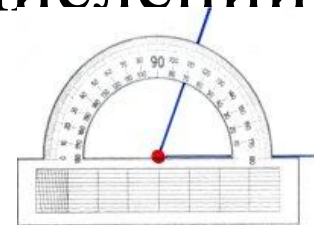
A topographic map with contour lines and a yellow highlighter pointing to a specific area. The highlighter is yellow with a black barrel and a yellow tip. The map shows various contour lines and a pinkish shaded area.

*4. Элементы
теории
ошибок
геодезических
измерений*



1. Общие сведения об измерениях
2. Погрешности измерений и их классификация
3. Свойства случайных погрешностей
равноточных измерений и критерии их оценки
4. Основные правила выполнения вычислений



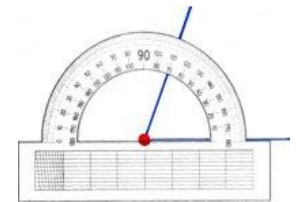
1. Общие сведения об измерениях

Основным содержанием геодезических работ является измерение физических величин (горизонтальных и вертикальных углов, длин линий и др.).

Измерения любой величины следует рассматривать с двух точек зрения:

- количественной, выражающей **числовое значение измеренной величины**;
- качественной, характеризующей **точность измерений**.

Измерения выполняют с помощью технических средств измерений, которые имеют нормированные метрологические характеристики и (или) хранящие единицу физической величины, размер которой принимают неизменным (в пределах установленной погрешности) в течение некоторого интервала времени.

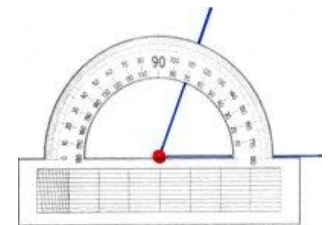


- Общие сведения об измерениях
- Измерения производят по определенному алгоритму, называемому **методом выполнения измерений**.
 - После выполнения измерения и получения числового значения (результата измерения) производят **оценку погрешности измерения**.

Измерения

Непосредственные

Косвенные



Общие сведения об измерениях

Факторы
геодезическ
их
измерений

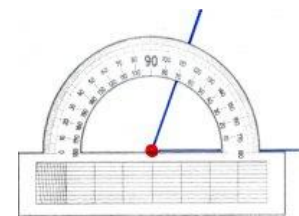
Объект
измерений

Исполнител
ь

Прибор

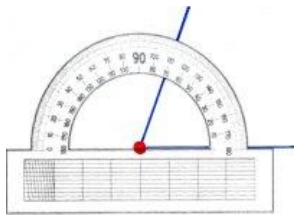
Метод
измерения

Внешняя
среда



Общие сведения об измерениях

Внешние условия



Рельеф и грунт местности

Растительный покров

Температура

Влажность и запыленность воздуха

Освещение

Ветер

Облачность

Общие сведения об измерениях

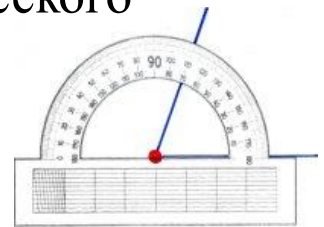
Конкретное содержание этих факторов в процессе измерения определяет так называемые *условия измерения*.

С условиями измерения связаны понятия равноточных и неравноточных измерений:

- измерения, выполняемые при неизменных условиях, позволяющих считать результаты измерений одинаково надежными, называют *равноточными*.

- если хотя бы один из факторов определяющих содержание условий измерений будет изменяться, то такие измерения называют *неравноточными*.

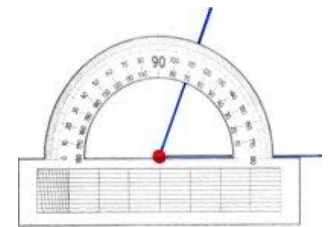
Как правило, результаты геодезических измерений непосредственно не используются, а предварительно подвергаются математической обработке, которая с помощью вычислительных методов и средств приводит результаты измерений к виду удобному для практического использования.



Общие сведения об измерениях

При вычислительной обработке результатов измерений выделяют *необходимые и избыточные* (добавочные) измерения:

- *Необходимыми* называют такие измерения, которые позволяют получить единственный результат прямого или косвенного измерения данной величины.
- *Избыточные* измерения позволяют получить два и более значений определяемой величины. Если одна и та же величина измерена n раз, то одно из этих измерений будет необходимым, а остальные – избыточными.

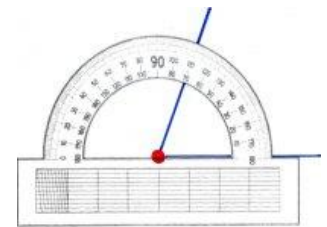


Общие сведения об измерениях

Внешние условия измерений, методы и средства измерений обуславливают разделение измерений на **независимые и зависимые**:

- **Независимыми** считают измерения, в которых отсутствуют погрешности, одинаково искажающие результаты этих измерений. Геодезические измерения, выполненные разными наблюдателями, приборами и методами, в различных внешних условиях являются независимыми;
- Поскольку при производстве геодезических измерений наблюдатель, прибор и метод измерений часто остаются неизменными, то полученные результаты будут **зависимыми**.

Однако анализ влияния этих факторов показывает, что в пределах необходимой для инженерных работ точности возникающими в этом случае зависимостями можно пренебречь.



2. Погрешности измерений и их классификация

- Под **погрешностью измерения величины** понимают отклонение результата измерения от его истинного (действительного) значения:

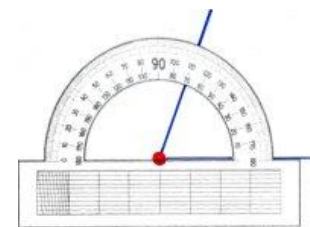
$$\Delta = l - x,$$

где:

Δ - истинная погрешность измерения;

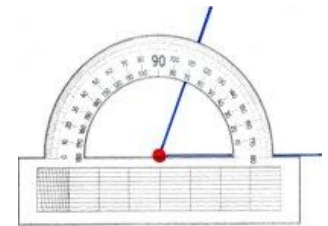
l – результат измерения;

x – истинное значение величины.



Погрешности измерений и их классификация

- Под ***истинным значением физической величины*** понимается такое значение физической величины, которое идеальным образом характеризует ее в количественном и качественном отношениях.
- ***Действительное значение физической величины*** – это значение величины, полученное в результате ее измерения и настолько близкое к истинному значению, что в поставленной задаче может быть использовано вместо него.
- ***Результат измерения*** представляет собой приближенную оценку истинного значения величины.



Погрешности измерений и их классификация

Погрешности измерений можно классифицировать по двум признакам:

- по характеру происхождения;
- по характеру их действия на результаты измерений и свойствам.

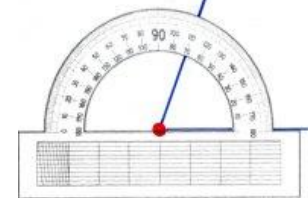
По источнику
происхождения

Средства
измерения
(приборные)

Личные
(субъективные)

Внешние

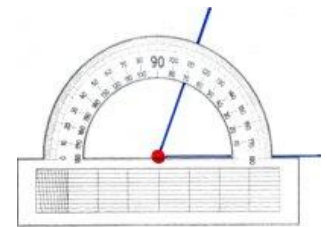
Метода
измерений



Погрешности измерений и их классификация



Поскольку грубые и систематические погрешности могут быть обнаружены, изучены и исключены из результатов измерений, то на результаты измерений основное влияние оказывают случайные погрешности.



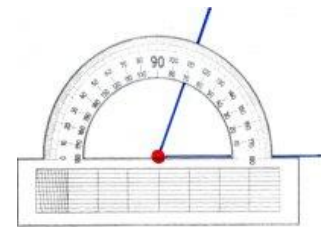
3. Свойства случайных погрешностей равноточных измерений и критерии их оценки

На случайные погрешности распространяются законы теории вероятностей и математической статистики. Они обладают свойствами, отвечающими закону нормального распределения Гаусса, а именно:

- 1. Случайные погрешности по абсолютной величине не могут превосходить известного предела.
- 2. Малые по абсолютной величине случайные погрешности появляются чаще, чем большие.
- 3. Случайные погрешности, равные по абсолютной величине, но противоположные по знаку, одинаково вероятны.
- 4. Среднее арифметическое из случайных погрешностей равноточных измерений стремиться к нулю с увеличением числа измерений:

$$\lim ([\Delta]/n) = 0$$

где: $[\Delta]$ – сумма случайных погрешностей;
 n – число измерений.



Свойства случайных погрешностей равноточных измерений и критерии их оценки

Для оценки точности измерений может быть использовано несколько критериев.

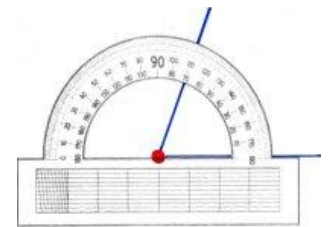
В геодезии наибольшее применение получила **средняя квадратичная погрешность**, которую вычисляют по формуле Гаусса:

$$m = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}$$

где: $[\Delta^2] = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \dots + \Delta_n^2$ - сумма квадратов истинных случайных погрешностей отдельных измерений;

n – число измерений в ряду.

Этот критерий точности достаточно надежно работает при $n \geq 10$



Свойства случайных погрешностей равноточных измерений и критерии их оценки

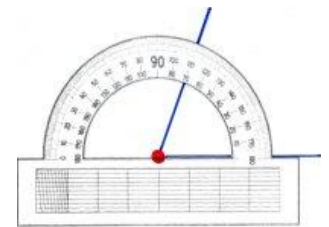
- Средняя квадратическая погрешность может быть вычислена и через *поправки V*, которые представляют собой разность между средним арифметическим X и результатом отдельного измерения x_i :

$$V_i = X - x_i,$$

где: $X = [x]/n$ – среднее арифметическое данного ряда равноточных измерений (арифметическая середина).

- При этом среднюю квадратическую погрешность вычисляют по формуле Бесселя:

$$m = \sqrt{\frac{[V^2]}{n-1}}$$



Свойства случайных погрешностей равноточных измерений и критерии их оценки

Кроме средней квадратической погрешности в практике используют среднюю, вероятную и предельную погрешности.

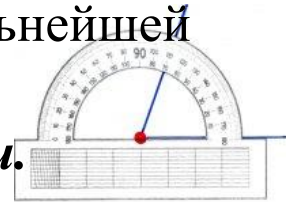
Среднее арифметическое из абсолютных значений случайных погрешностей называют *средней погрешностью*.

Вероятная погрешность находится в середине ранжированного ряда погрешностей, т.е. погрешностей, расположенных в порядке возрастания или убывания их абсолютных величин.

Предельная погрешность – это такое абсолютное значение случайной погрешности, превзойти которое не может ни одна из погрешностей данного ряда измерений. При геодезических работах в качестве предельной используют погрешность, равную $2m$, m – средняя квадратичная погрешность.

Если полученная на практике погрешность оказалась больше предельной, то ее относят к числу грубых и исключают из дальнейшей обработки.

Рассмотренные выше погрешности называют *абсолютными*.

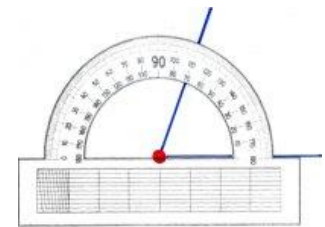


Свойства случайных погрешностей равноточных измерений и критерии их оценки

- В тех случаях, когда погрешность измерения зависит от измеряемой величины, удобнее пользоваться **относительной погрешностью**, которая представляет собой отношение абсолютной **m** погрешности измерения к самой измеряемой величине **M**, выраженное в виде дроби:

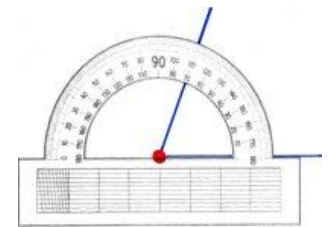
$$\frac{m}{M} = \frac{1}{M/m} = \frac{1}{N}$$

- Знаменатель дроби **N** показывает, какую часть от измеренной величины составляет погрешность.



Свойства случайных погрешностей равноточных измерений и критерии их оценки

- Часто возникает задача оценки точности величины, которая непосредственно не измерялась, а была получена через другие величины, функционально с ней связанные. При этом погрешность функции зависит от точности аргументов, через которые она получена.
- Эта задача называется *прямой задачей теории погрешностей*.



Свойства случайных погрешностей равноточных измерений и критерии их оценки

- Функциональные зависимости могут быть различными. В общем случае функция имеет вид:

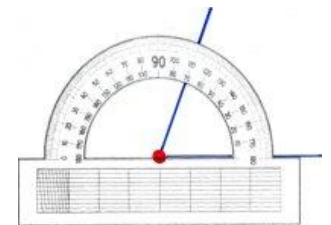
$$U = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где: x_1, x_2, \dots, x_n — аргументы, которые были измерены соответственно со средними квадратичными погрешностями.

- Тогда среднюю квадратическую погрешность функции общего вида можно вычислить по формуле:

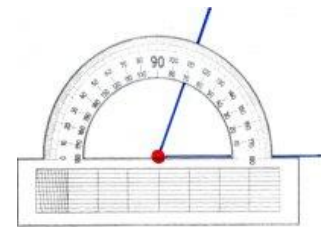
$$m_U = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 m_x^2}$$

- где: $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ — частные производные функции по каждому аргументу.



4. Основные правила выполнения вычислений

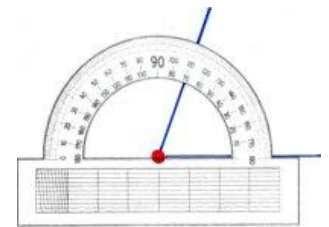
- Результаты измерений, содержащие неизбежные погрешности, используют для вычисления тех или иных величин. Погрешности попадают в вычисления, переходят от одной вычислительной операции к другой, накапливаются и поражают новые погрешности.
- Кроме того, источником погрешностей является операция **округления**, т.е. процесс приближенного представления чисел с помощью конечного количества цифр. При этом важно не загромождать вычисления лишними цифрами, а ограничивать их нужным числом знаков.



Основные правила выполнения вычислений

В вычислительной практике операцию округления прямо проводить по правилам Гаусса, а именно: чтобы округлить число до n значащих цифр, отбрасывают все его цифры, стоящие справа от n -й значащей цифры, при этом:

- если первая из отброшенных цифр меньше 5, то оставшиеся десятичные знаки сохраняют без изменения (например, $53,4 \approx 53$);
- если первая из отброшенных цифр больше 5, то к последней значащей цифре прибавляют единицу (например, $53,7 \approx 54$);
- если первая из отброшенных цифр равна 5 и среди остальных отброшенных цифр имеются ненулевые, то последнюю оставшуюся цифру увеличивают на единицу (например, $53,51 \approx 54$);
- если первая из отброшенных цифр равна 5, а все остальные отброшенные цифры являются нулевыми, то последняя оставшаяся цифра остается неизменной, если она четная, и увеличивается на единицу, если она нечетная (например, $52,50 \approx 52$; $53,50 \approx 54$).



Продолжение следует...

- Спасибо за внимание!

