

*Свойства производной.
Построение графиков
функций.*

Построение графика функции, заданной формулой, начинают с её исследования

- 1) Находят область определения функции
- 2) Выясняют, является ли функция четной (или нечетной), является ли периодической
- 3) Находят точки пересечения функции с осями Ox и Oy
- 4) Находят промежутки знакопостоянства функции
- 5) Находят промежутки возрастания и убывания
- 6) Точки экстремума и значения функции в этих точках
- 7) Исследуют поведение функции в «особых» точках и при больших x (проверяют на асимптоты)

Промежутки возрастания и убывания (промежутки монотонности).

Достаточный признак убывания :
если $f'(x) < 0$, то $f(x)$ убывает
на данном промежутке.

Достаточный признак возрастания : если
 $f'(x) > 0$, то $f(x)$ возрастает
на данном промежутке.

Пример.

Для функции $f(x) = x^4 - 8x^2$

найти промежутки монотонности.

1. $D(f) = (-\infty; +\infty)$, функция непрерывна и дифференцируема на области определения.

2. $f'(x) = 4x^3 - 16x$

3. $f'(x) = 0$, если $4x^3 - 16x = 0$;

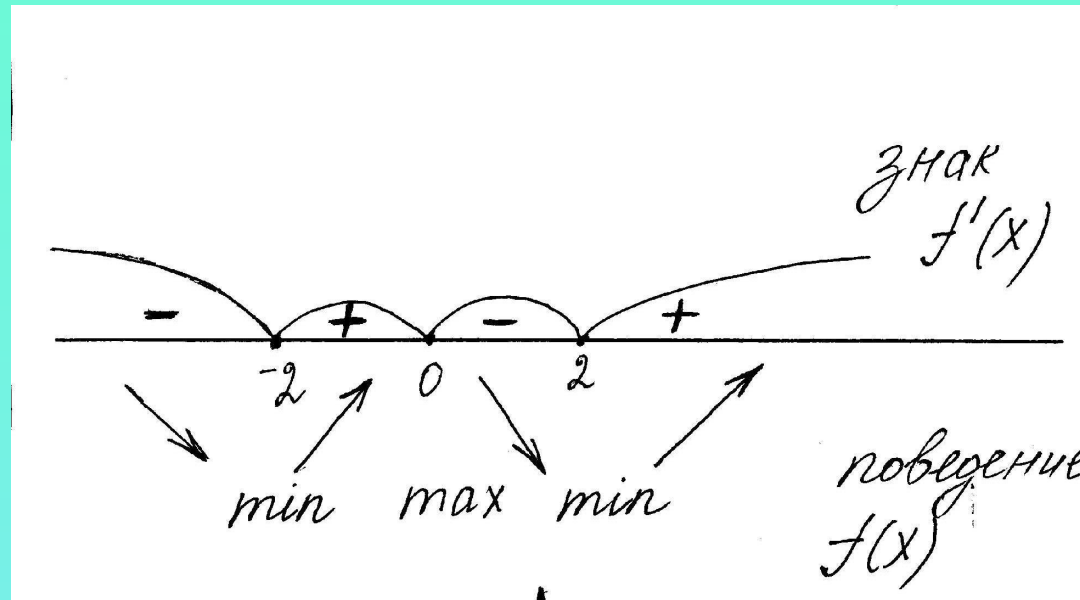
$$4x(x-2)(x+2) = 0;$$

$$x = -2; x = 2.$$

Решим неравенства

$$4x(x-2)(x+2) < 0 \text{ и } 4x(x-2)(x+2) > 0$$

методом интервалов.



Ответ: функция
возрастает, если $x \in [-2; 0], [2; +\infty)$;
убывает, если $x \in (-\infty; -2], [0; 2]$.

Точки экстремума функции (точки максимума и точки минимума)

Точка a называется точкой максимума функции $f(x)$, если верно неравенство $f(x) \leq f(a)$

Если при переходе через точку a производная меняет знак с «+» на «-»,

то эта точка является

точкой максимума

Точки экстремума функции (точки максимума и точки минимума)

Точка a называется точкой минимума функции $f(x)$, если верно неравенство

$$f(x) \geq f(a)$$

Если при переходе через точку a производная меняет знак с «-» на «+»,

то эта точка является

точкой минимума

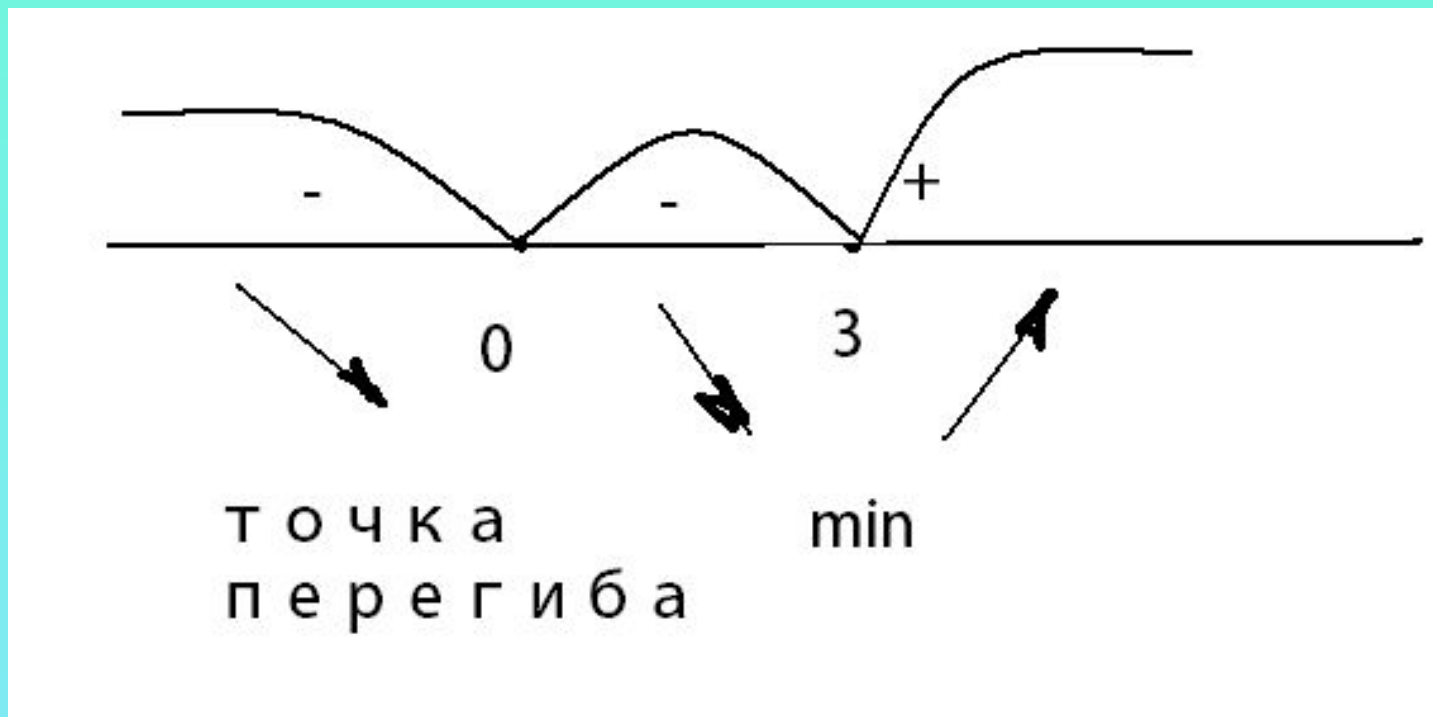
Если производная сохраняет свой знак при переходе через точку a , то такая точка называется **точкой перегиба**

Найти точки экстремума функции

$$f(x) = x^4 - 4x^3$$

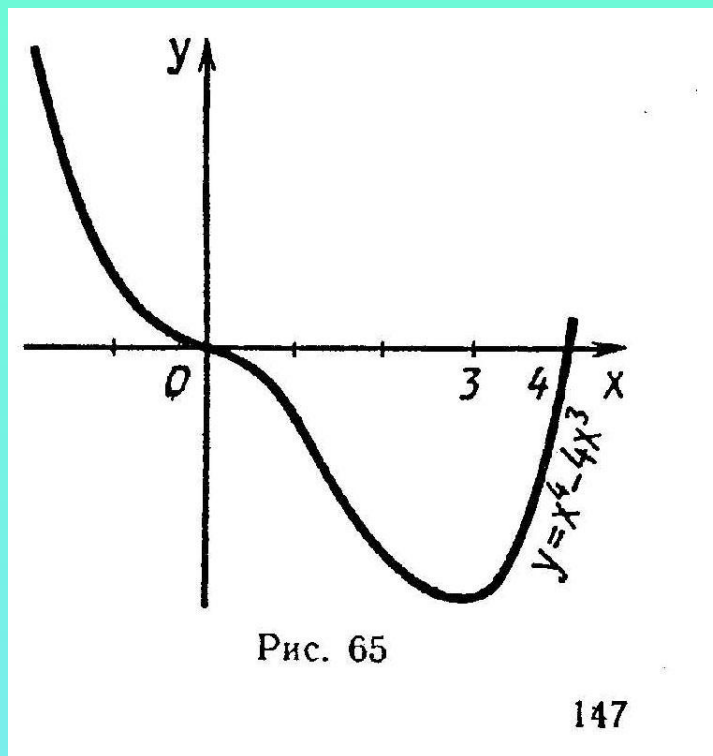
Решение: $f' = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$;

$$x_1 = 0; x_2 = 3;$$



При переходе через точку $x = 0$ производная не меняет знак, эта точка не является точкой экстремума, это точка перегиба. При переходе через точку $x = 3$ производная меняет знак с «-» на «+». Это точка минимума.

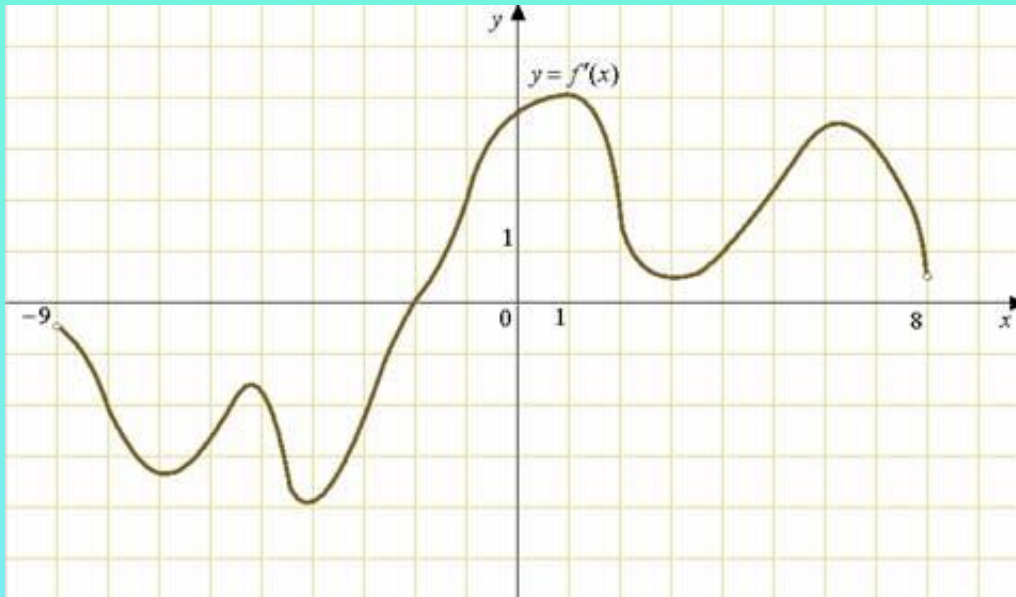
Если исследовать функцию и построить график, то это будет видно наглядно.



Ответ: Функция имеет одну точку экстремума, это точка минимума $x = 3$

Производная на ЕГЭ (B8)

На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$ определенной на интервале $(-9; 8)$. В какой точке отрезка $[-8; -4]$ $f(x)$ принимает наименьшее значение?



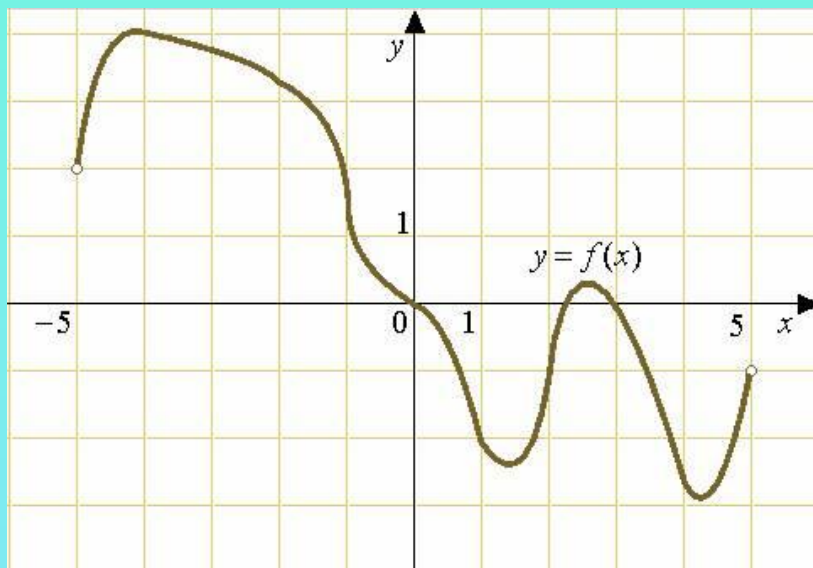
Ответ: -2

Производная на ЕГЭ (B8)

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$,
определенной на интервале $(-5; 5)$

. Определите количество целых точек,

в которых производная функции $f'(x)$ отрицательна.



Ответ: 8

Производная на ЕГЭ (В14)

Найдите наименьшее значение
функции $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 24$
на отрезке $[-2; -0,5]$

Решение. $y' = 3x^2 + 12x + 9$

$$3x^2 + 12x + 9 = 0 \quad x = -3; x = -1$$

$$3(x+3)(x+1) < 0 \quad \text{и} \quad 3(x+3)(x+1) > 0$$

Знаки производной

$$y' < 0 \text{ на } [-3; -1] \quad \text{и} \quad y' > 0 \text{ на } (-\infty; -3], [-1; +\infty)$$

$$x = -1 \text{ точка минимума} \quad y_{\text{наим}} = y(-1) = 20$$

Ответ: 20

Использованные ресурсы:

- *Открытый банк задач ЕГЭ по математике 2012*
<http://live.mephist.ru/show/mathege2010/>
- *Обучающая система Д. Гущина «РЕШУ ЕГЭ»*
<http://reshuege.ru/>
- Мордкович А.П. П.В. Алгебра и начала анализа (профильный уровень) 10 класс, М., «Мнемозина», 2006.
- Алимов Ш.А. Алгебра и начала анализа 10-11 класс, М., «Просвещение», 1999.