ТЕОРИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Основная задача теории погрешностей состоит в оценке погрешности результата вычислений при известных погрешностях исходных данных.

Источники и классификация погрешностей результата

Получить точное значение при решении задачи на машине практически невозможно. Получаемое решение всегда содержит погрешность и является приближенным. Источники погрешности:

Погрешность математической модели
Погрешность в исходных данных
Погрешность численного метод
Погрешность округления или отбрасывания.

Погрешность математической модели определяется выбором математической модели. Так для описания падения тела с высоты h_0 и имеющего скорость v_0 используются уравнения:

$$h = h_0 - v_0 \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}; \quad v = v_0 + g \cdot t$$

Если учитывать силу сопротивления F(t), действующую на тело массой m, тогда движение тела можно описать с помощью уравнений:

$$m \cdot \frac{dv}{vt} = m \cdot g - F(t); \quad \frac{dh}{dt} = -v; \quad \text{при } t = 0,\ v = v_0,\ h = h_0$$

Погрешность в исходных данных определяется: погрешностью измерения или погрешностью вычислений, с помощью которых они были получены.

Погрешность численного метода определяется точностью выбранного числено метода и вычислительного средства.

$$\mathrm{Sin}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \ldots$$

Значащими цифрами числа называют все цифры в его записи, начиная с первой ненулевой слева. Например, в числах α = 0.0$\underline{3045}$, α = 0.0$\underline{304500}$ значащими цифрами являются подчеркнутые цифры. Число значащих цифр в первом случае равно 4, во втором 6.

Правила округления известны. Обратить внимание, что если первая из отброшенных цифр равна 5 и все остальные отброшенные цифры являются нулями, то последняя оставшаяся цифра остается неизменной, если она четная (правило четной цифры), и увеличивается на единицу, если она нечетная. При этом погрешность не превышает пяти единиц отброшенного разряда.
Пример: 6.71 - 6.7 ; 6.77 - 6.8 ; 6.75 - 6.8; 6.65 - 6.6

Абсолютная и относительная погрешности.

Пусть α^* — точное (и никогда неизвестное) значение некоторой величины, а α — известное приближение к нему, то **абсолютной погрешностью** приближенного значения α называется величина:

$$\Delta(\alpha) \geq \left|\alpha - \alpha^*\right|$$

Относительной погрешностью приближенного значения α называется величина:

$$\delta(\alpha) \geq \frac{\left|\alpha - \alpha^*\right|}{\left|\alpha\right|}$$

Погрешности вычислений.

Абсолютная погрешность суммы или разности нескольких чисел не превосходит суммы абсолютных погрешностей этих чисел.

$$\Delta(a \pm b) \le \Delta(a) + \Delta(b)$$

Относительная погрешность суммы:

$$\delta(a + b) \le \delta_{max}$$

Относительная погрешность разности:

$$\delta(a - b) \le \nu\delta_{max}, \quad \text{где } \nu = \frac{|a + b|}{|a - b|}$$

Относительные погрешности произведения и частного:

$$\delta(a \cdot b) = \delta(a) + \delta(b) \qquad \delta\left(\frac{a}{b}\right) = \delta(a) + \delta(b)$$

Абсолютная погрешность дифференцируемой функции многих переменных:

$$u = f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) \qquad \Delta u \le \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \cdot \Delta(x_i)$$

Пример. Для заданной функции: $y = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_3}$

определить y, $\Delta(y)$ и $\delta(y)$

при $x_1 = -1.5$ $x_2 = 1.0$ $x_3 = 2.0$ $\Delta(x_1) = 0.10$ $\Delta(x_2) = 0.05$ $\Delta(x_3) = 0.05$

Вычисляем значение функции. $$y = \frac{-1.5^2 + 1.0^2}{2.0} = 1.625$$

Вычисляем погрешность $$\Delta(y) = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial y}{x_i} \right| \cdot \Delta(x_i)$$

$$\Delta(y) = \left| \frac{2x_1}{x_3} \right| \cdot \Delta(x_1) + \left| \frac{2x_2}{x_3} \right| \cdot \Delta(x_2) + \left| -\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_3^2} \right| \cdot \Delta(x_3)$$

$$\Delta(y) = \left| \frac{2 \cdot (-1.5)}{2.0} \right| \cdot 0.10 + \left| \frac{2 \cdot 1.0}{2.0} \right| \cdot 0.05 + \left| \frac{-1.5^2 + 1.0^2}{2.0^2} \right| \cdot 0.05$$

$$\Delta(y) = 0.150 + 0.050 + 0.041 = 0.241$$

$$\delta(y) = \frac{0.242}{1.625} = 0.149$$