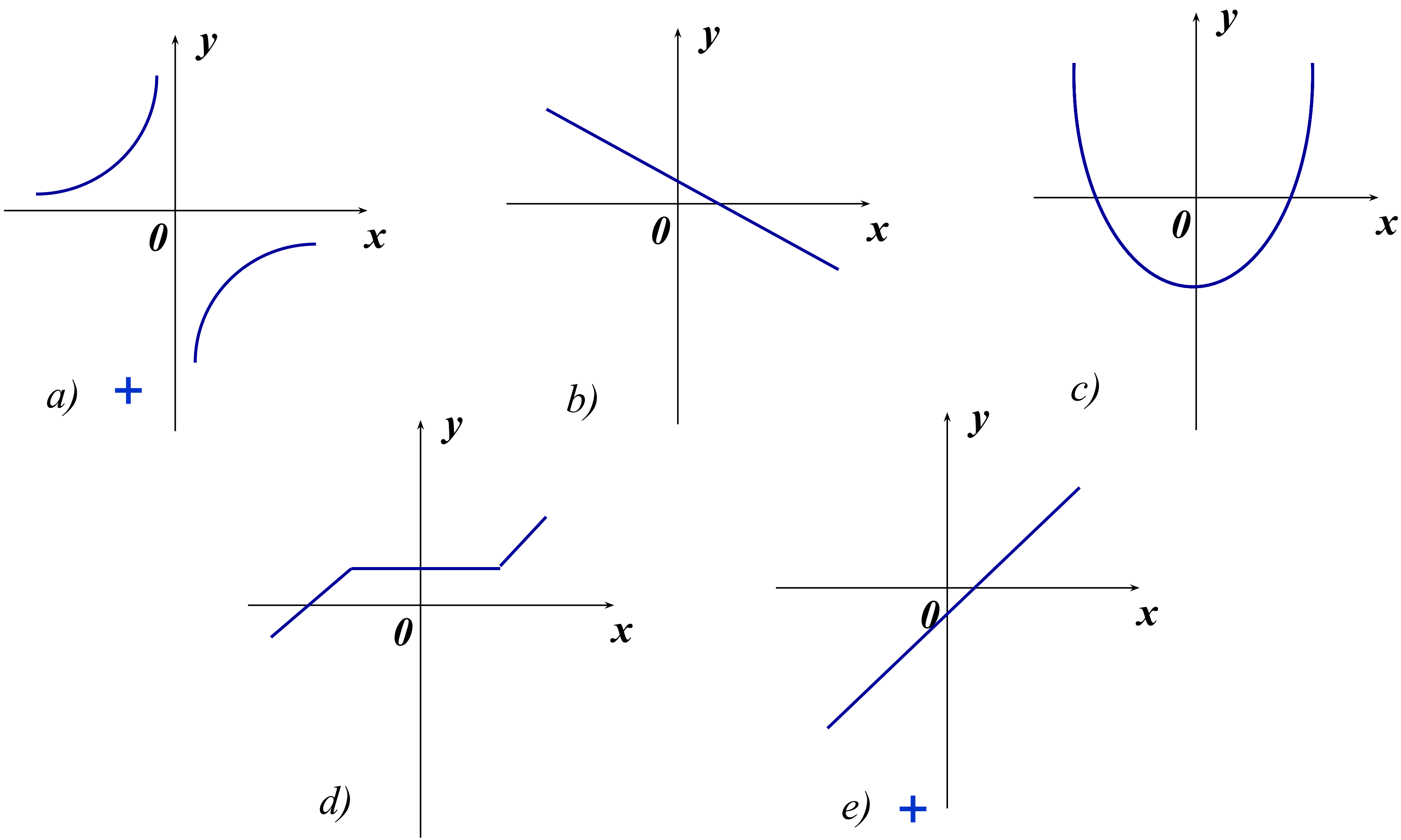
- Только возрастающие или только убывающие функции называются **монотонными**.



На каком из рисунков изображён график убывающей функции?



На каком из рисунков изображён график возрастающей функции?



По графику функции, изображённому на рисунке, укажите:

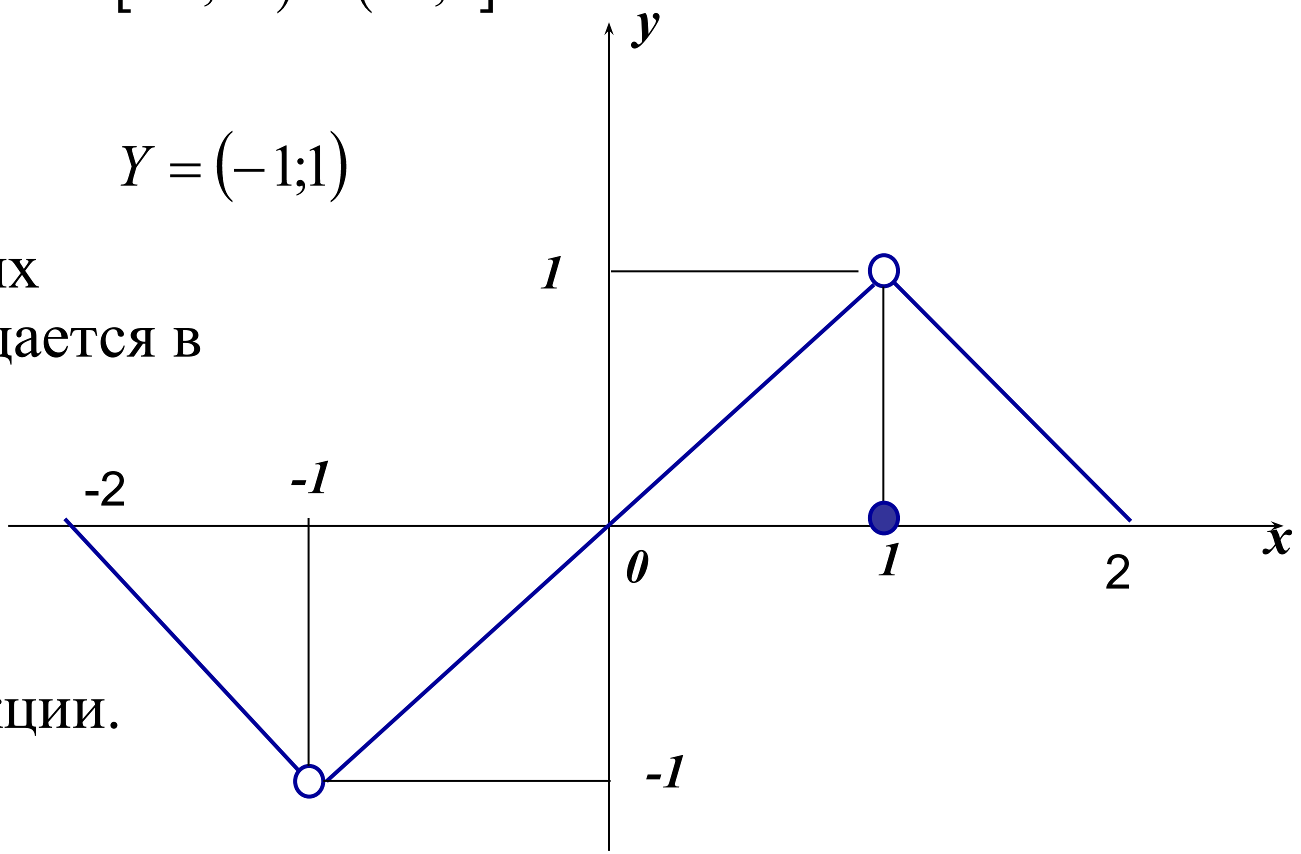
a) область её определения; $X = [-2;-1) \cup (-1;2]$

b) множество её значений; $Y = (-1;1)$

c) точки, в которых функция обращается в ноль;

$x = \pm 2;\ 0;\ 1$

d) промежутки возрастания и убывания функции.



$f(x)\uparrow\ \ x \in (-1;1)$ $\qquad$ $f(x)\downarrow\ \ x \in [-2;-1) \cup (1;2]$

По графику функции, изображённому на рисунке, укажите:

a) область её определения;

$X = (-1;0) \cup (0;+\infty)$

b) множество её значений;

$Y = (-1;+\infty)$

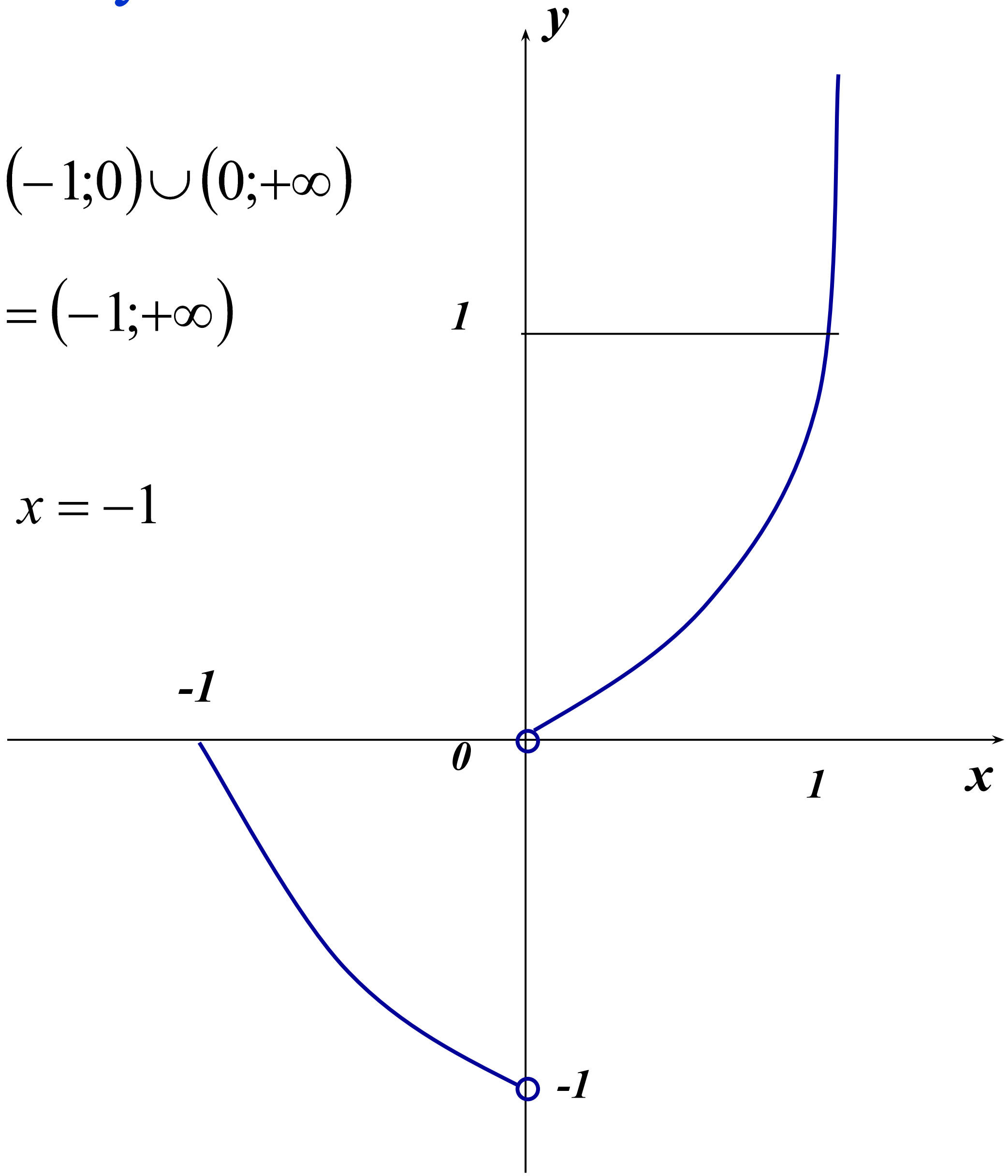
c) точки, в которых функция обращается в ноль;

$x = -1$

d) промежутки возрастания и убывания функции.

$f(x) \uparrow \quad x \in (0;+\infty)$

$f(x) \downarrow \quad x \in [-1;0)$



По графику функции, изображённому на рисунке, укажите:

a) область её определения;

$$X = [-1,5;1,5]$$

b) множество её значений;

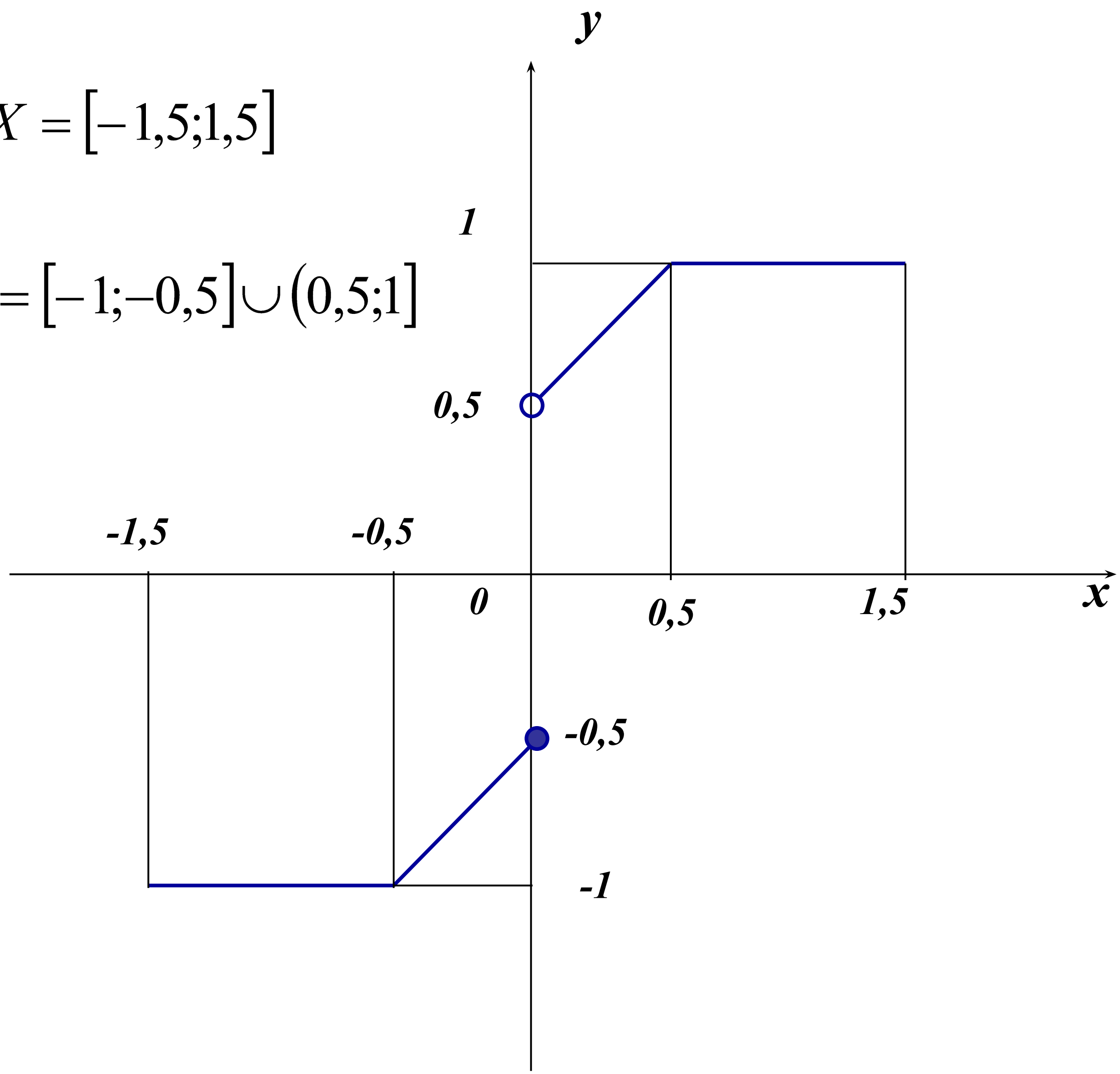
$$X = [-1;-0,5] \cup (0,5;1]$$

c) точки, в которых функция обращается в ноль;

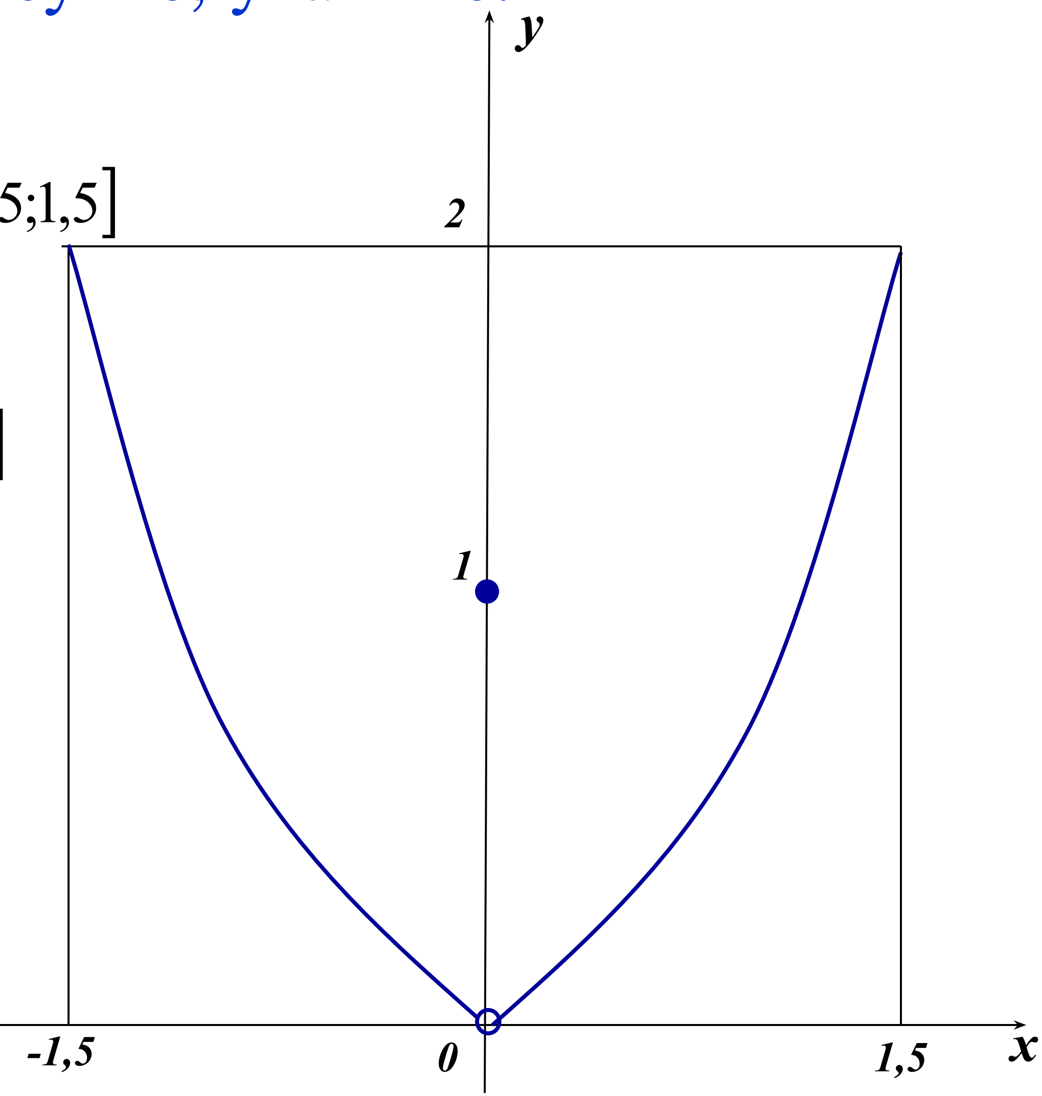
(нет)

d) промежутки возрастания и убывания функции.

$$f(x)\uparrow \ x \in [-0,5;0,5]$$



По графику функции, изображённому на рисунке, укажите:



a) область её определения; $X = [-1{,}5; 1{,}5]$

b) множество её значений; $Y = [0; 2]$

c) точки, в которых функция обращается в ноль;

(нет)

d) промежутки возрастания и убывания функции.

$f(x)\uparrow \quad x \in (0; 1{,}5]$ $\qquad f(x)\downarrow \quad x \in [-1{,}5; 0)$

Периодические функции.

- Функция $f(x)$ называется периодической, если существует такое число $T \neq 0$ (называемое периодом), что в каждой точке области определения функции $f(x)$ выполняется условие $f(x+T)=f(x)$

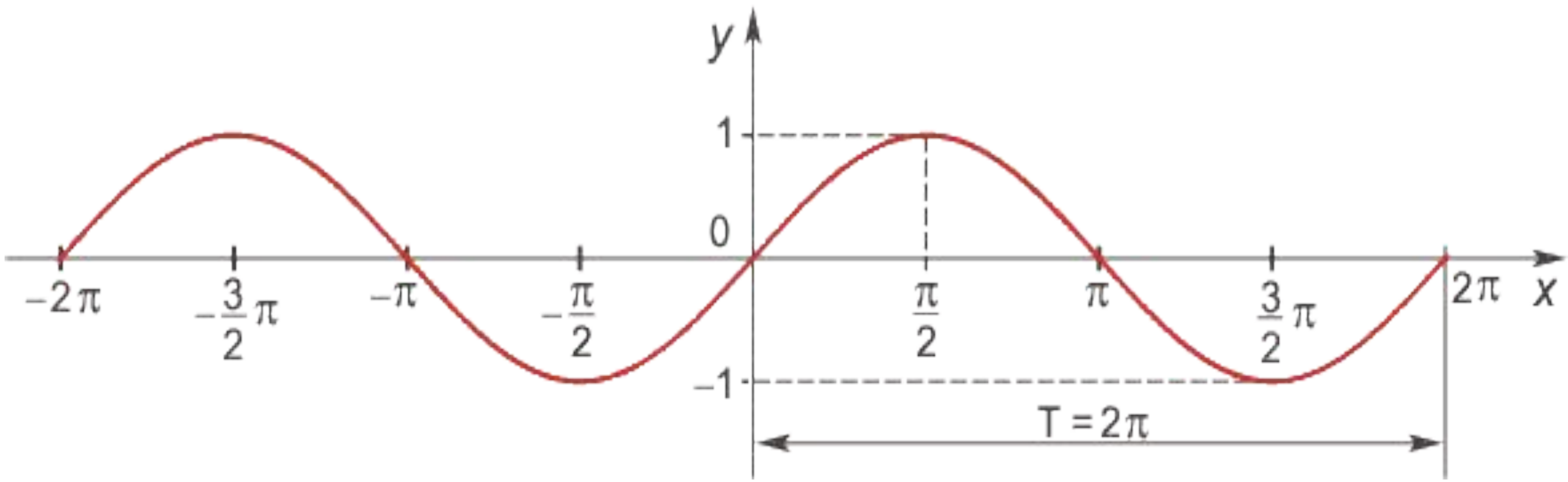
Например: $y=sinx$ и $y=tanx$ - периодические

$$T_{\sin x} = 2\pi \qquad \sin(x+2\pi) = \sin x$$

$$T_{\tan x} = \pi \qquad \tan(x+\pi) = \tan x$$

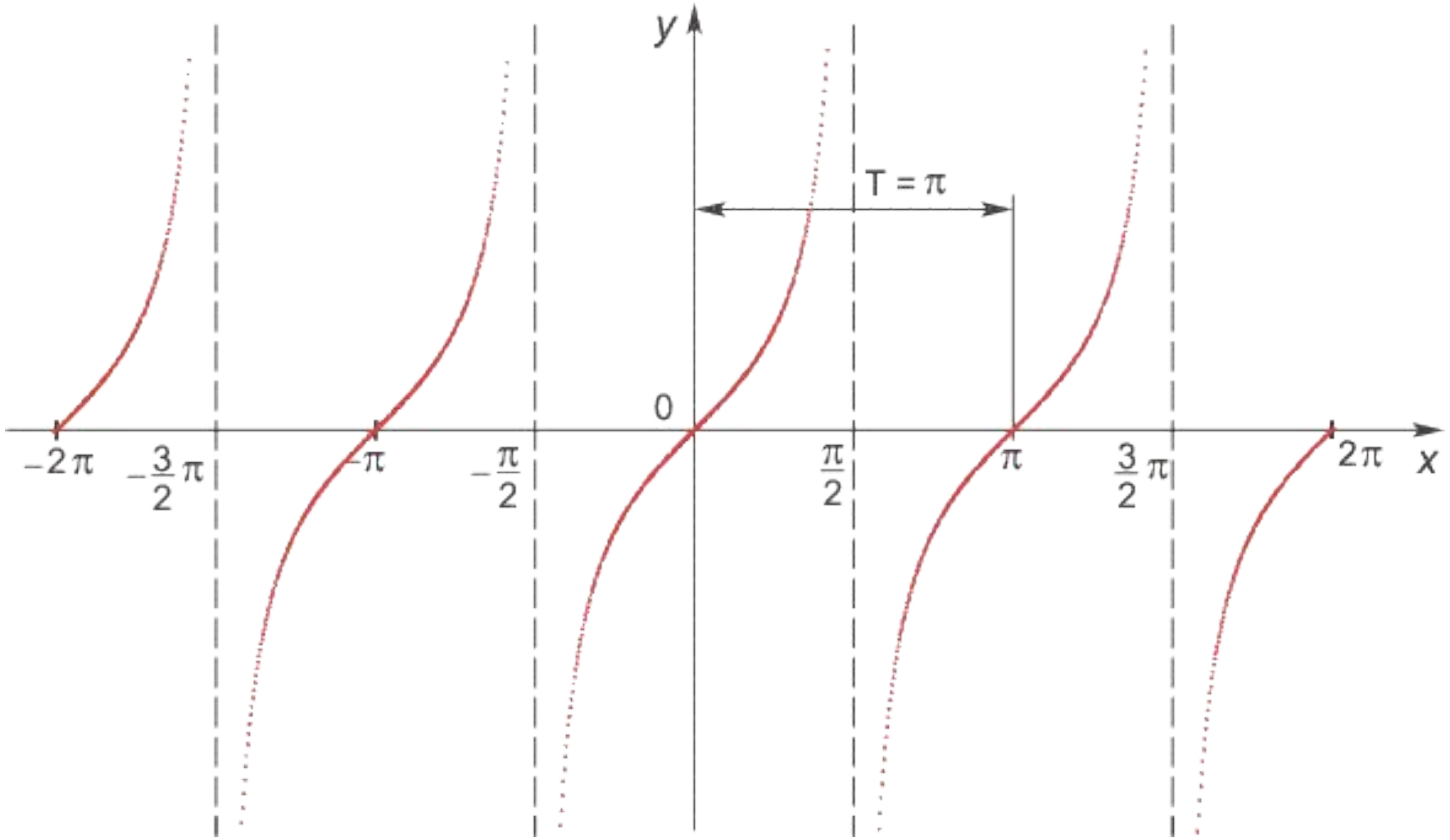
$y = \sin x$

- *График функции –* ***синусоида***
- $\sin(-x) = -\sin(x)$
- $\sin(x + 2\pi k) = \sin x$



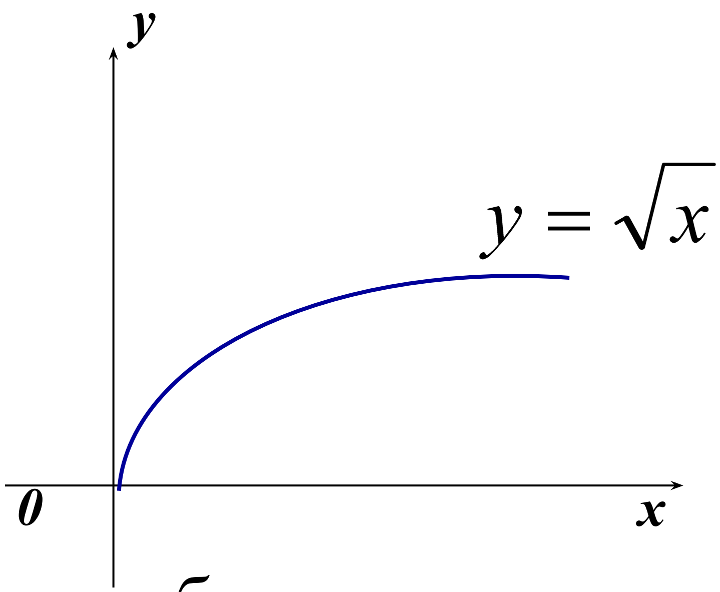
$y = tan\ x$

- *График функции –* ***тангенсоида***
- *tan (-x) = - tan x*
- *tan (x+πk) = tan x*

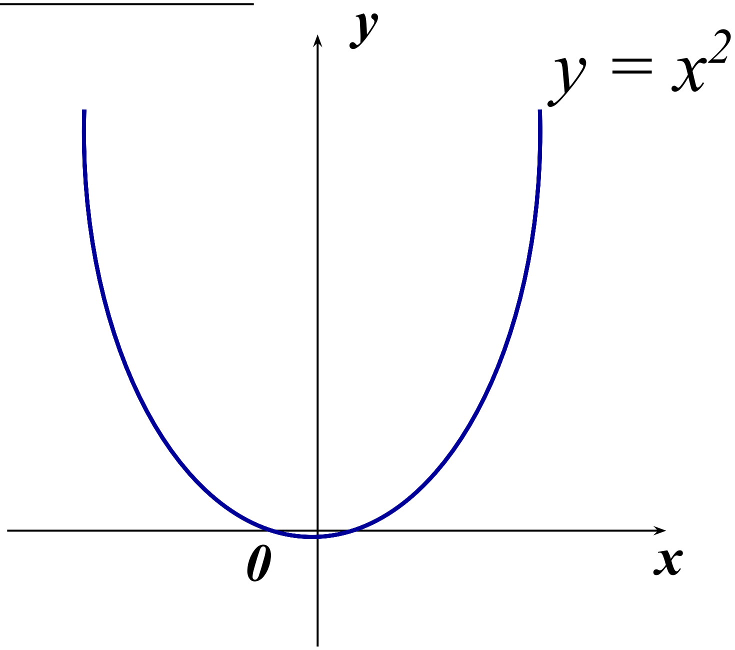


4.Обратные функции

- Функция называется **обратимой**, если <u>каждое значение y</u> поставлено в соответствие <u>единственному x</u>.

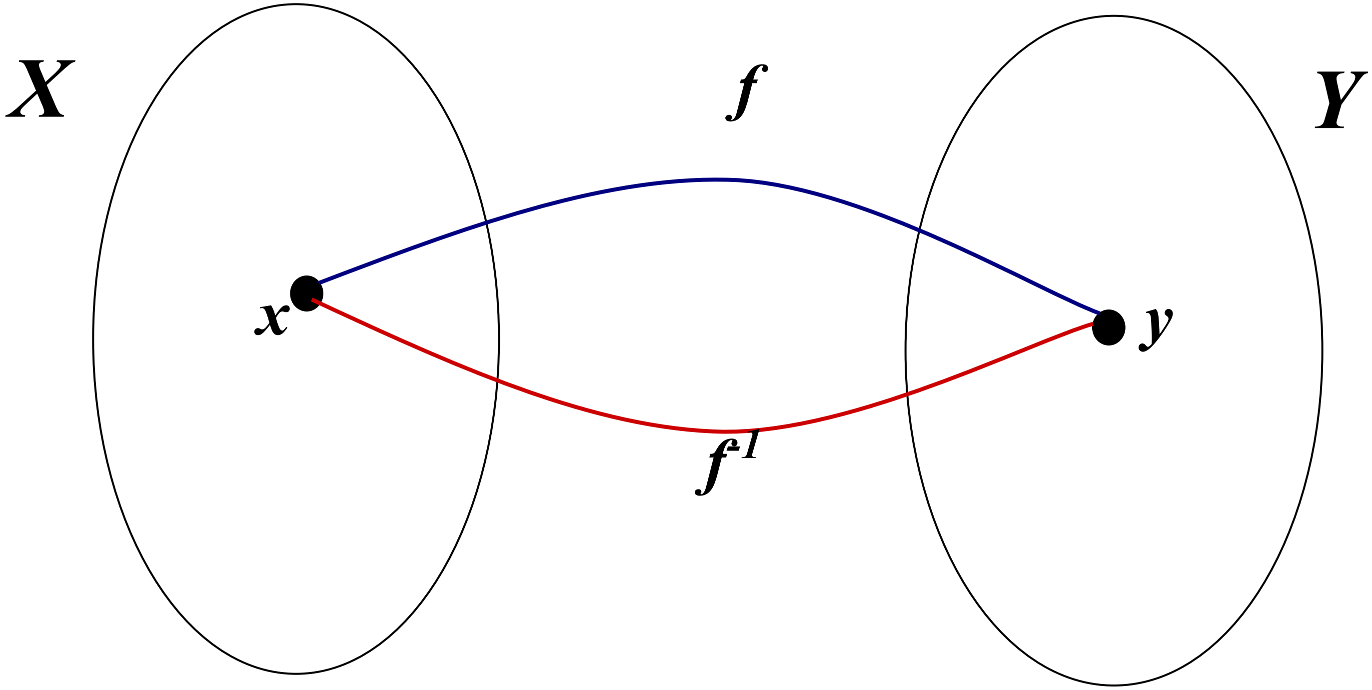


обратима



необратима

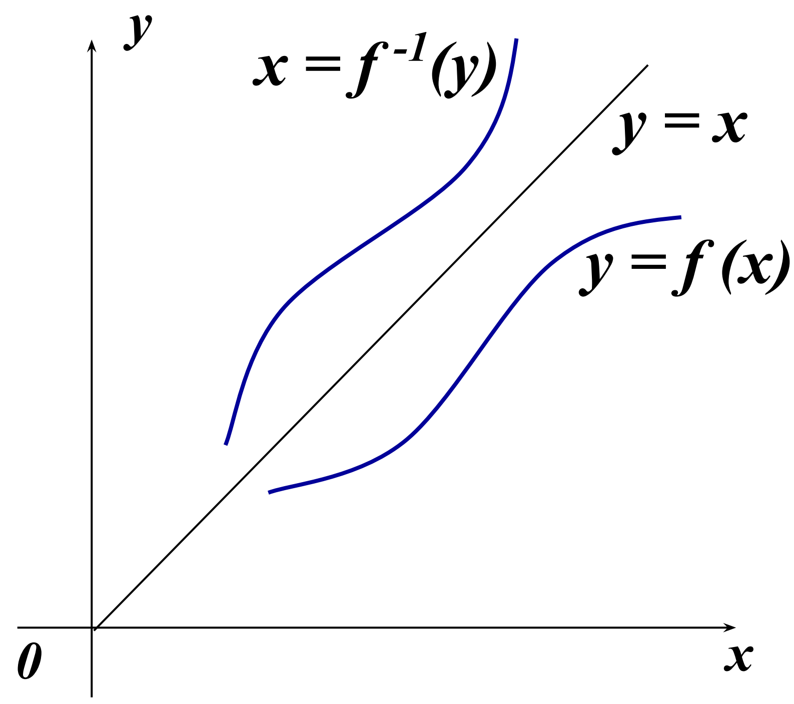
- Пусть функция $f: X \to Y$ обратима. Тогда на множестве Y определена функция $f^{-1}: Y \to X$, которая каждому $y \in Y$ ставит в соответствие единственный $x \in X$



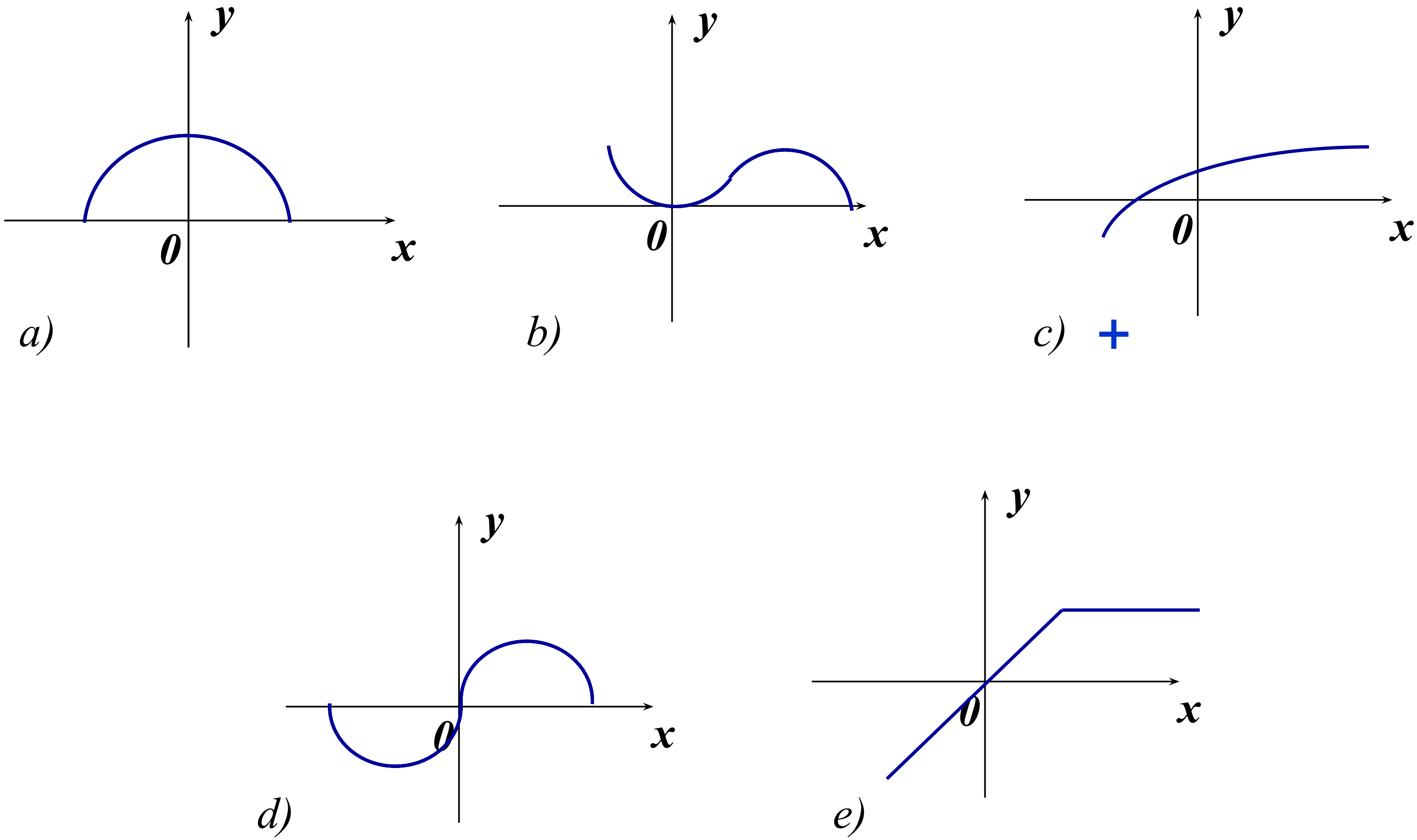
- Функция $f^{-1}: Y \to X$ называется обратной функцией к функции $f: X \to Y$.

- $f^{-1}: Y \to X$ и $f: X \to Y$ взаимнообратные.

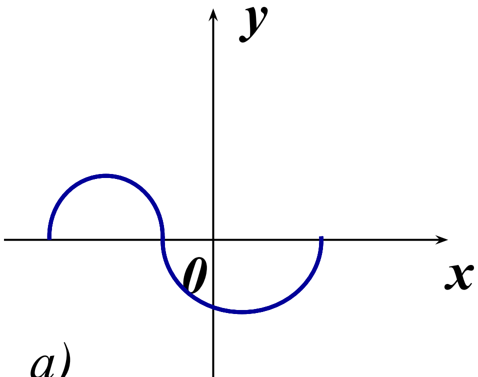
Графики взаимообратных функций симметричны относительно прямой $y = x$.



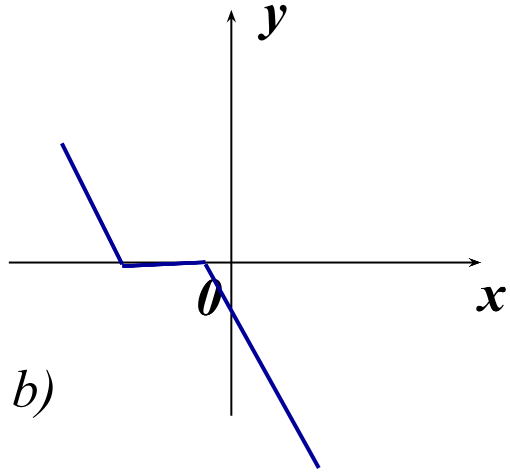
На каком из рисунков изображён график обратимой функции?



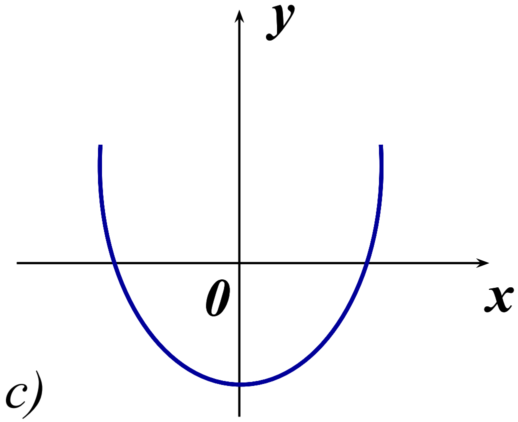
На каком из рисунков изображён график обратимой функции?



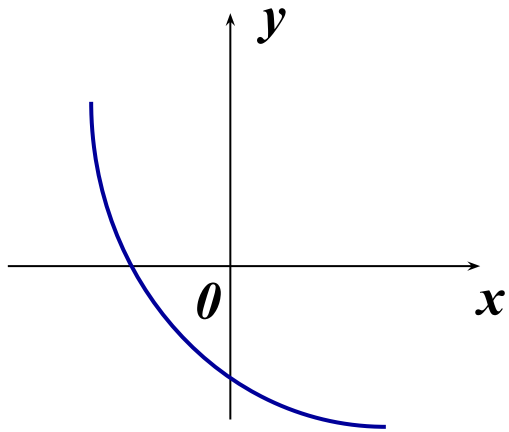
a)



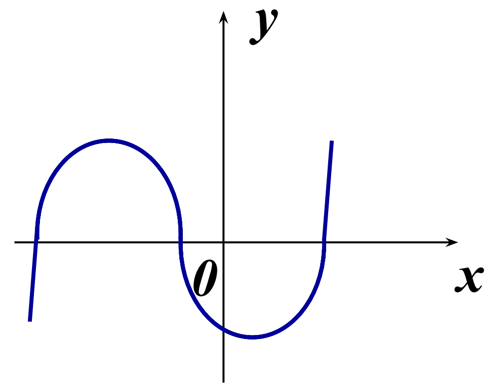
b)



c)



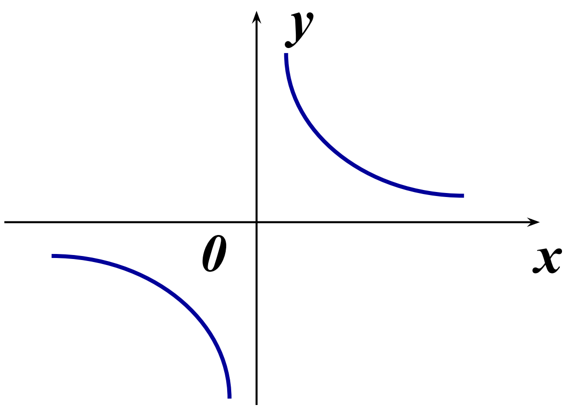
d) +

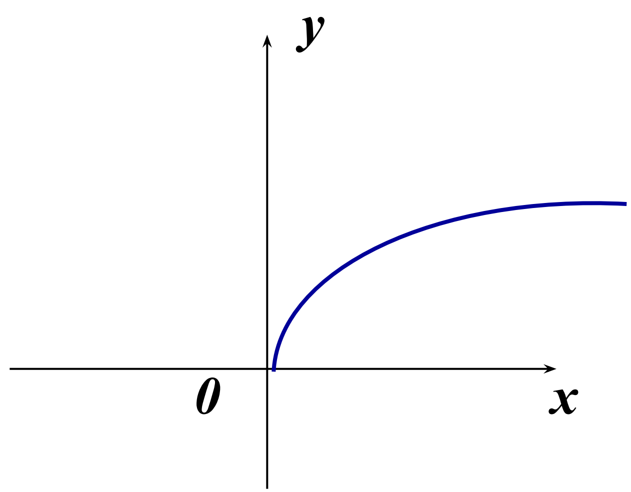


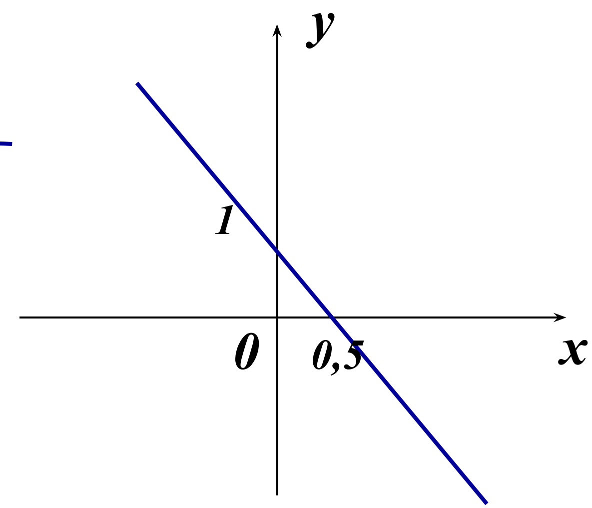
e)

Какая из функций необратима?

a) $y = \dfrac{2}{x}$ *b)* $y = \sqrt{x}$ *c)* $y = -2x+1$

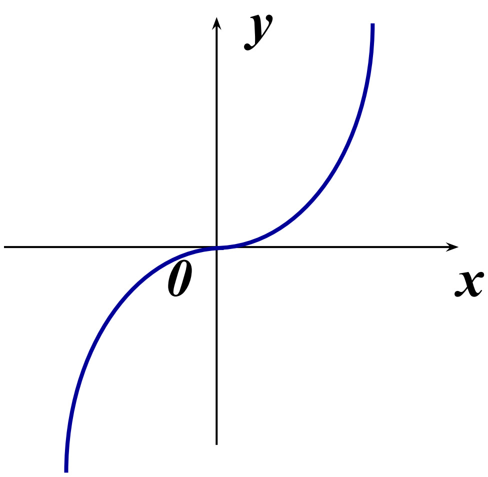


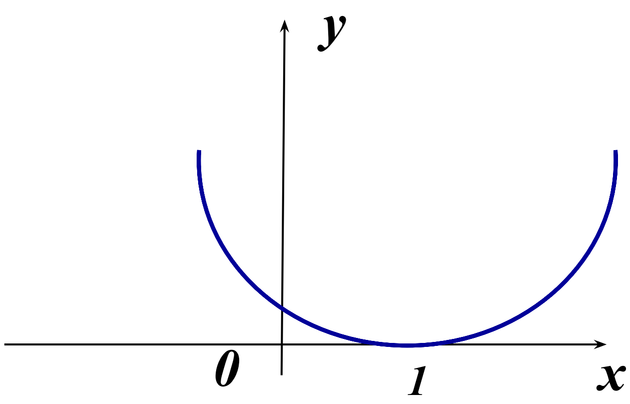


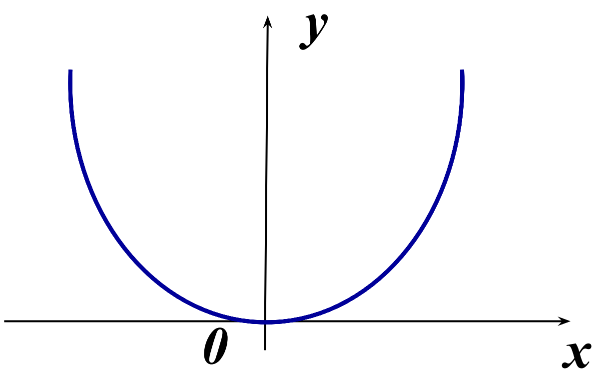


Какая из функций необратима?

$d)\ y = x^3$ $e)\ y = (x\text{-}1)^2$ $f)\ y = x^2$



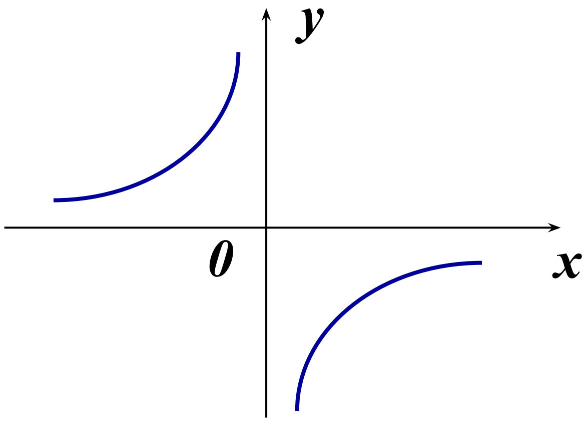


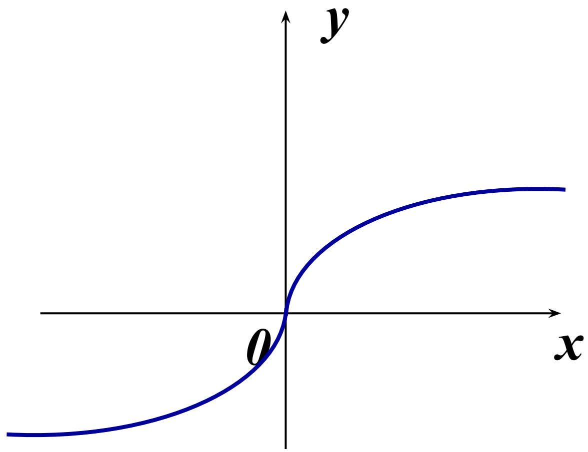


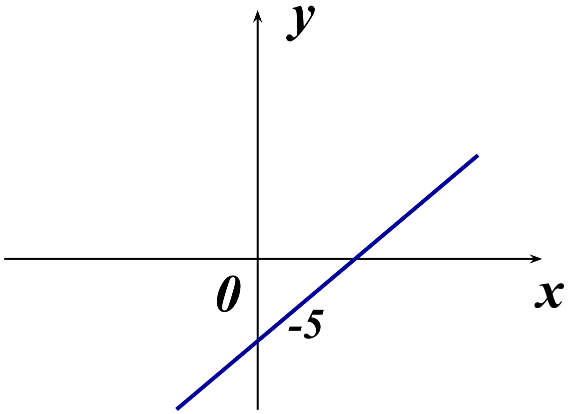
+ +

Какая из функций необратима?

$g)\ y = -\dfrac{1}{x}$ $h)$ $\qquad i)\ y = \sqrt[3]{x}$ $\quad y = 3x - 5$







15. Найти обратную функцию для функции:

$$f(x) = 2x - 1$$

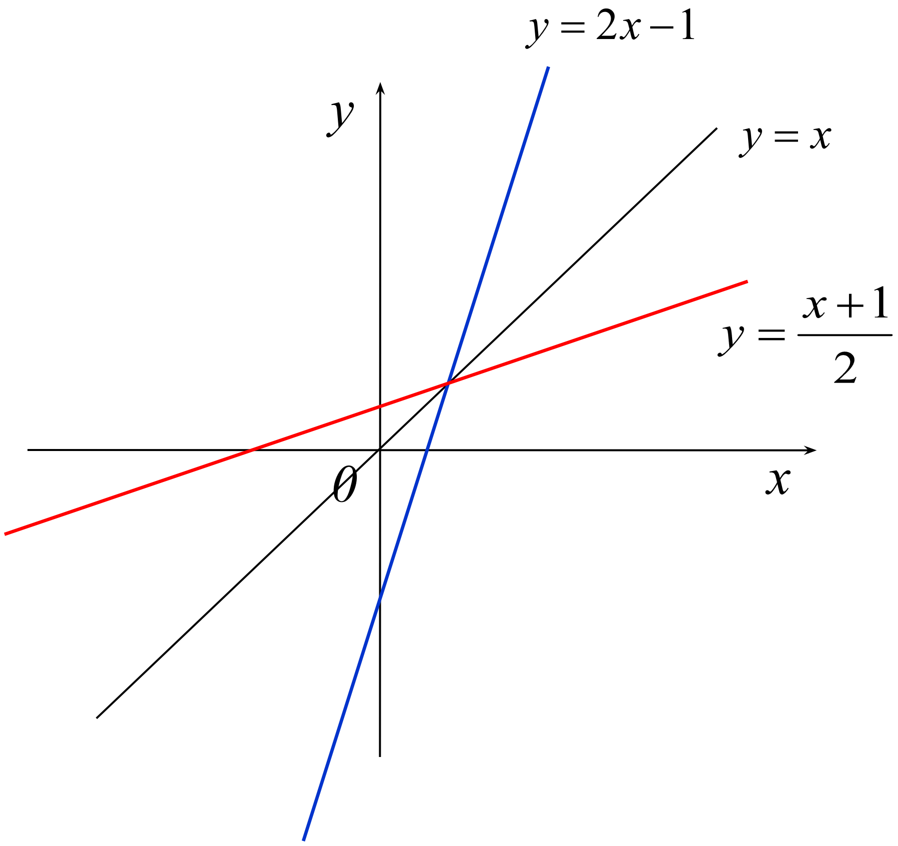
$$y = 2x - 1$$

$$2x = y + 1$$

$$x = \frac{y+1}{2}$$

или

$$y = \frac{x+1}{2}$$



16. Найти обратную функцию для функции:

$$f(x) = x^2, \quad x \in [0; +\infty)$$

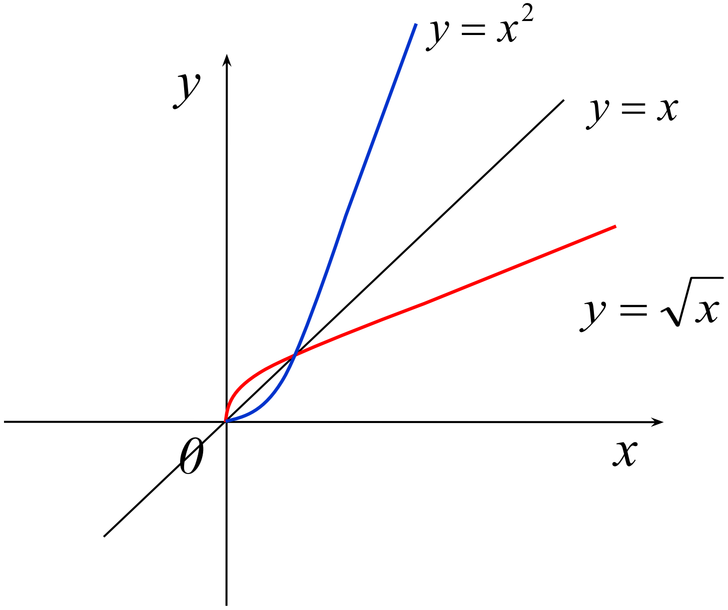
$$y = x^2$$

$$x = \pm\sqrt{y}$$

$$x = \sqrt{y} \qquad (\text{так как} \quad x \geq 0)$$

или

$$y = \sqrt{x}, \quad x \in [0; +\infty)$$

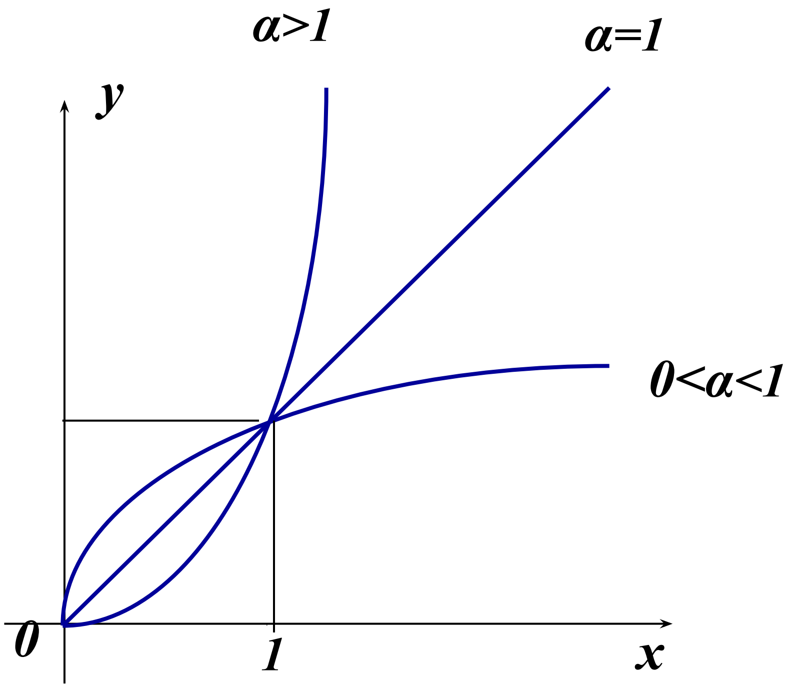


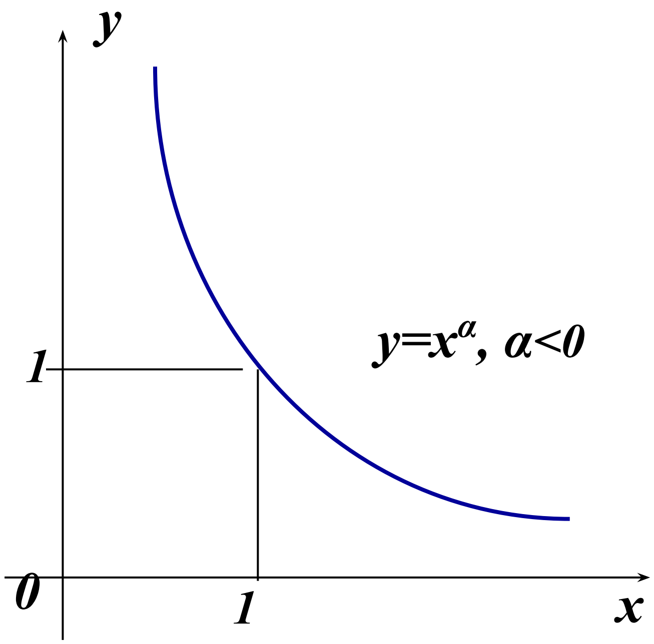
5. Основные элементарные функции

- Степенная функция.
- Показательная функция
- Логарифмическая функция
- Тригонометрические функции
- Обратные тригонометрические функции

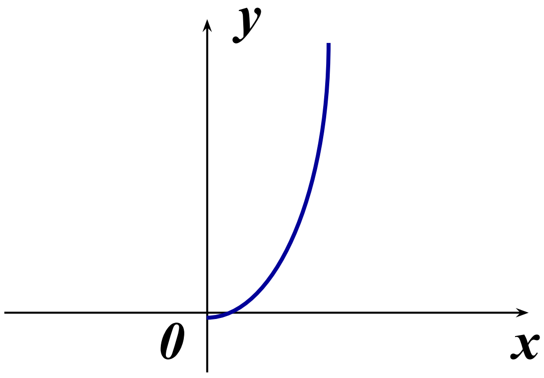
1. Степенная функция

- $y = x^{\alpha}, \alpha \in R$

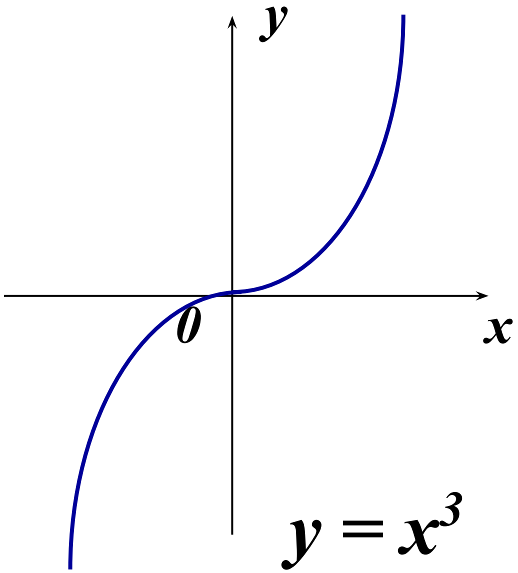




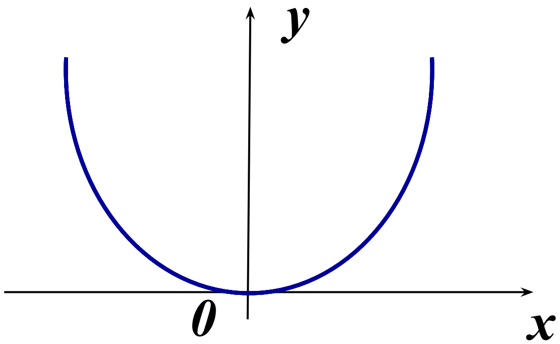
$\alpha > 1$



$y = x^{3/2}$

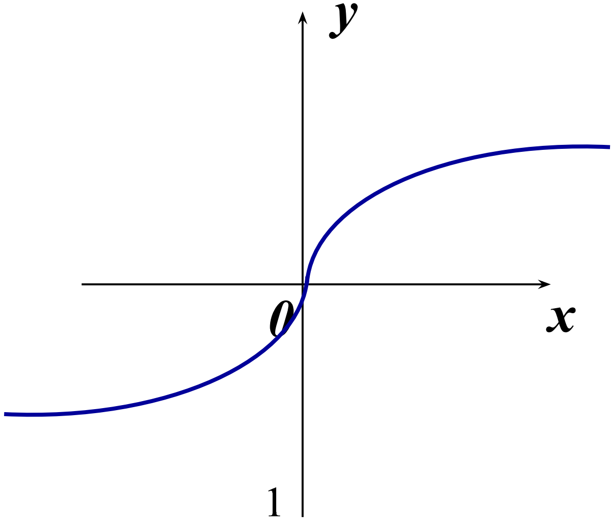


$y = x^3$

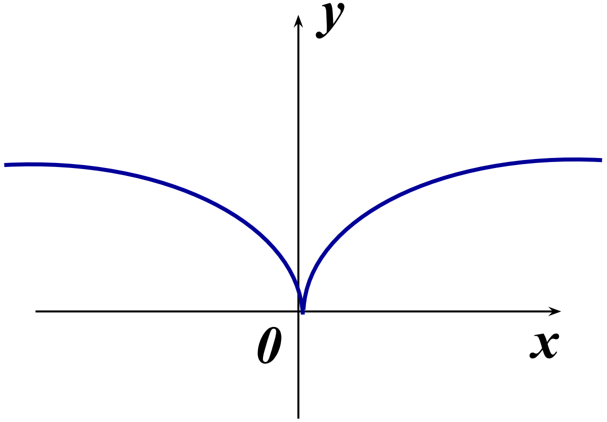


$y = x^2$

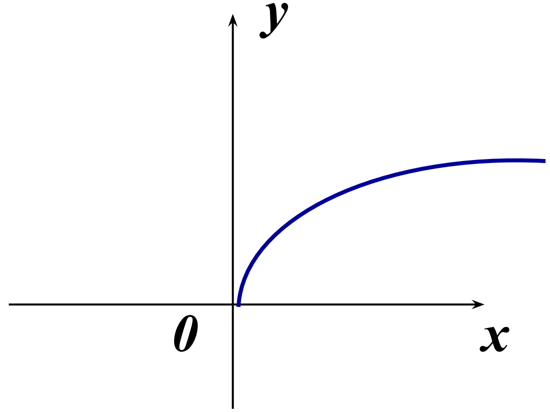
$0 < \alpha < 1$



$$y = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$$

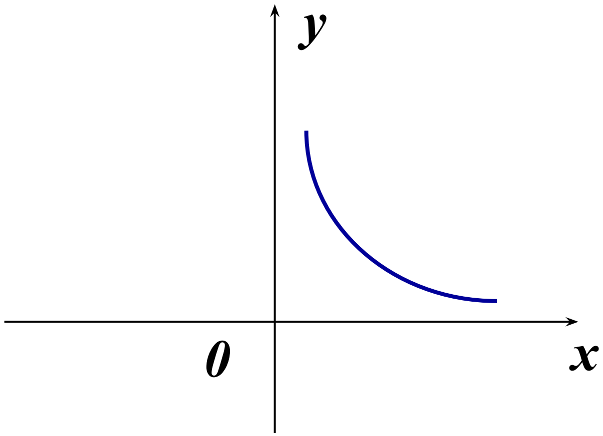


$$y = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$$

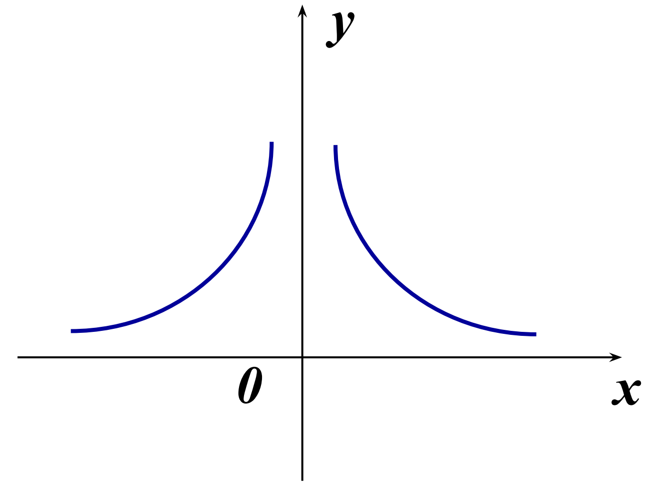


$$y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

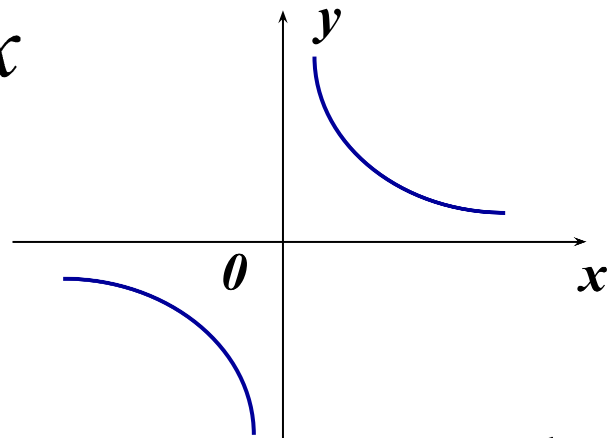
$\alpha < 0$



$$y = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$



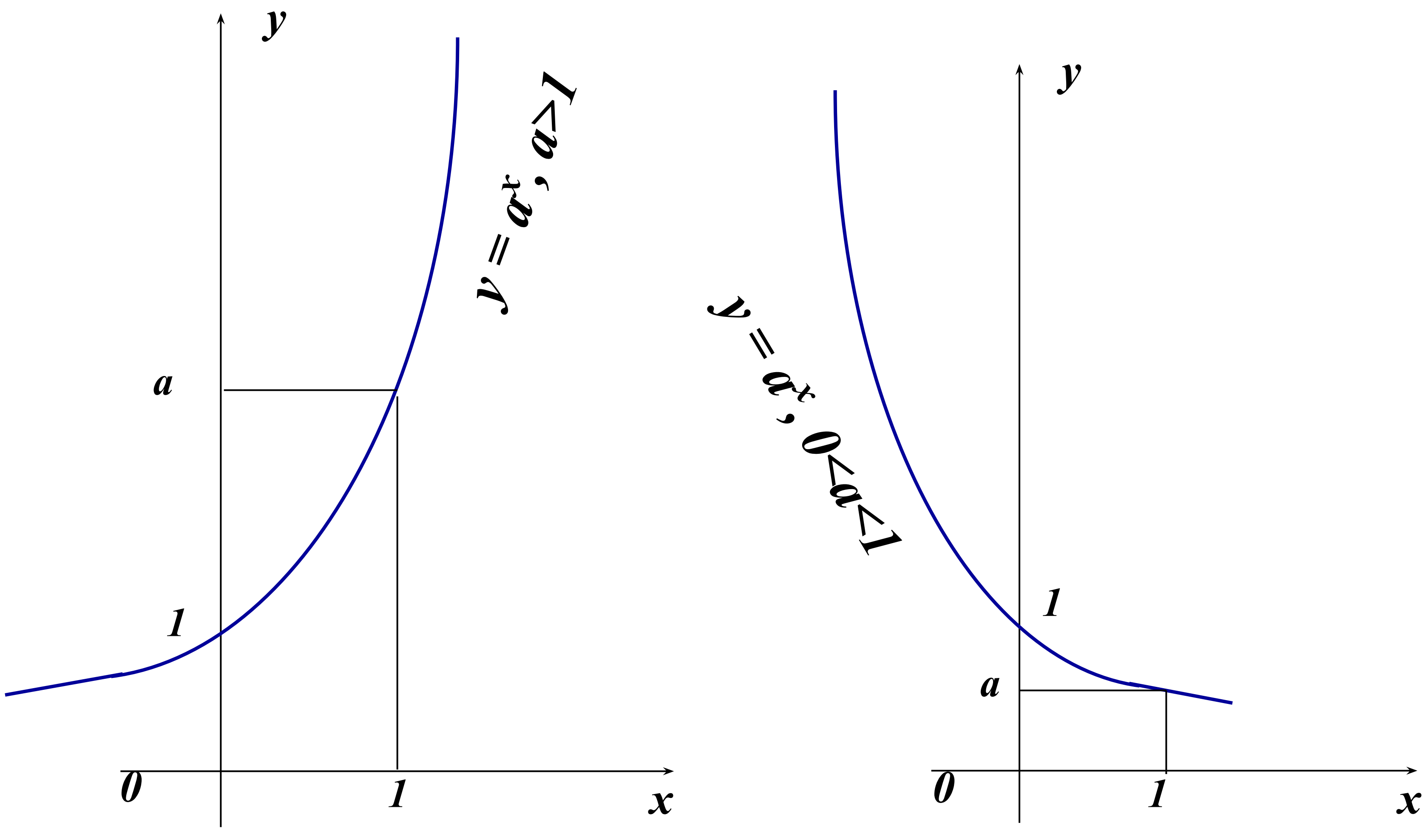
$$y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

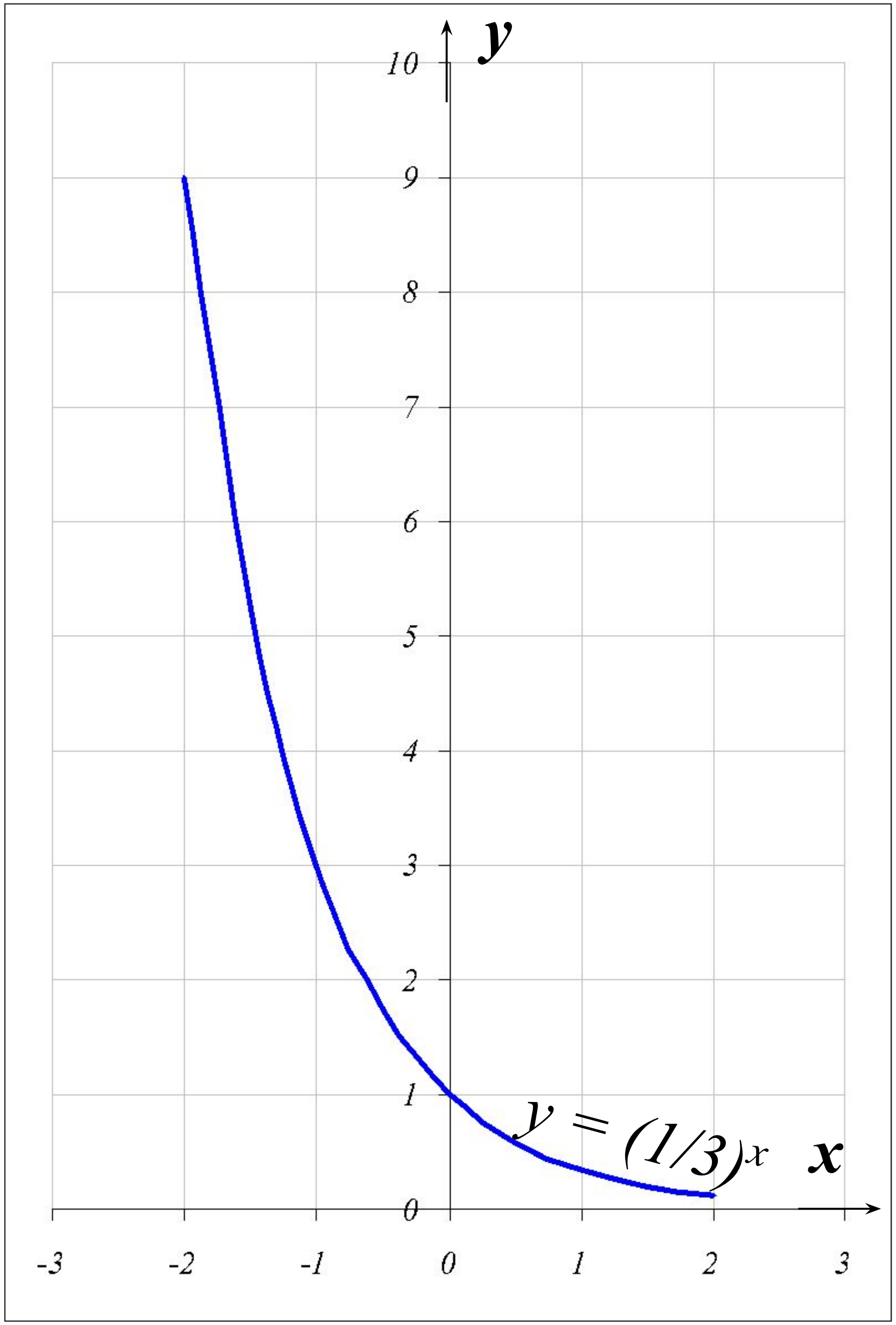


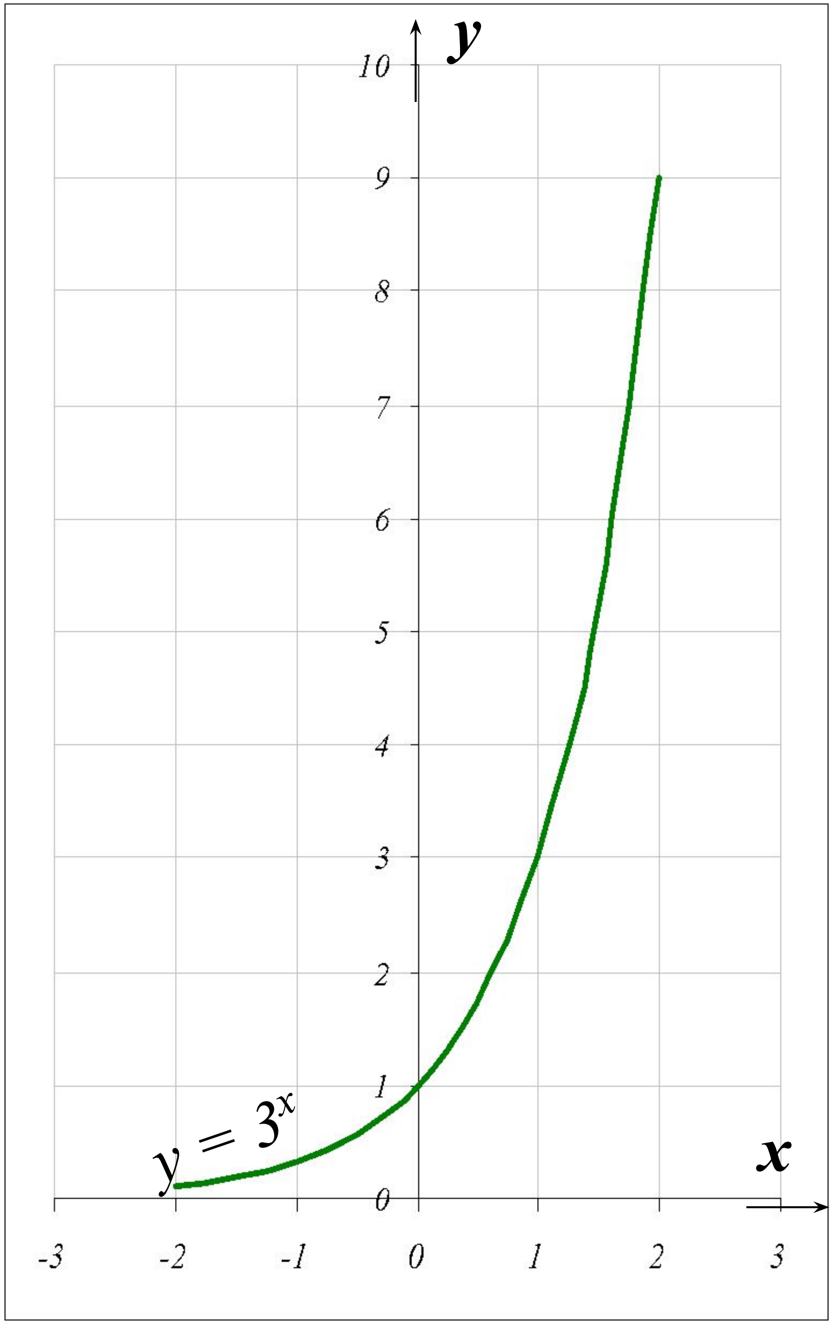
$$y = x^{-1} = \frac{1}{x}$$

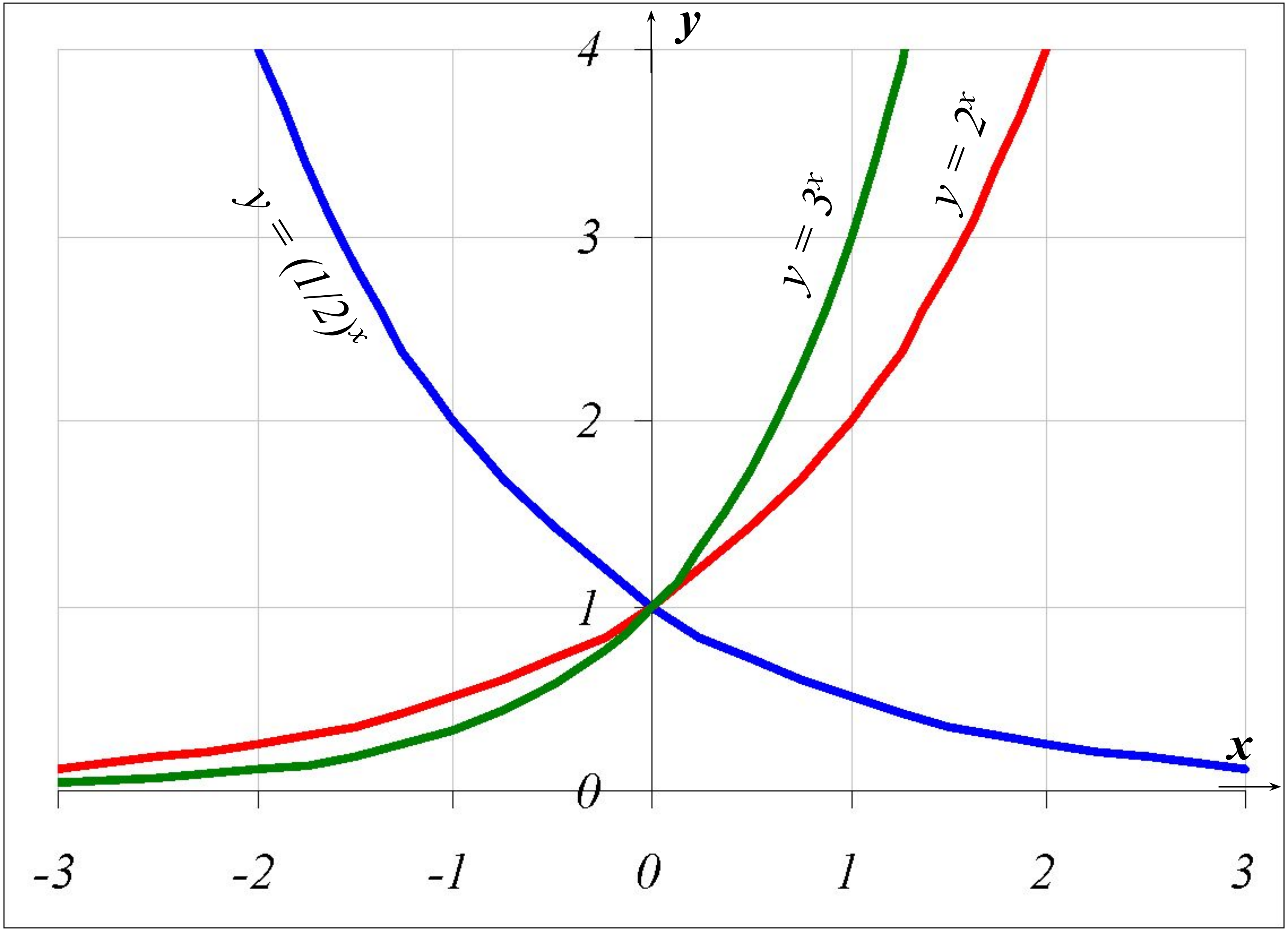
2). Показательная функция

- $y = a^x,\ a>0,\ a\neq 1$




y
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-3
-2
-1
0
1
2
3
x
y = (1/3)^x

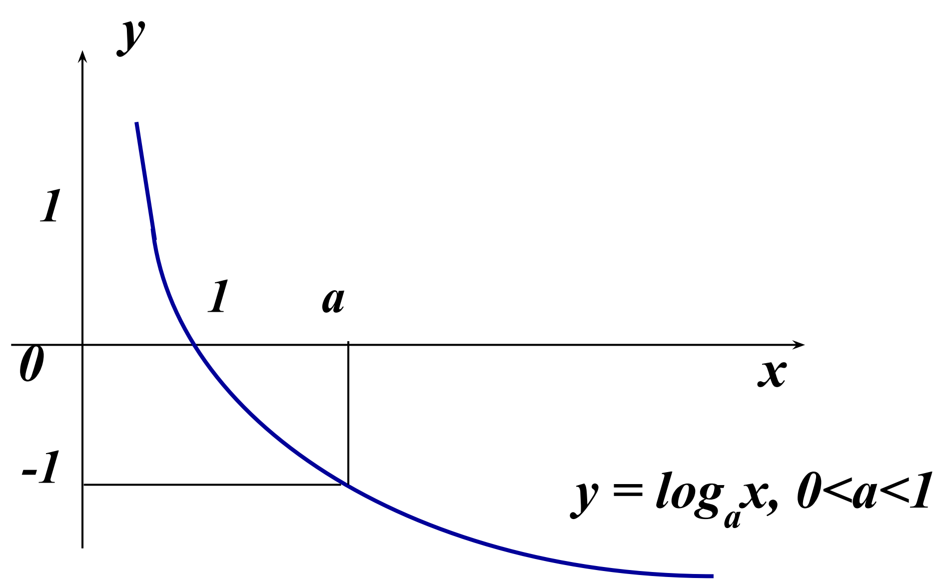

y
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-3
-2
-1
0
1
2
3
x
y = 3^x

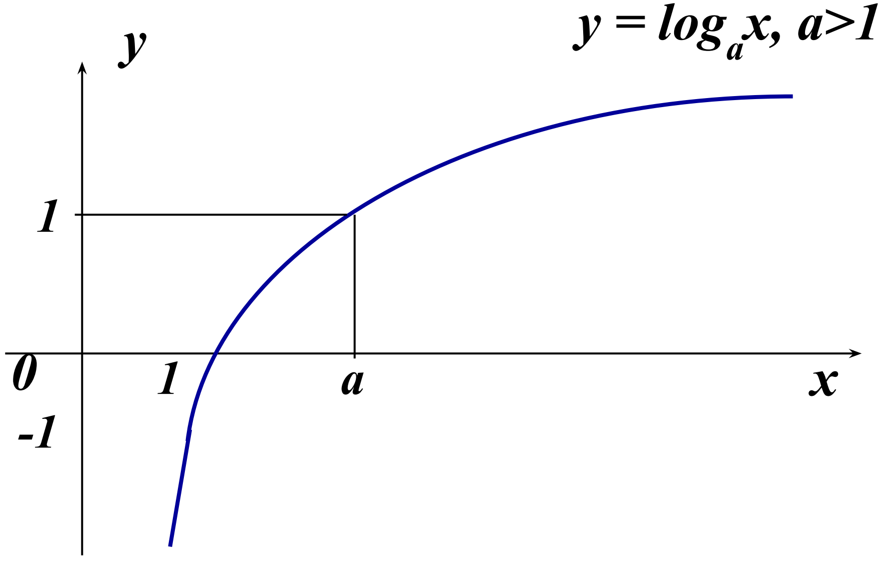


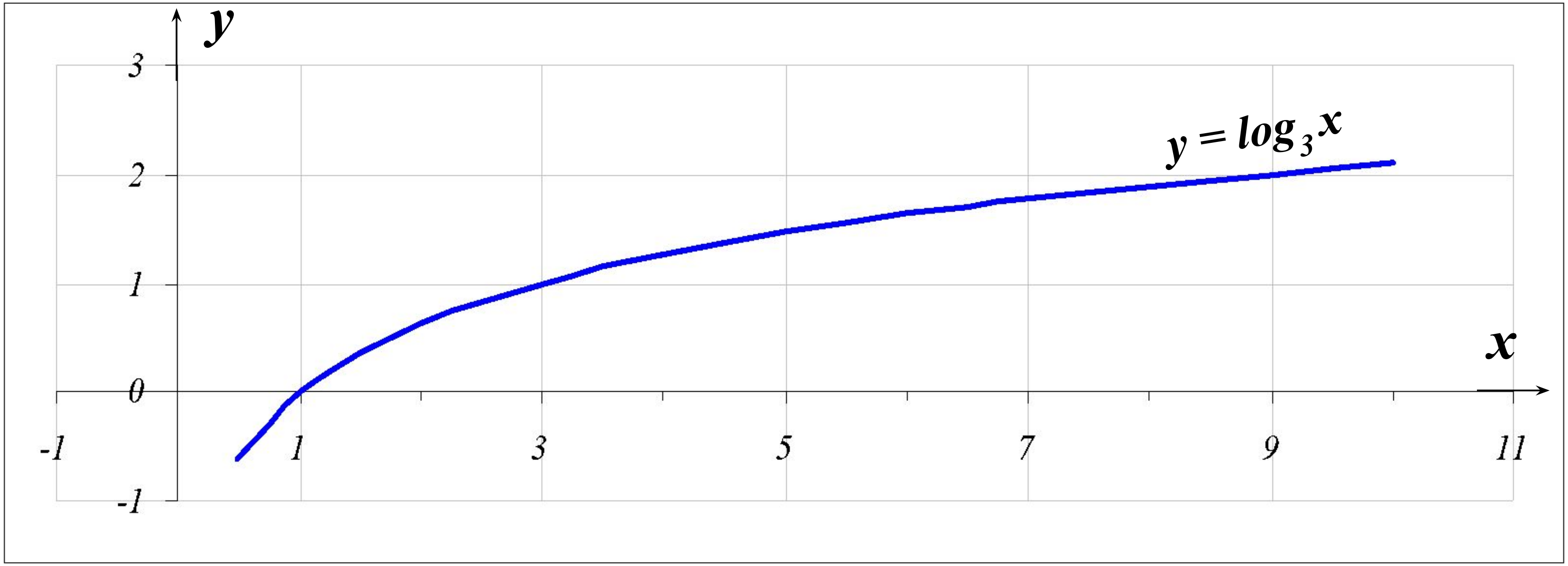
y
x
4
3
2
1
0
-3
-2
-1
0
1
2
3
y = (1/2)^x
y = 3^x
y = 2^x

3). Логарифмическая функция

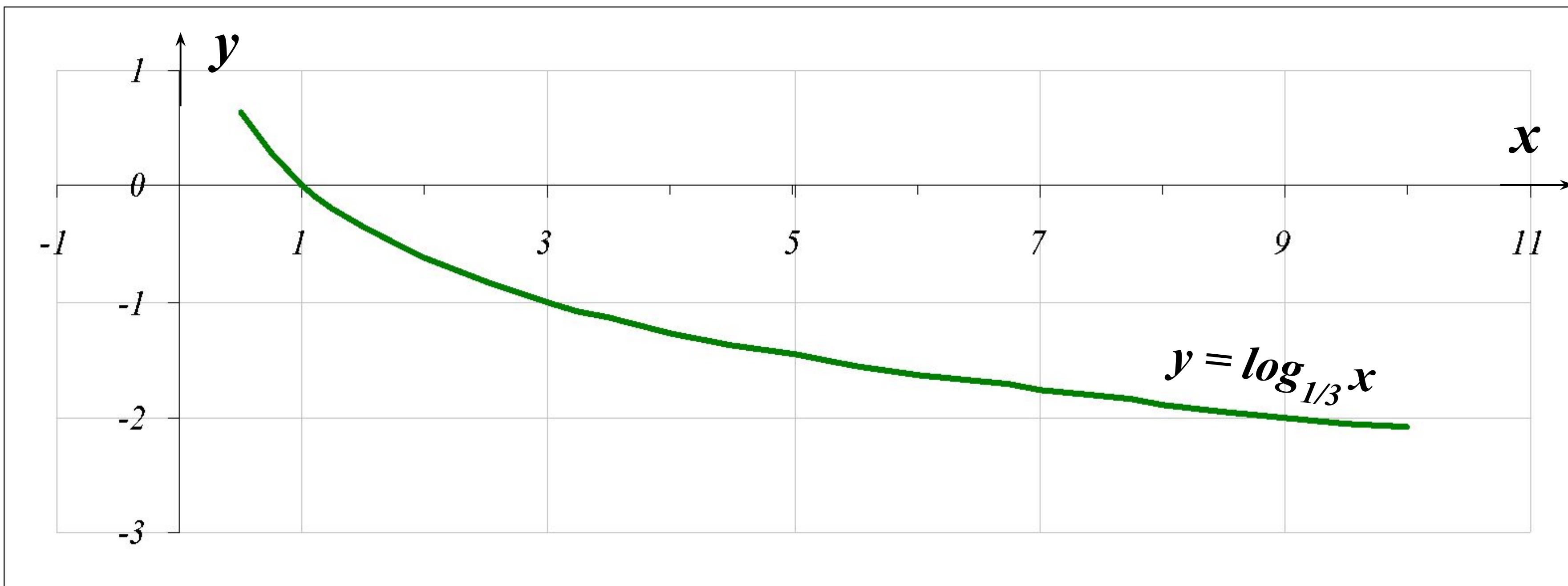
- $y=\log_a x,\ a>0,\ a\neq 1$





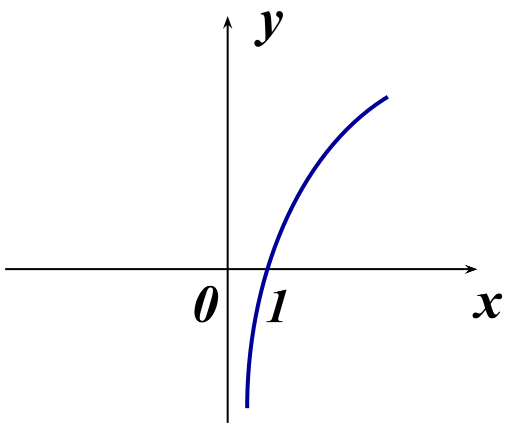


y
3
2
1
0
-1
x
-1
1
3
5
7
9
11
y = log3x

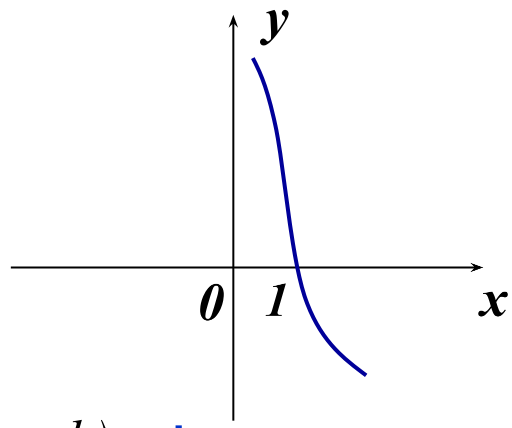


y
1
0
-1
-2
-3
x
-1
1
3
5
7
9
11
y = log1/3x

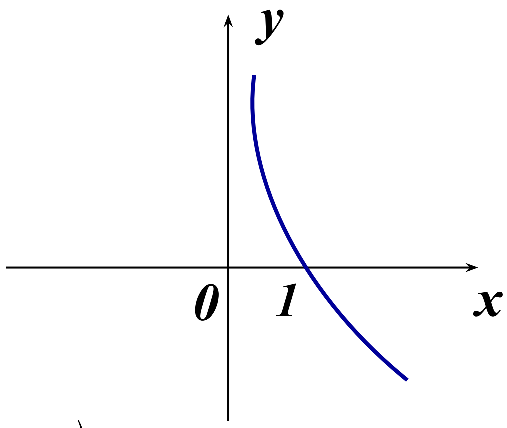
Какие из следующих графиков и по какой причине не могут быть графиками функции $y=log_a x$, если $0<a<1$?



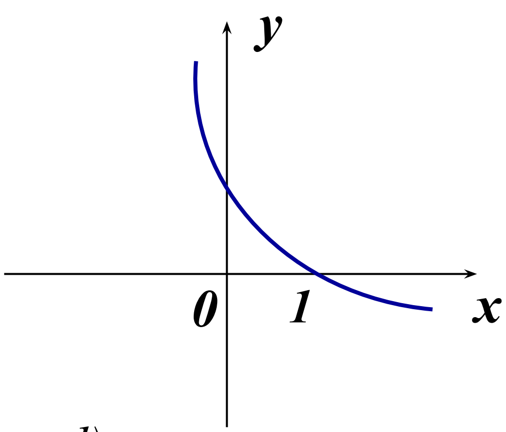
a) +



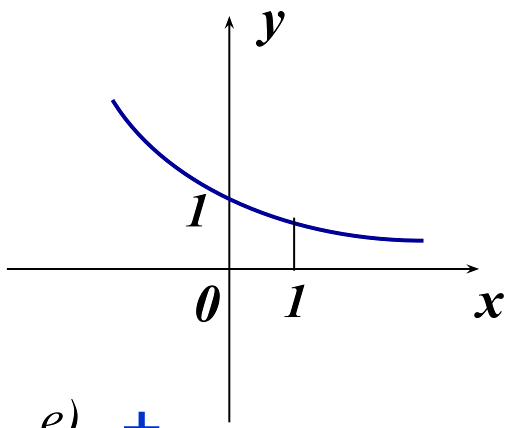
b) +



c)

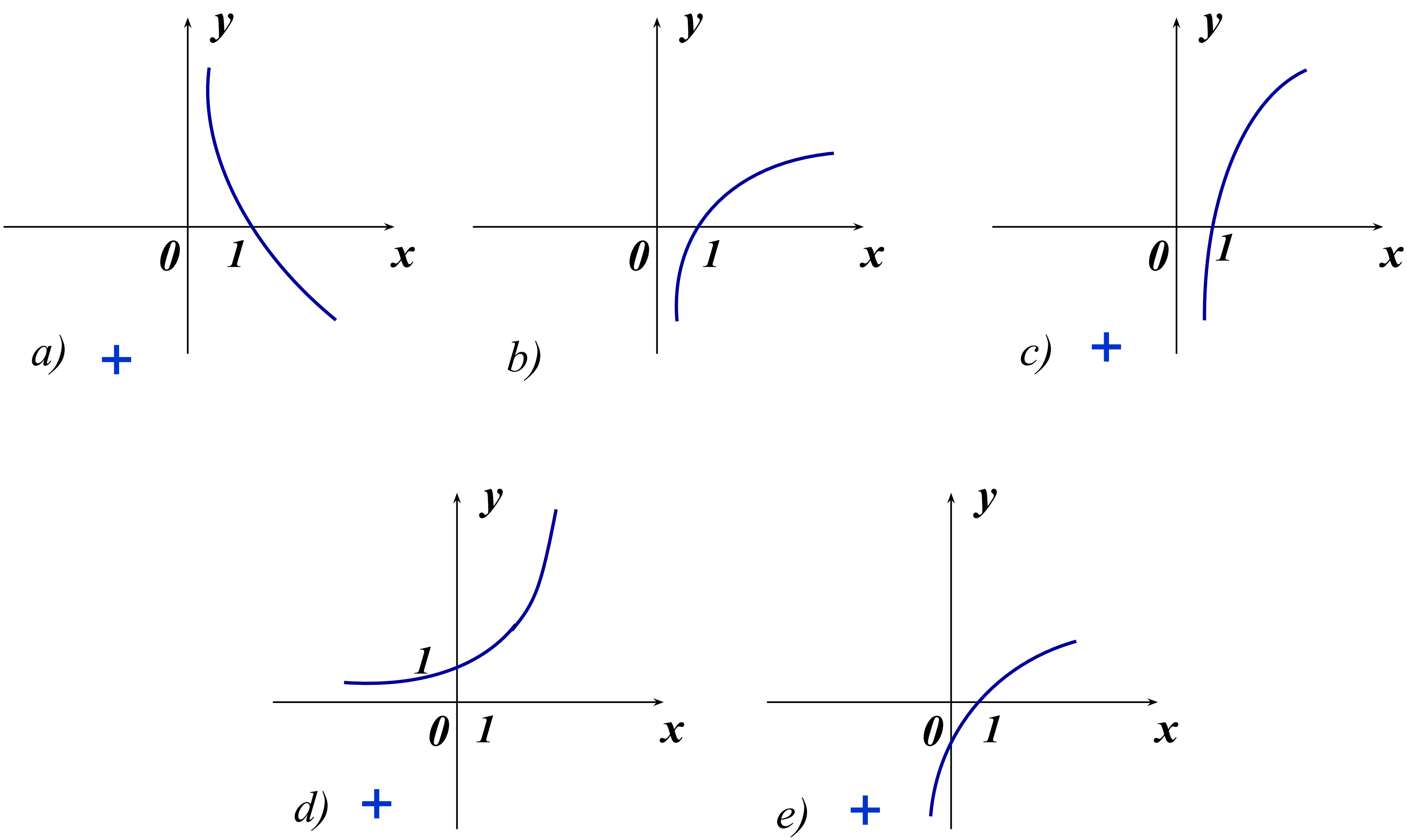


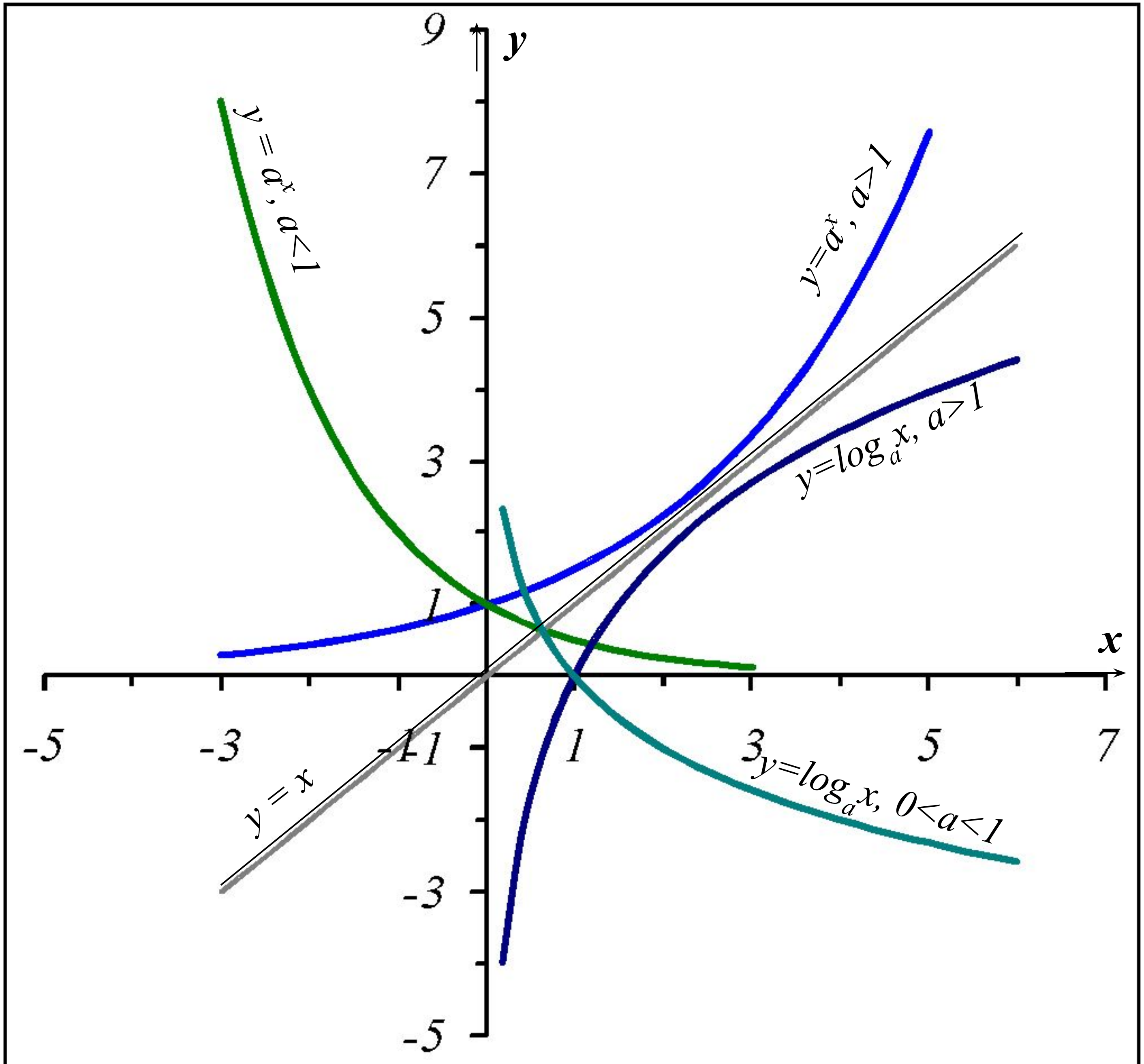
d) +



e) +

Какие из следующих графиков и по какой причине не могут быть графиками функции $y=log_a x$, если $a>1$?





y
x
9
7
5
3
1
-1
-3
-5
-5
-3
-1
1
3
5
7
y = a^x, a<1
y=a^x, a>1
y=log_a x, a>1
y=log_a x, 0<a<1
y = x

4). Тригонометрические функции

$$y = sin\ x$$

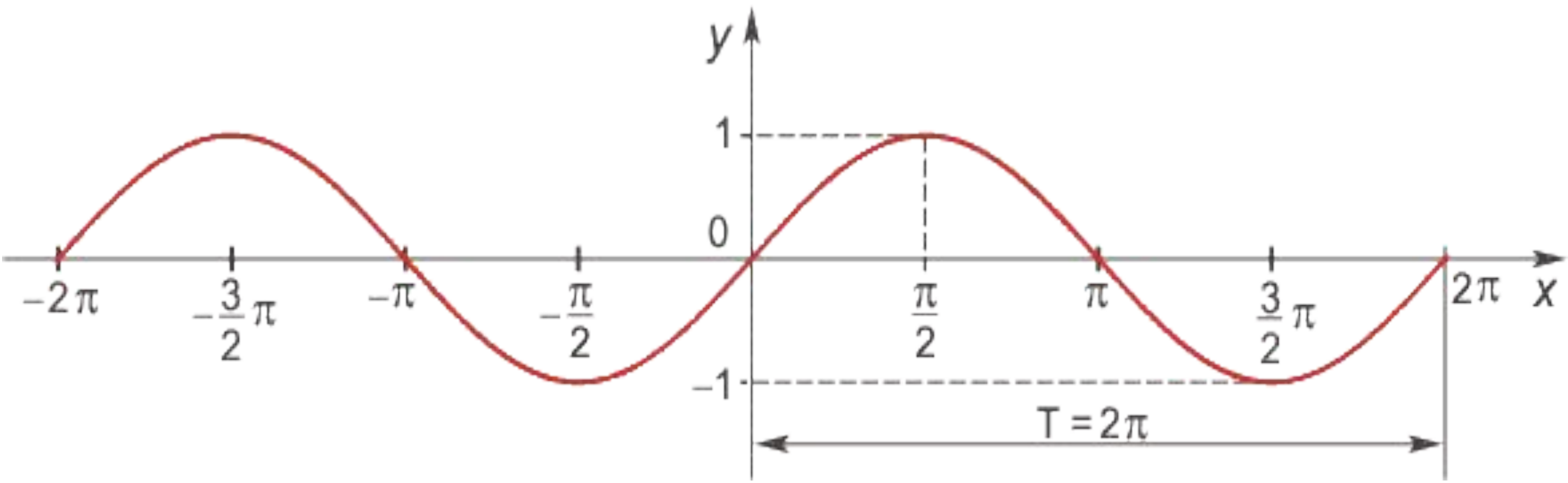
$$y = cos\ x$$

$$y = tan\ x$$

$$y = cot\ x$$

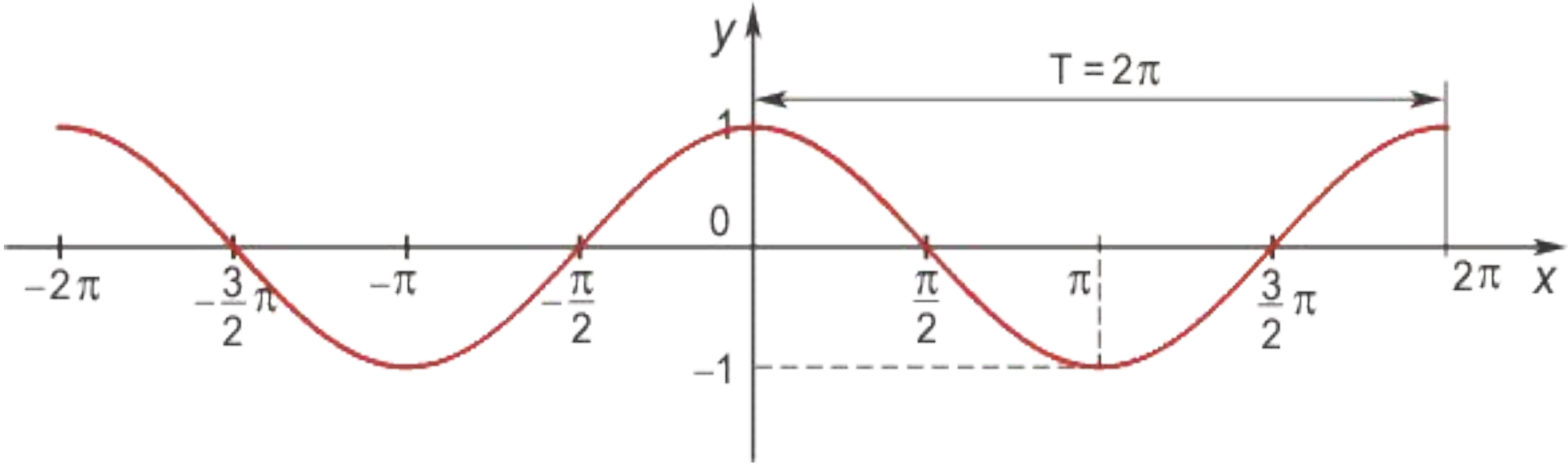
$y = \sin x$

- *График функции* – ***синусоида***
- $\sin(-x) = -\sin(x)$
- $\sin(x+2\pi k) = \sin x$



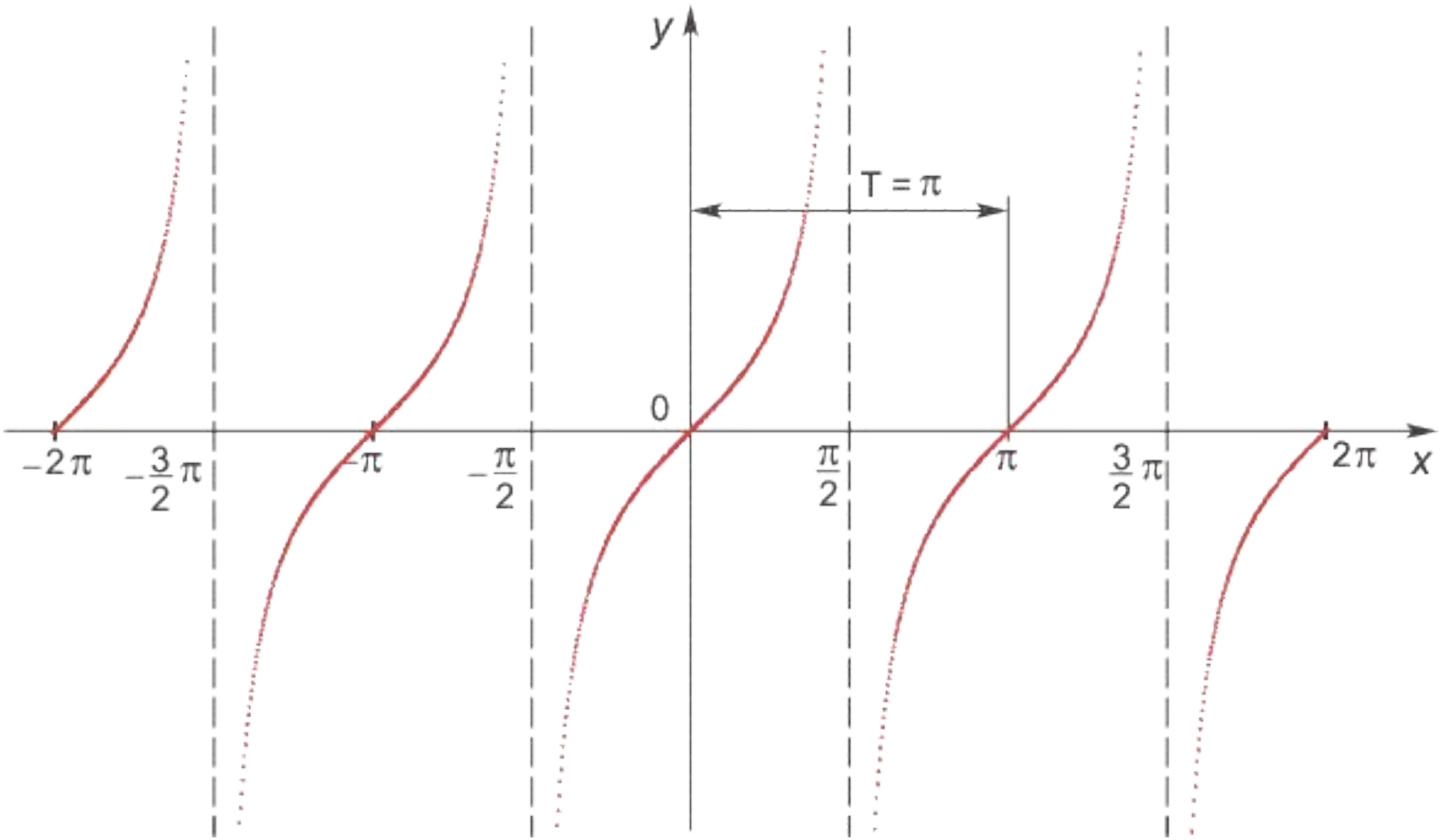
$y = \cos x$

- *График функции -* ***косинусоида***
- *cos (-x) = cos x*
- *cos (x+2πk) = cos x*



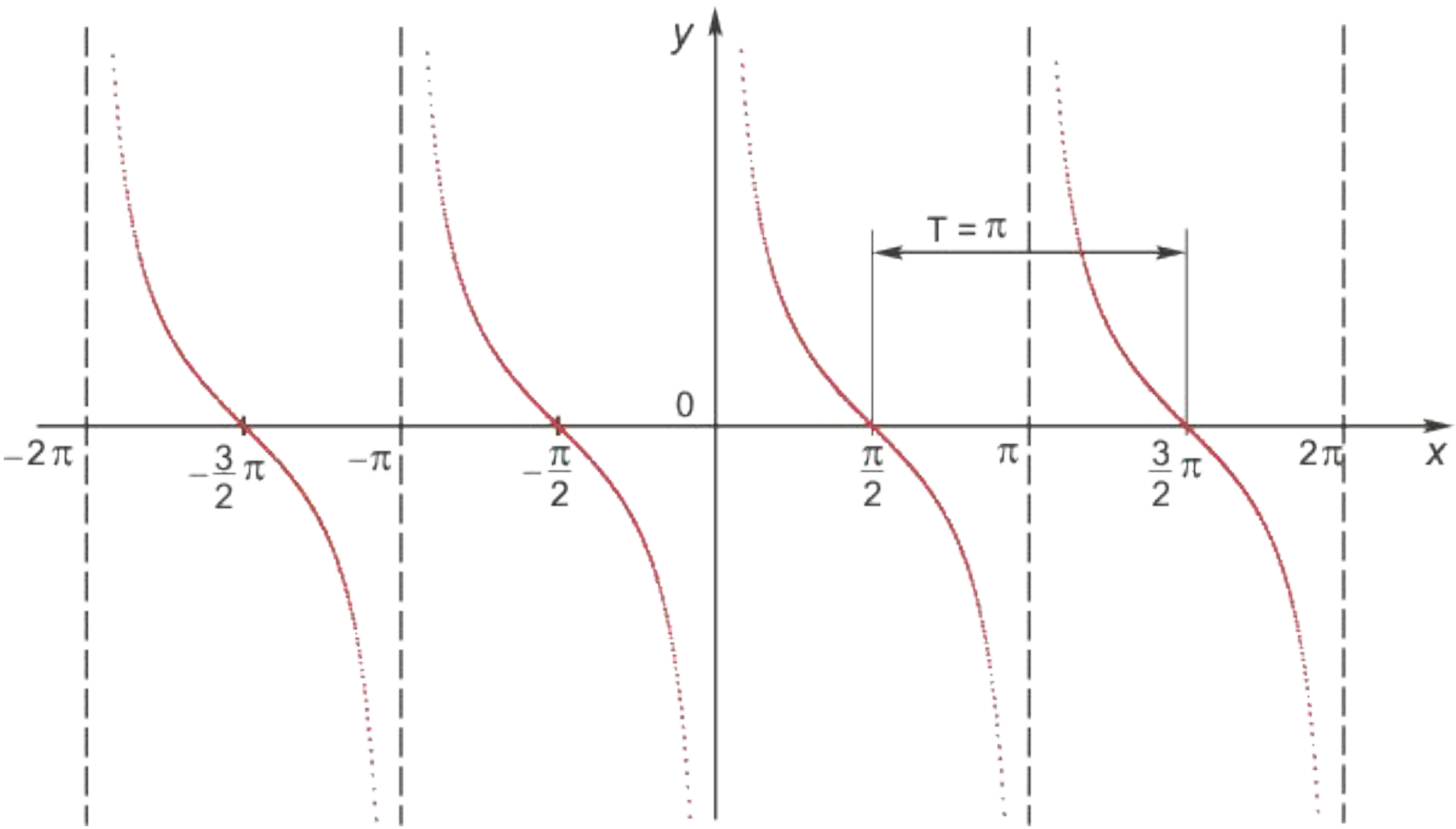
$y = \tan x$

- *График функции –* ***тангенсоида***
- $\tan(-x) = -\tan x$
- $\tan(x+\pi k) = \tan x$



$y = \cot x$

- График функции – **котангенсоида**
- $\cot(-x) = -\cot x$
- $\cot(x+\pi k) = \cot x$



5). Обратные тригонометрические функции

$$y = arcsin\, x$$

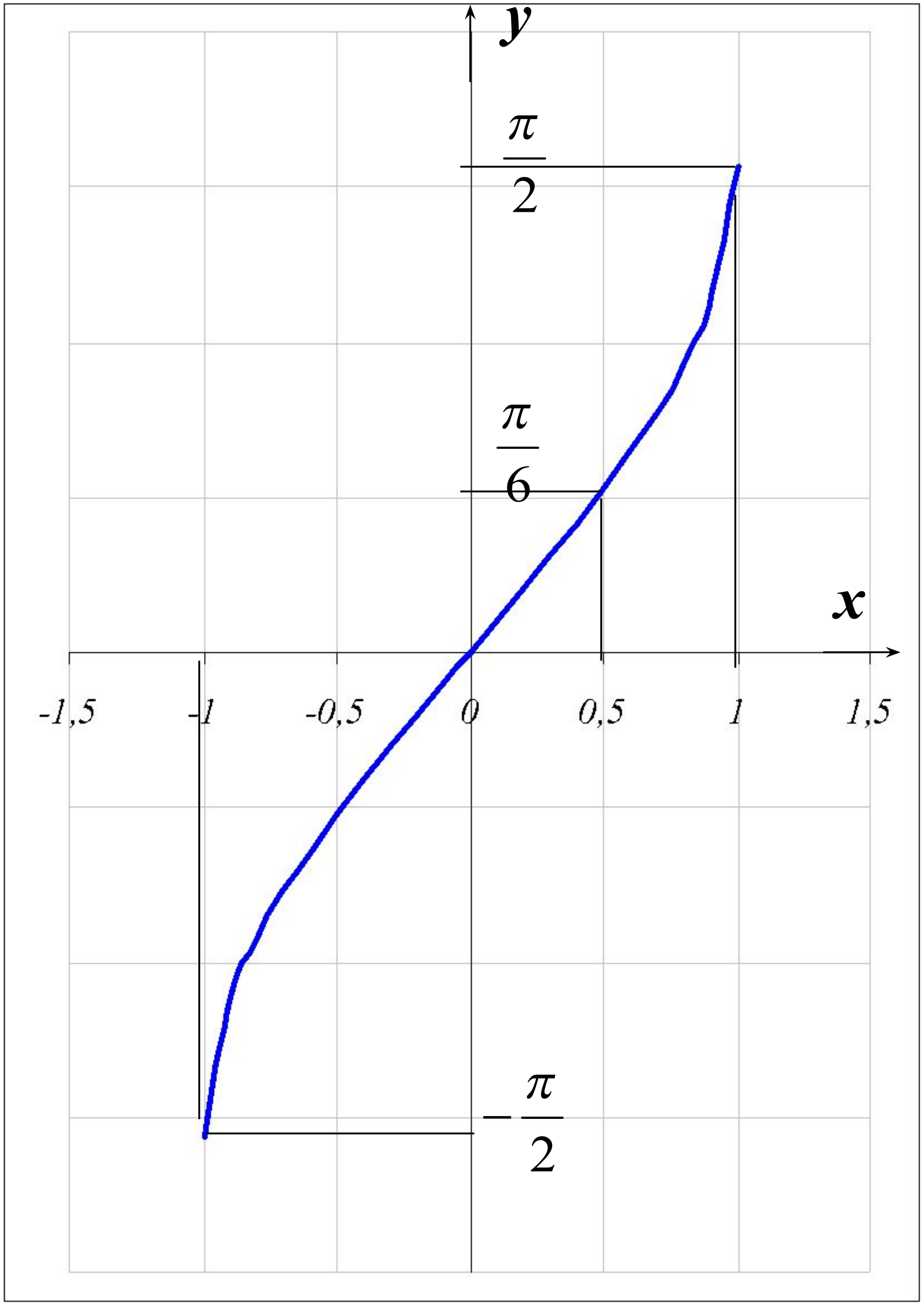
$$y = arccos\, x$$

$$y = arctan\, x$$

$$y = arccot\, x$$

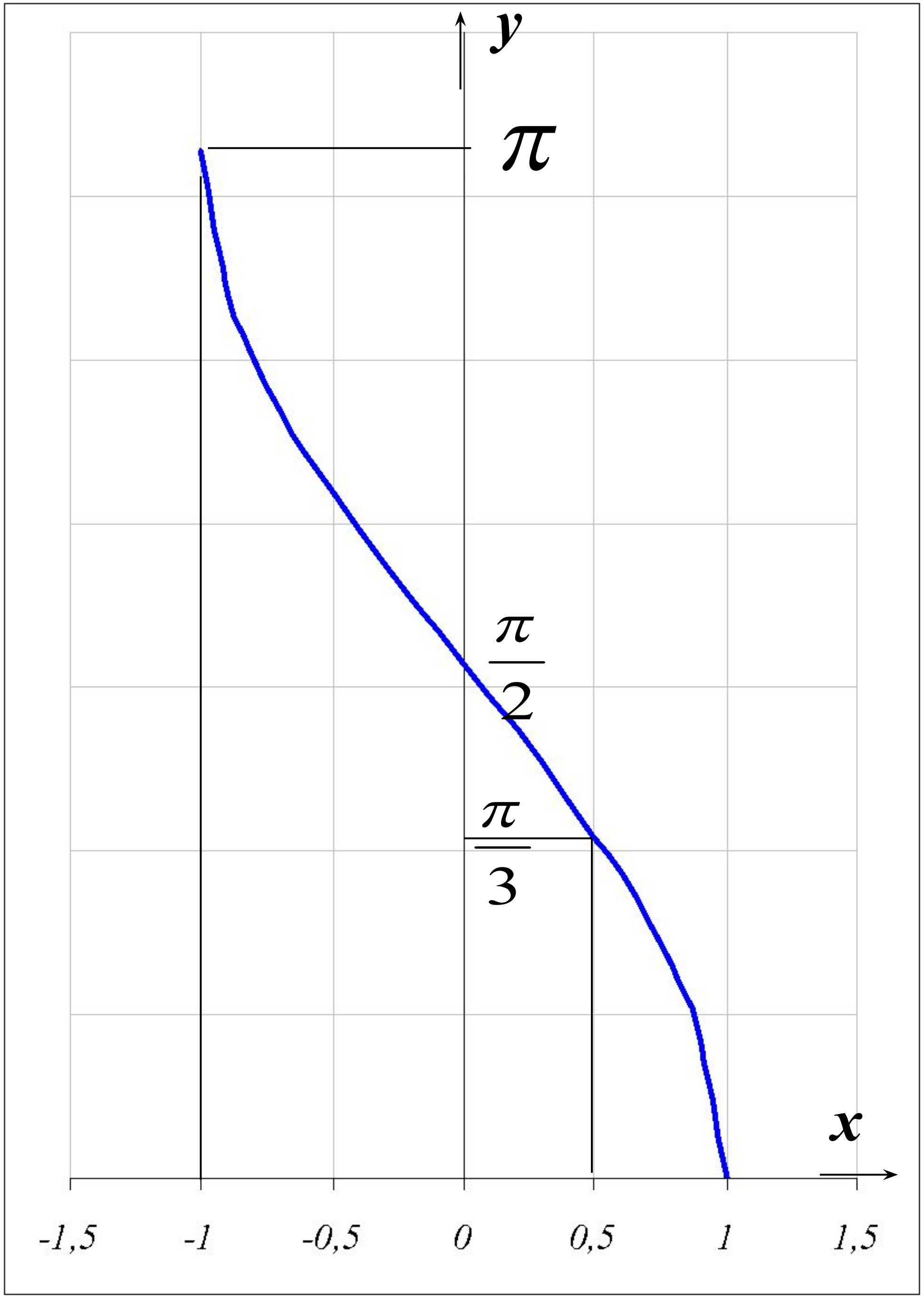
$y = arcsin\ x$

- *arcsin (-x) = - arcsin x*



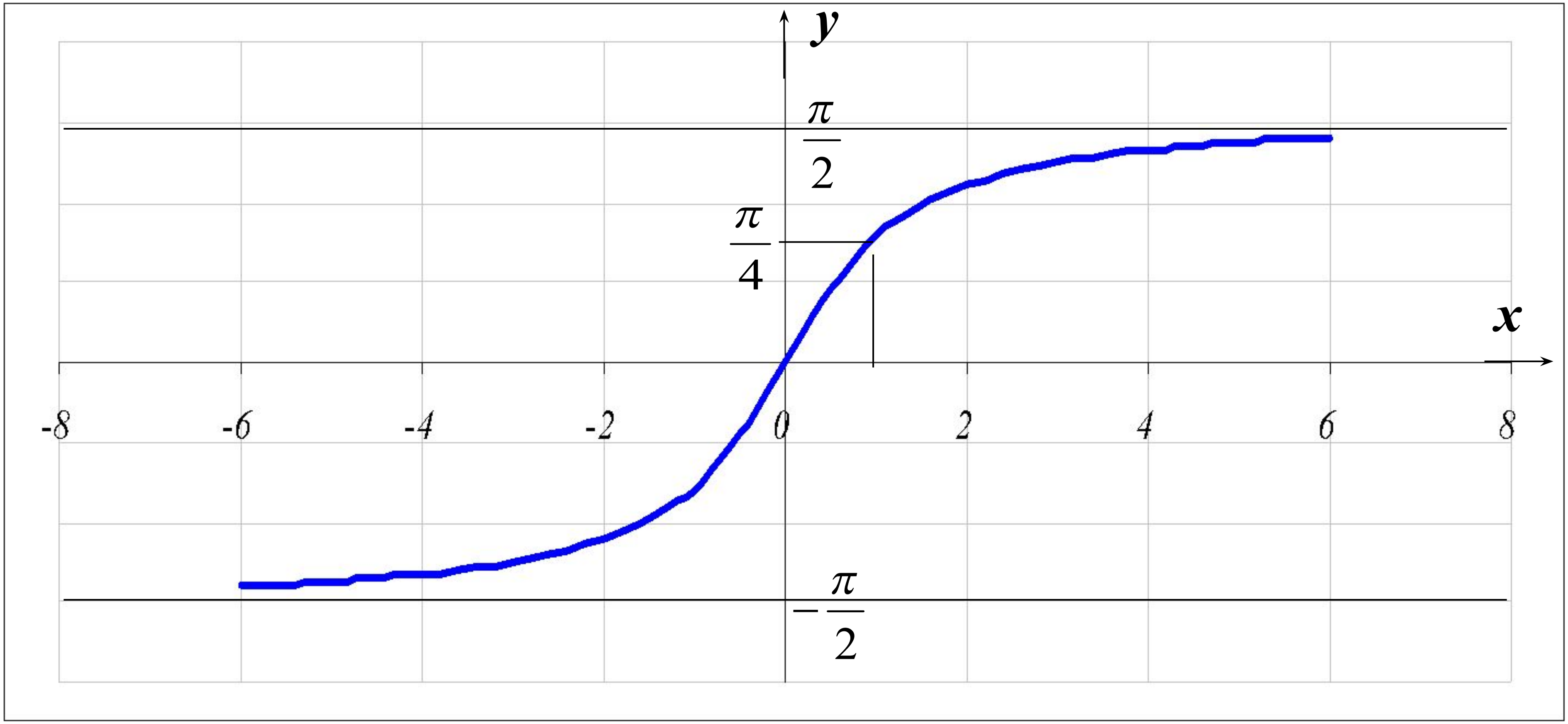
$y = arccos\ x$

- $arccos\ (-x) = \pi - arccos\ x$



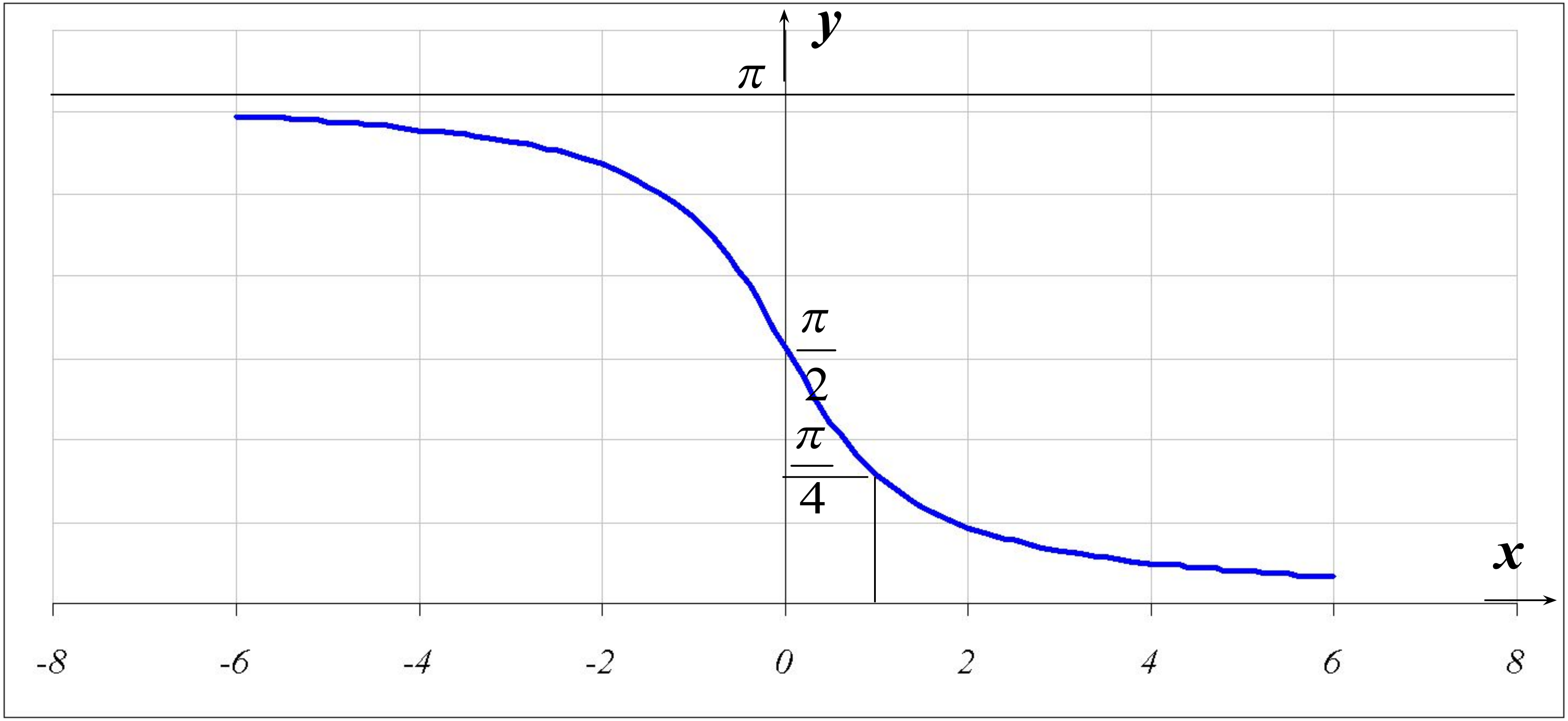
$y = \arctan x$

- $\arctan(-x) = -\arctan x$



$y = arccot\ x$

- $arccot\ (-x) = \pi - arccot\ x$



- Функция, задаваемая одной формулой, составленной из основных элементарных функций и постоянных с помощью конечного числа арифметических операций (+, -, ·,÷) и операций взятия функции от функции, называется элементарной функцией.

$$y = \arcsin\frac{1}{x} - \frac{\tan x}{8x^2+3} \qquad y = |x| = \sqrt{x^2} \qquad y = \log\left(2 + x^3\right)$$

примеры элементарных функций

Примеры неэлементарных функций:

$$y = signx = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$$y = 1 - \frac{x^3}{3!\cdot 3} + \frac{x^5}{5!\cdot 5} - \frac{x^7}{7!\cdot 7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!\cdot(2n+1)} + \ldots$$

(Количество операций, которое нужно произвести для получения y, не является ограниченным)

5. Сложение графиков функций

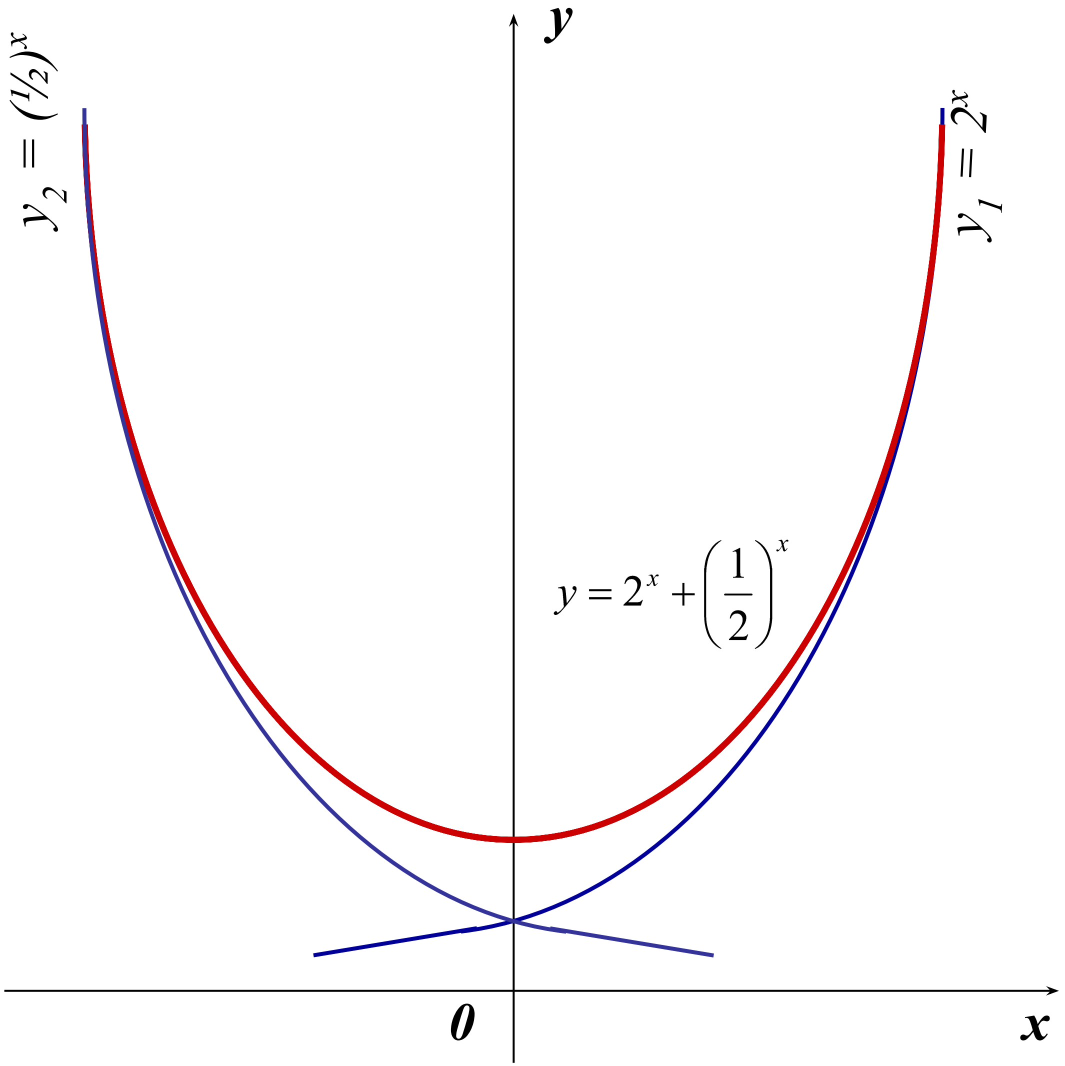
- *Чтобы сложить графики функций нужно сложить их ординаты.*
- $y = y_1 + y_2$

Сложите графики двух функций

$$y = 2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$y_1 = 2^x$$

$$y_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

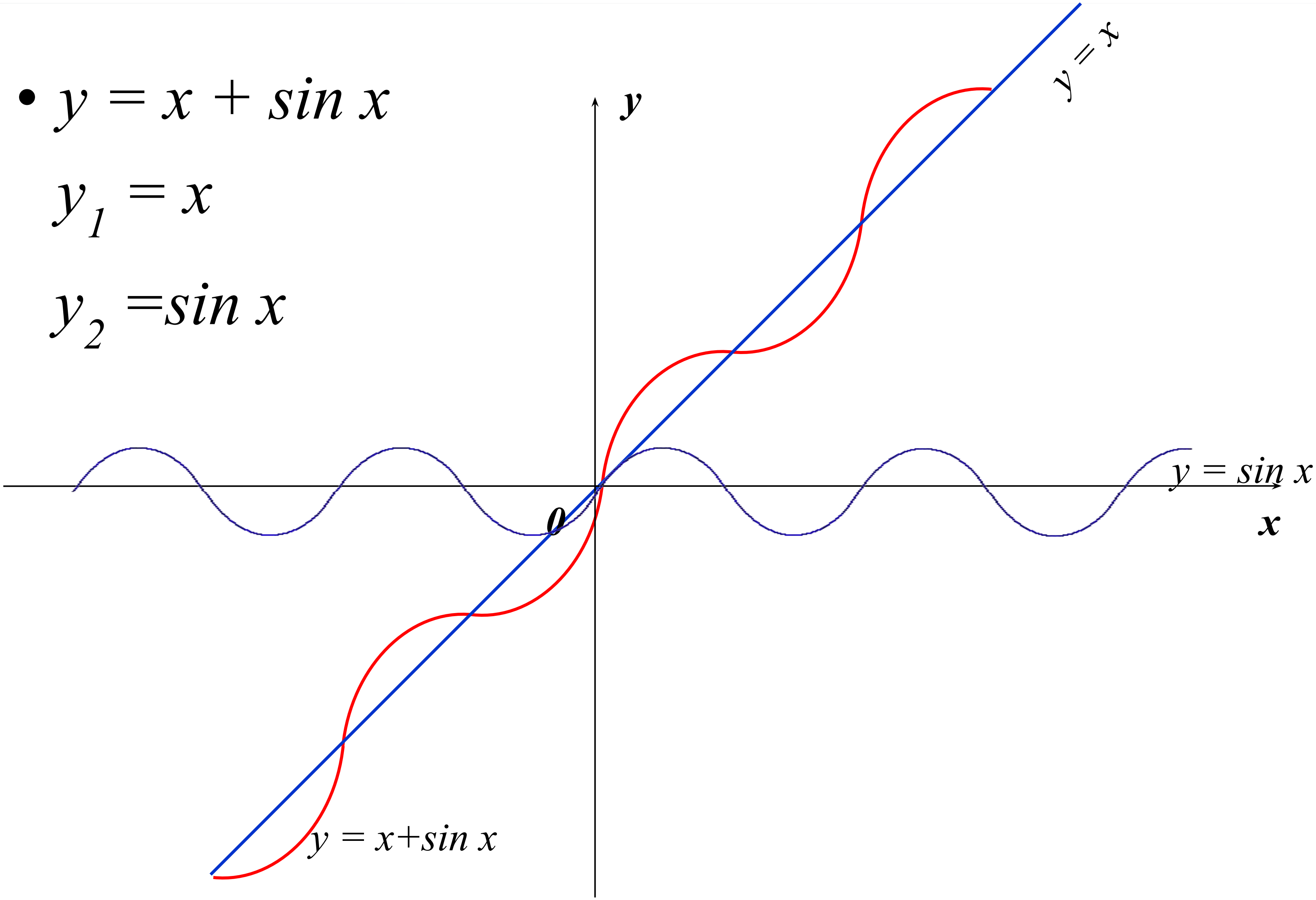


Сложите графики двух функций

- $y = x + sin\ x$

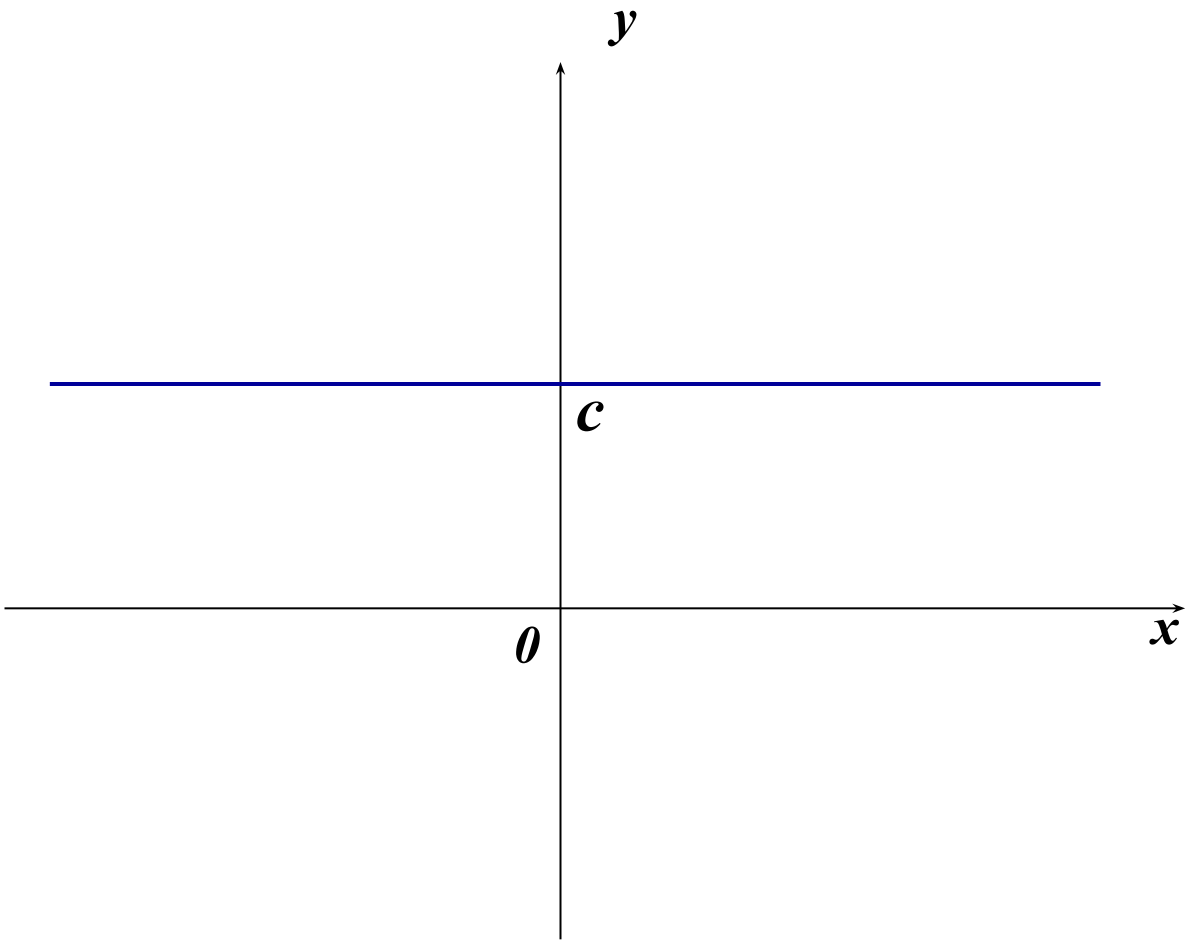
  $y_1 = x$

  $y_2 = sin\ x$



Повторение: ещё некоторые функции

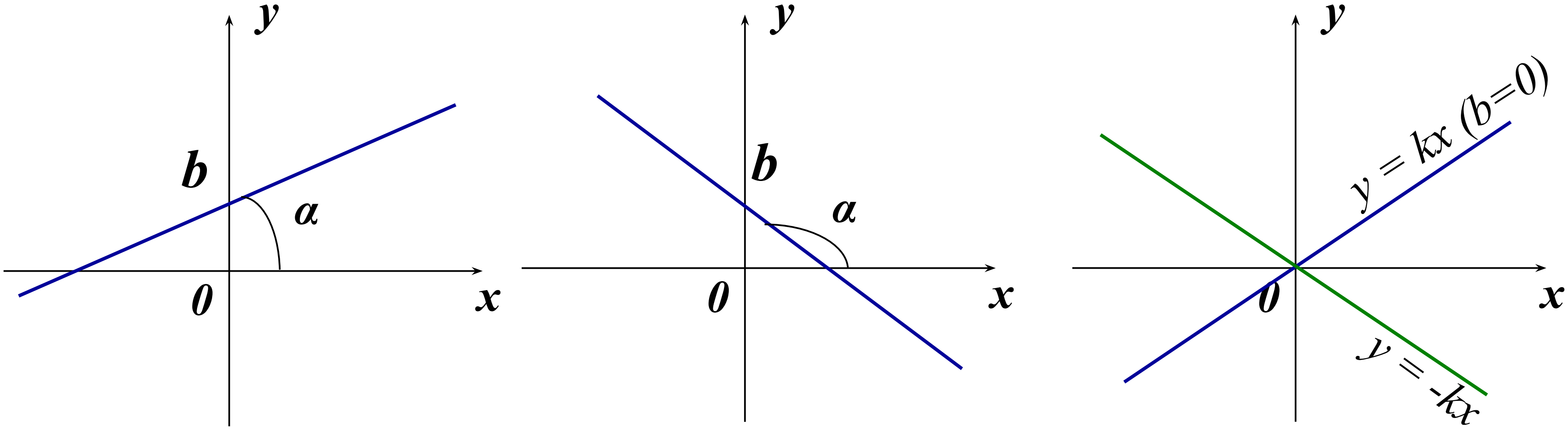
Постоянная функция



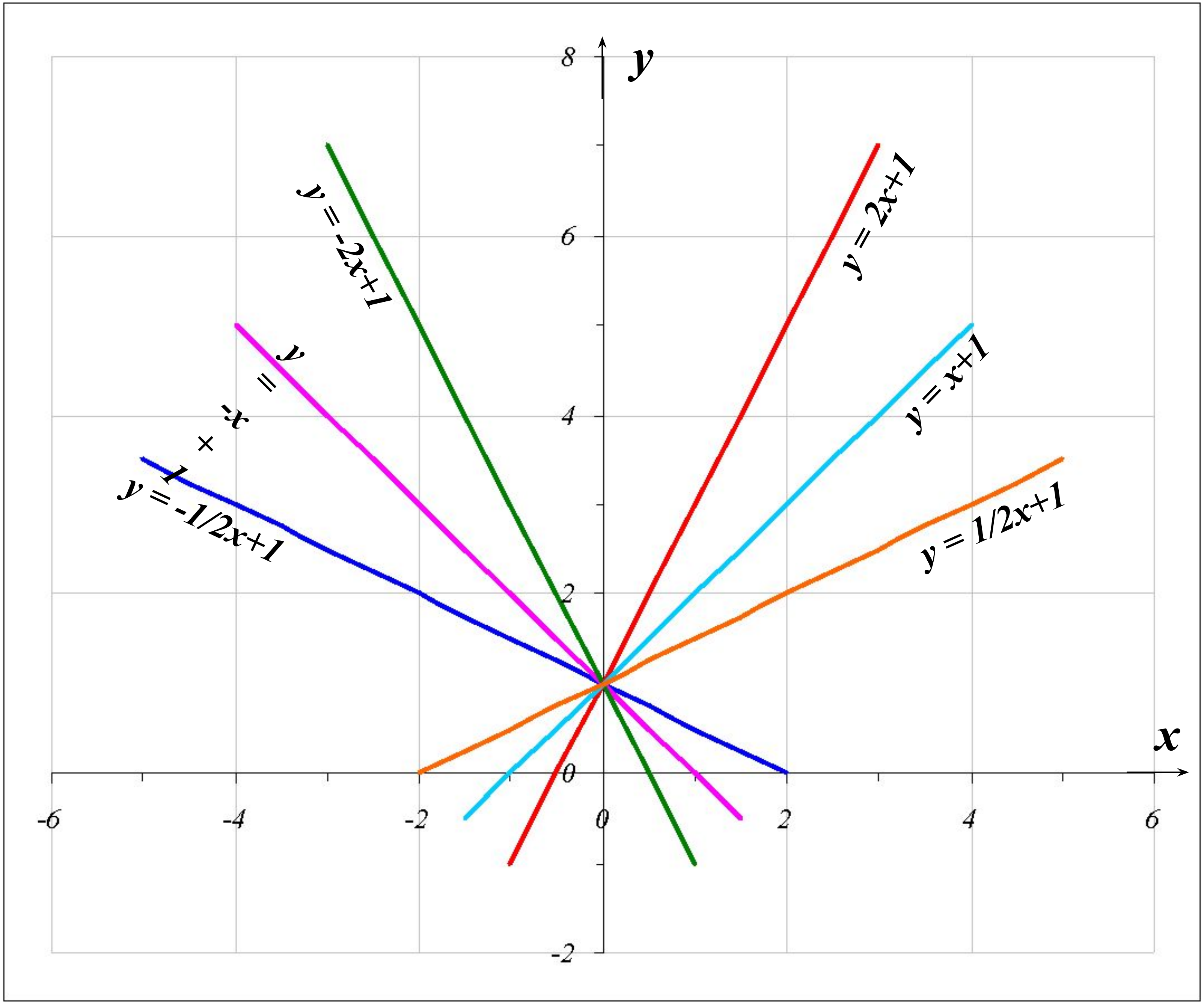
$$y = c, c \in R$$

Линейная функция

- $y = kx+b\ (k\neq 0),\quad k, b \in R$
- График – прямая



$k > 0$ $\qquad\qquad$ $k < 0$



y
x
y = 2x+1
y = x+1
y = 1/2x+1
y = -2x+1
y = -x + 1
y = -1/2x+1
8
6
4
2
0
-2
-6
-4
-2
0
2
4
6

На каком из рисунков изображён график функции $y = -2x+1$?

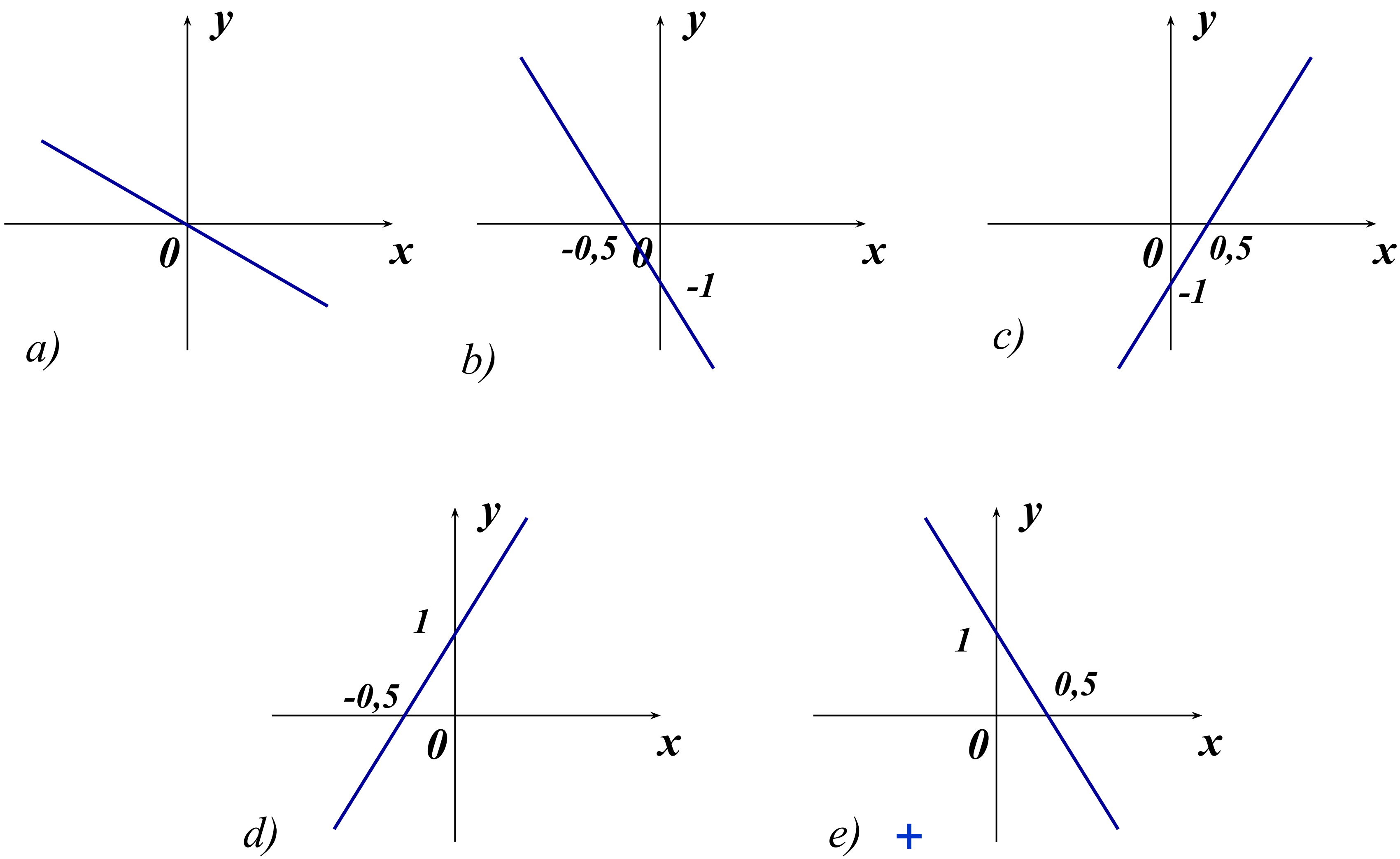
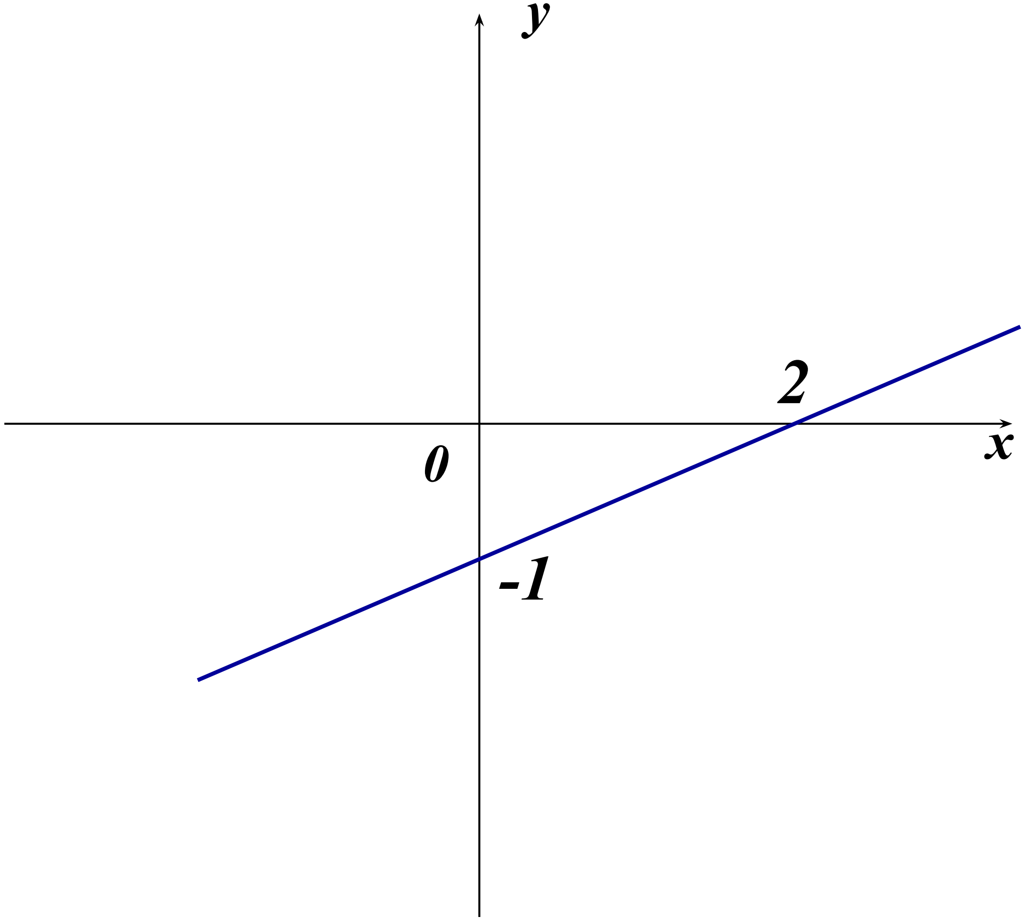


График какой функции изображён на рисунке?



a) $y = 2x - 1$

b) $y = 2x + 1$

c) $y = \dfrac{1}{2}x - 1$ +

d) $y = \dfrac{1}{2}x + 1$

e) $y = \dfrac{1}{2}x$

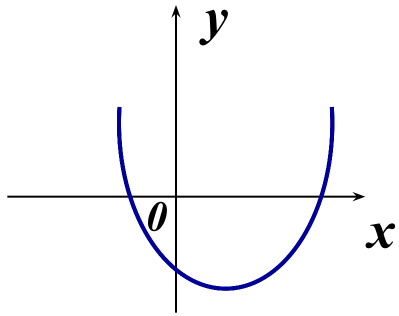
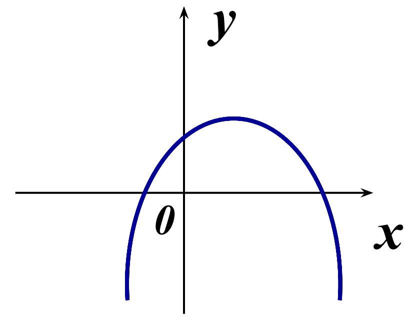
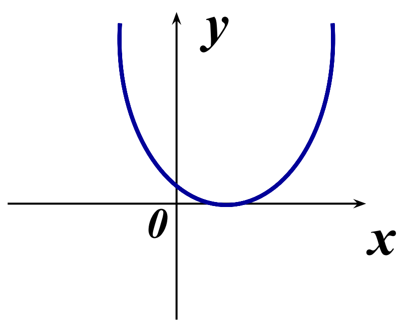
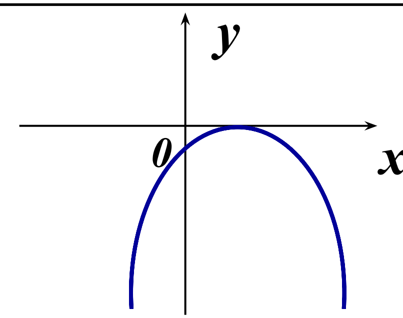
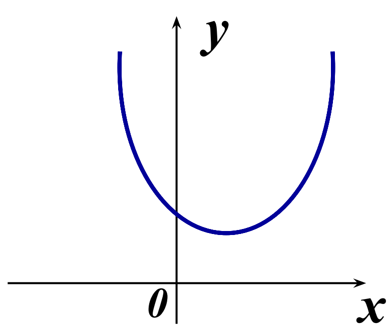
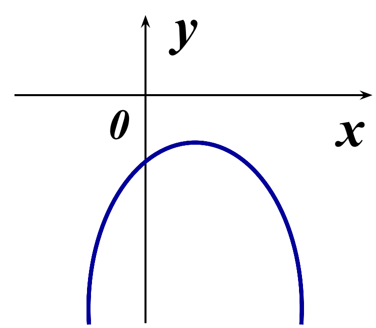
Квадратичная функция

- $y = ax^2+bx+c,\ a,b,c \in R,\ a \neq 0$
- График – парабола
- $$D = b^2 - 4ac$$

  $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

  $$x_в = \frac{-b}{2a}$$

Квадратичная функция

	a>0	a<0
D>0		
D=0		
D<0		

$$y = |x|$$

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$