

Постановка задачи

Дифференциальные уравнения устанавливают связь между независимыми переменными, искомыми функциями и их производными. Если искомая функция зависит от одной переменной, то дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*.



Постановка задачи

Например, условие равновесия упругой среды описывается *обыкновенным* дифференциальным уравнением:

$$\frac{dT_x}{dx} + F_x = 0$$

T_x – компонента механических напряжений, F - действующая на сплошную среду сила в расчёте на единицу массы

Здесь искомая функция (механическое напряжение) $T(x)$ зависит от одной переменной x (координата).



Постановка задачи

В том случае, если искомая функция зависит от нескольких переменных, дифференциальное уравнение будет уравнением в *частных производных*.

Например, движение упругой среды можно описать уравнением в частных производных:

$$\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \frac{\partial T_x}{\partial x}$$

u_x – смещение среды, ρ – плотность среды, T_x – компонента напряжений

В этом уравнении функция $u(t,x)$ зависит от времени (t) и направления смещения среды (x).



Постановка задачи

Обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ) называются уравнения, которые содержат одну или несколько производных от искомой функции $y = y(x)$:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

где x – независимая переменная.

Наивысший порядок n , входящей в уравнение производной, называется *порядком дифференциального уравнения*.

Например:

$F(x, y, y') = 0$ – уравнение первого порядка;

$F(x, y, y', y'') = 0$ – уравнение второго порядка



Постановка задачи

Из общей записи дифференциального уравнения можно выразить производную в явном виде:

$$y' = f(x, y),$$

$$y'' = f(x, y, y')$$

Уравнение для производных имеет бесконечное множество решений. Для получения единственного решения необходимо указать дополнительные условия, которым должны удовлетворять искомые решения.



Постановка задачи

В зависимости от вида таких условий рассматривают три типа задач, для которых доказано существование и единственность решений.

Первый тип — это задачи с **начальными** условиями.

Для таких задач кроме исходного дифференциального уравнения в некоторой **точке x_0** должны быть заданы начальные условия, т.е. значения функции $y(x)$ и её производных: $y(x_0) = y_0$

$$y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y^{n-1}_0.$$



Постановка задачи

Второй тип задач – это, так называемые, граничные, или краевые, в которых дополнительные условия задаются в виде функциональных соотношений между искомыми решениями.

Третий тип задач для обыкновенных дифференциальных уравнений – это задачи на собственные значения.



Постановка задачи

Сформулируем задачу Коши.

Найти решение обыкновенного дифференциального уравнение (ОДУ) первого порядка, разрешенное относительно производной

$$y' = f(x, y),$$

удовлетворяющее начальному условию

$$y(x_0) = y_0$$



Постановка задачи

Необходимо найти на отрезке $[x_0, x_n]$ такую непрерывную функцию $y = y(x)$, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению $y' = f(x, y)$, и начальному условию $y(x_0) = y_0$

т.е. **найти решение** дифференциального уравнения. Нахождение такого решения называют **решением задачи Коши**. Численное решение этой задачи состоит в построении таблицы приближенных значений y_1, y_2, \dots, y_n решения уравнения $y(x)$ в точках x_1, x_2, \dots, x_n с некоторым шагом h .

$$x_i = x_0 + i \cdot h, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

*Обыкновенные
дифференциальные уравнений*

$$\frac{dy}{dx} = 2(y - 3)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = t + 1$$

$$x dy = y^3 dx$$

$$y' = x^2$$

*Уравнения в частных
производных*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

$$3 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4$$

Уравнения первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = 2(y - 3)$$

$$x dy = y^3 dx$$

$$y' = x^2$$

Уравнения второго порядка

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = t + 1$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

$$3 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4$$

Пример 1. Для дифференциального уравнения

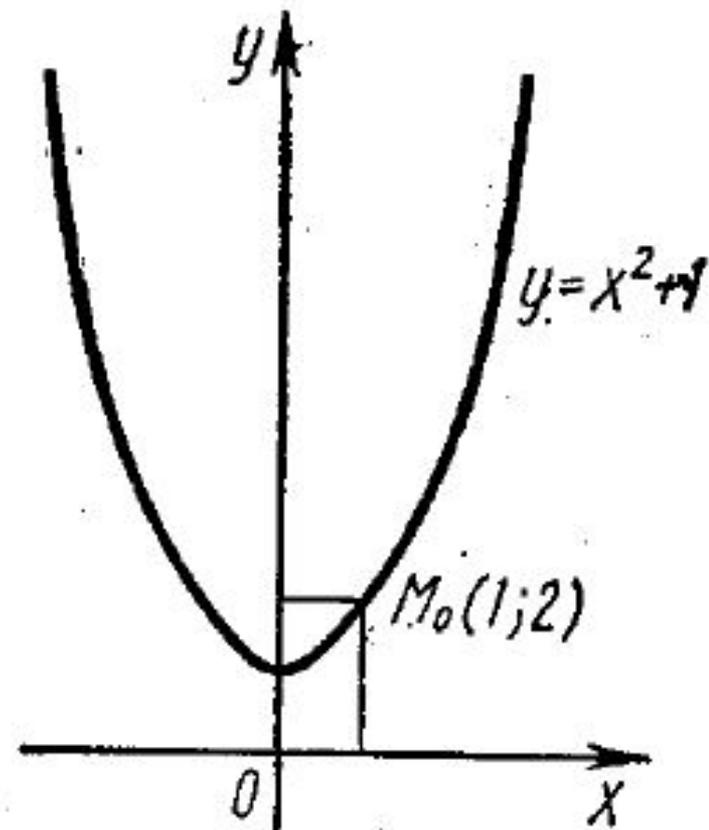
$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$y_0 = 2 \text{ при } x_0 = 1$$

$$\text{общее решение : } y = x^2 + C$$

$$2 = 1 + C, \text{ то есть } C = 1$$

$$M_0(1; 2)$$



Условие Липшица

$$R_{[a,b]} = \{ |x - x_0| < a, |y - y_0| < b \}$$

$$|f(x, \bar{y}) - f(x, y)| \leq N |\bar{y} - y|$$

Методы приближенного решения дифференциальных уравнений

Аналитические методы

Метод последовательных приближений – метод Пикара

Метод интегрирования дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов

Численные методы

Метод Эйлера и его модификации

Метод Рунге-Кутты

Экстраполяционный метод Адамса

Метод Эйлера

Решить дифференциальное уравнение $y'=f(x, y)$ численным методом – это значит для заданной последовательности аргументов x_0, x_1, \dots, x_n и числа y_0 , не определяя функцию $y=F(x)$, найти такие значения y_1, y_2, \dots, y_n , что $y_i=F(x_i)$ и $F(x_0)=y_0$.

$$h=x_k-x_{k-1}$$

Пусть дано дифференциальное
уравнение
первого порядка

$$y' = f(x, y)$$

с начальным условием

$$x = x_0, y(x_0) = y_0 \\ [a, b]$$

$$h = \frac{b - a}{n}$$

шаг интегрирования



$$y' = f(x, y)$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

$$dy = f(x, y) dx$$

$$\int_{y_0}^y dy = \int_{x_0}^x f(x, y) dx$$

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y) dx$$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} y' dx = y(x) \Big|_{x_k}^{x_{k+1}} = y(x_{k+1}) - y(x_k) = y_{k+1} - y_k$$

ТО ЕСТЬ

$$y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y) dx$$



$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y) dx = f(x_k, y_k) \cdot x \Big|_{x_k}^{x_{k+1}} = f(x_k, y_k)(x_{k+1} - x_k) = y' \cdot h$$

$$y_{k+1} = y_k + y'_k \cdot h$$

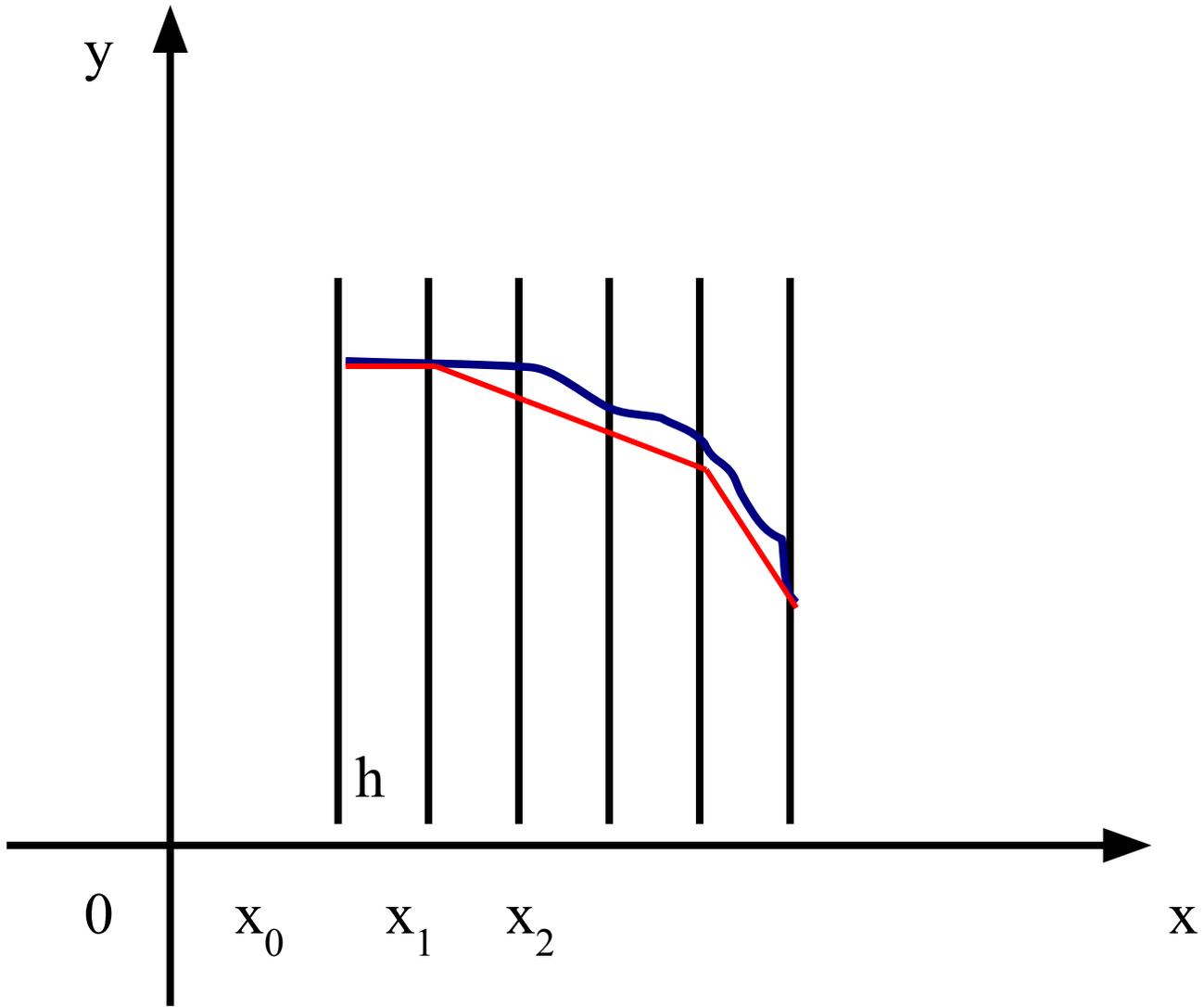
$$y_{k+1} - y_k = y'_k \cdot h$$

Обозначим $y_{k+1} - y_k = \Delta y_k$

$$\Delta y_k = h \cdot y'_k$$

$$y_{k+1} = y_k + \Delta y_k$$

*



Погрешность метода

$$|y(x_n) - y_n| \leq \frac{hM}{2N} \left[(1 + hN)^n - 1 \right]$$

где $|f(x_1, y_1) - f(x_1, y_2)| \leq N|y_1 - y_2|$

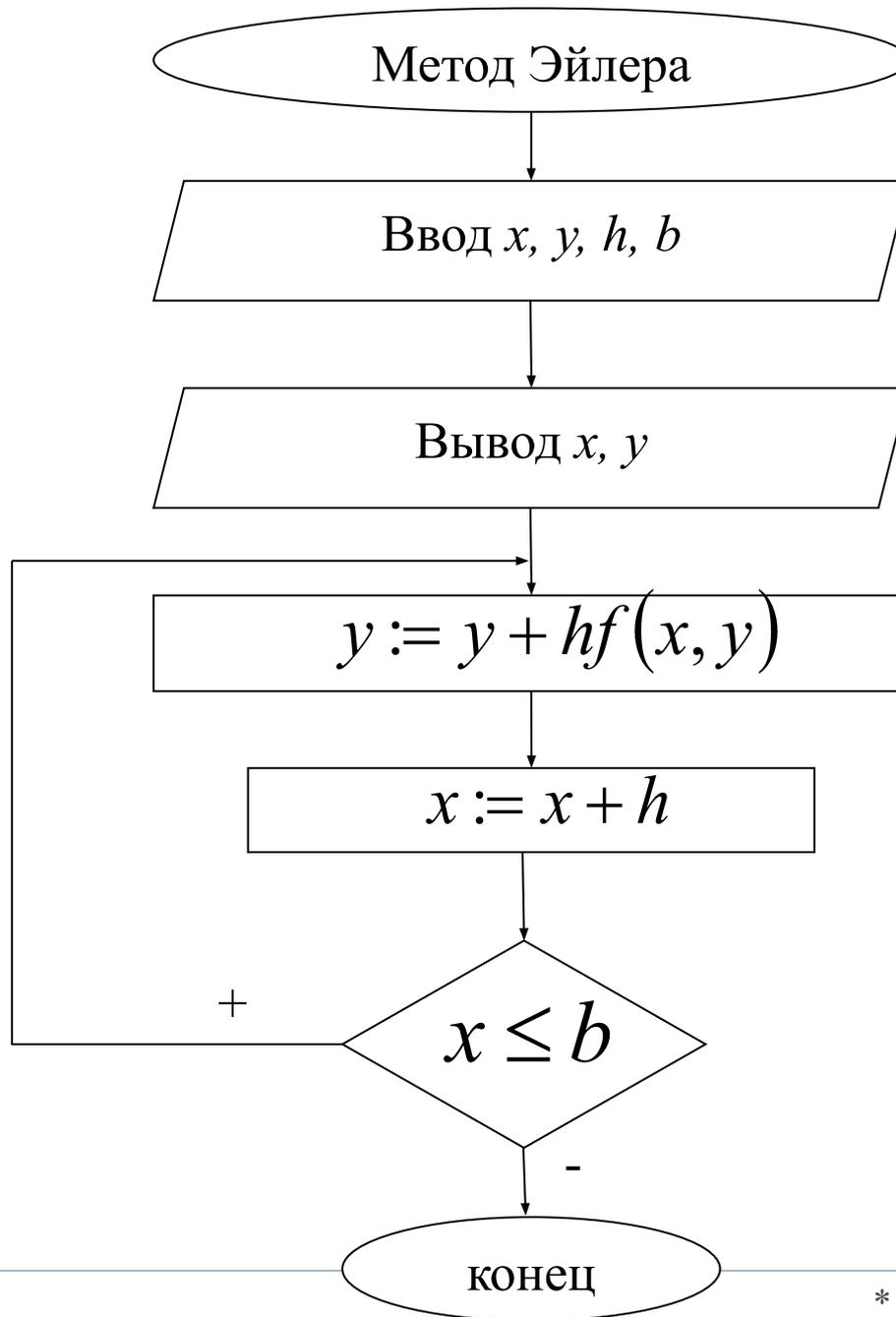
$$\left| \frac{df}{dx} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq M$$

Пример 1. Решить $y' = y - x$ с начальным условием $x_0 = 0, y_0 = 1.5$ на отрезке $[0; 1.5]$, $h = 0.25$

Решение

i	x_i	y_i	$y_i' = y_i - x_i$	$\Delta y_i = h y_i'$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
0	0	1.5000	1.5000	0.3750
1	0.25	1.875	1.6250	0.4062
2	0.50	2.2812	1.7812	0.4453
3	0.75	2.7265	1.9765	0.4941
4	1.00	3.226	2.2206	0.5552
5	1.25	3.7758	2.5258	0.6314
6	1.50	4.4072		





Усовершенствованный метод Эйлера

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot [f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1}^*)] / 2$$

вернемся к разложению функции в ряд Тейлора

$$y(t_0 + h) = y(t_0) + hy'(t_0) + \frac{1}{2} h^2 y''(t_0) + \dots$$

повышение точности расчета может быть достигнуто за счет сохранения члена, содержащего h^2 . $y''(t_0)$ можно аппроксимировать конечной разностью:

$$y''(t_0) = \frac{\Delta y'}{\Delta t} = \frac{y'(t_0 + h) - y'(t_0)}{h}.$$

С учетом этого выражения разложение функции в ряд Тейлора принимает вид

$$y(t_0 + h) = y(t_0) + \frac{1}{2} h [y'(t_0 + h) + y'(t_0)],$$

ошибка при этом имеет порядок h^3



МЕТОД

РУНГЕ-КУТТЫ



Задача. Пусть дано дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y)$$

с начальным условием

$$x = x_0, y(x_0) = y_0$$

Найти решение уравнения на отрезке $[a, b]$

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$$

$$k_1 = hf(x, y)$$

$$k_2 = hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = hf(x + h, y + k_3)$$

$$\Delta y = \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$$



i	x	y	y'=f(x, y)	k=hf(x,y)	Δy
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
0	x₀	y₀	f(x₀, y₀)	k₁⁽⁰⁾	k₁⁽⁰⁾
	$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2}$	$f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2})$	k₂⁽⁰⁾	2k₂⁽⁰⁾
	$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2}$	$f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2})$	k₃⁽⁰⁾	2k₃⁽⁰⁾
	x₀+h	y₀+k₃⁽⁰⁾	f(x₀+h, y₀+k₃⁽⁰⁾)	k₄⁽⁰⁾	k₄⁽⁰⁾
					$\frac{1}{6} \sum = \Delta y_0$



1	x₁	y₁ = y₀ + Δy	f(x₁, y₁)	k₁⁽¹⁾	k₁⁽¹⁾
	$x_1 + \frac{h}{2}$	$y_1 + \frac{k_1^{(1)}}{2}$	$f(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_1^{(1)}}{2})$	k₂⁽¹⁾	2k₂⁽¹⁾
	$x_1 + \frac{h}{2}$	$y_1 + \frac{k_2^{(1)}}{2}$	$f(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_2^{(1)}}{2})$	k₃⁽¹⁾	2k₃⁽¹⁾
	x₁+h	y₁+k₃⁽¹⁾	f(x₁+h, y₁+k₃⁽¹⁾)	k₄⁽¹⁾	k₄⁽¹⁾
					$\frac{1}{6} \sum = \Delta y_1$
2	x₂	y₁ = y₂ + Δy

Погрешность метода **R_n(h⁵)**



Пример 1. Решить дифференциальное уравнение $y' = y - x$ с начальным условием $x_0 = 0, y(x_0) = y_0 = 1.5$ методом Рунге-Кутта. Вычислить с точностью до 0,01.

Решение

$$k_1^{(0)} = (y_0 - x_0)h = 1.5000 * 0.25 = 0.3750$$

$$k_2^{(0)} = \left[\left(y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2} \right) - \left(x_0 + \frac{h}{2} \right) \right] h = [(1.5000 + 0.1875) - 0.125]0.25 = 0.3906$$



$$k_3^{(0)} = \left[\left(y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2} \right) - \left(x_0 + \frac{h}{2} \right) \right] h = [(1.5000 + 0.1953) - 0.125]0.25 = 0.3926$$

$$k_4^{(0)} = [(y_0 + k_3^{(0)}) - (x_0 + h)]h = [(1.5000 + 0.3926)$$

-

$$0.125] * 0.25 = 0.4106$$

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6} (0.3750 + 2 * 0.3906 + 2 * 0.3926 + 0.4106)$$

$$= 0.3920$$

$$y_1 = 1.50000 + 0.3920 = 1.8920$$



i	x	y	$y'=f(x, y)$	$k=hf(x,y)$	Δy
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
0	0	1,5000	1,5000	0,3750	0,3750
	0,125	1,6875	1,5625	0,3906	0,7812
	0,125	1,6953	1,5703	0,3926	0,7852
	0,25	1,8926	1,6426	0,4106	0,4106
					0,3920
1	0,25	1,89	1,6420	0,4105	0,4105
	0,375	2,0973	1,7223	0,4306	0,8612
	0,375	2,1073	1,7323	0,4331	0,8662
	0,50	2,3251	1,8251	0,4562	0,4562
					0,4323
2	0,50	2,3243	1,8243	0,4561	0,4561
	0,625	2,5523	1,9273	0,4818	0,9636
	0,625	2,5652	1,9402	0,4850	0,9700
	0,75	2,8093	2,0593	0,5148	0,5148
					0,4841

3	075	2,8084	2,0584	0,5146	0,5146
	0,875	3,0657	2,1907	0,5477	1,0954
	0,875	3,0823	2,2073	0,5518	1,1036
	1,00	3,3602	2,3602	0,5900	0,5900
					0,5506
4	1,00	3,3590	2,3590	0,5898	0,5898
	1,125	3,6539	2,5289	0,6322	1,2644
	1,125	3,6751	2,5501	0,6375	1,2750
	1,25	3,9965	2,7465	0,6866	0,6866
					0,6360
5	1,25	3,9950	2,7450	0,6862	0,6862
	1,375	4,3381	2,9631	0,7408	1,4816
	1,375	4,3654	2,9904	0,7476	1,4952
	1,50	4,7426	3,2426	0,8106	0,8106
					0,7456
6	1,50	4,7406			

Метод Рунге-Кутта при решении систем дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y' = f(x, y, z) \\ z' = g(x, y, z) \end{cases}$$



$$\Delta y_i = \frac{1}{6} (k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)})$$

$$\Delta z_i = \frac{1}{6} (l_1^{(i)} + 2l_2^{(i)} + 2l_3^{(i)} + l_4^{(i)})$$

, где



$$k_1^{(i)} = hf(x_i, y_i, z_i)$$

$$l_1^{(i)} = hq(x_i, y_i, z_i)$$



$$k_2^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}, z_i + \frac{l_1^{(i)}}{2}\right)$$

$$l_2^{(i)} = hq\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}, z_i + \frac{l_1^{(i)}}{2}\right)$$



$$k_3^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}, z_i + \frac{l_2^{(i)}}{2}\right)$$

$$l_3^{(i)} = hq\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}, z_i + \frac{l_2^{(i)}}{2}\right)$$



$$k_4^{(i)} = hf \left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_3^{(i)}}{2}, z_i + l_3^{(i)} \right)$$

$$l_4^{(i)} = hq \left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_3^{(i)}}{2}, z_i + l_3^{(i)} \right)$$

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$$

$$z_{i+1} = z_i + \Delta z_i$$



Метод последовательных приближений

$$y' = f(x, y)$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

$$dy = f(x, y) dx$$

$$\int_{y_0}^y dy = \int_{x_0}^x f(x, y) dx$$

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y) dx$$

Первое
приближение:

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_0) dx$$

Второе
приближение:

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_1) dx$$

Третье
приближение:

$$y_3(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_2) dx$$

...

n-е приближение:

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1}) dx$$

Теорема. Пусть в окрестности точки $(x_0; y_0)$ функция $f(x, y)$ непрерывна и имеет ограниченную частную производную $f'_y(x, y)$. Тогда в некотором интервале, содержащем точку x_0 , последовательность $\{y_i(x)\}$ сходится к функции $y(x)$, служащей решением дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ и удовлетворяющей условию $y(x_0) = y_0$

Оценка погрешности метода Пикара

$$|y - y_n| \leq N^n M \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}$$

где $M = \max |f(x, y)|$

$N = \max |f'_y(x, y)|$

$h = \min \left(a, \frac{b}{M} \right)$

Метод Пикара последовательных приближений

Дифференциальное уравнение n -ого порядка

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

с начальными условиями

$$y(x_0) = y_0 \quad (2).$$

Предполагается, что в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ уравнение (1) удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности решения.



Будем строить искомое решение $y = y(x)$ для значений $x \geq x_0$.

Случай $x \leq x_0$ аналогичен.

Интегрируя правую и левую части уравнения (1) в пределах от x_0 до x , получим

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x f(x, y) dx$$

или в силу начального условия (2), будем иметь

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y) dx \quad (3)$$



Так как искомая функция $y = y(x)$ находится под знаком интеграла, то уравнение (3) является *интегральным*.

Очевидно, решение интегрального уравнения (3) удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) и начальному условию (2).

Для нахождения этого решения применим метод *последовательных приближений*.

Заменяя в равенстве (3) неизвестную функцию y данным значением y_0 , получим *первое приближение*

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_0) dx$$



Далее подставив в равенстве (3) вместо неизвестной функции y найденную функцию y_1 , будем иметь *второе приближение*

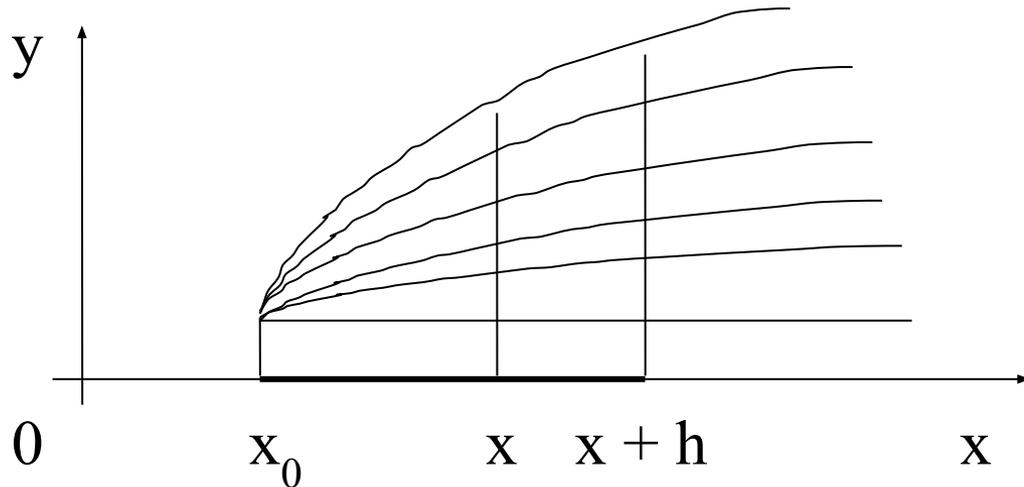
$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_1) dx \quad \text{и т.д.}$$

Все дальнейшие приближения строятся по формуле

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1}) dx \quad (\mathbf{n} = 1, 2, \dots)$$

Геометрически последовательные приближения представляют собой кривые $y_n = y_n(x)$ ($\mathbf{n} = 1, 2, \dots$), проходящие через общую точку $\mathbf{M}_0(x_0, y_0)$.





Замечание. При методе последовательных приближений в качестве начального приближения y_0 , можно выбирать любую функцию, достаточно близкую к точному решению y .

Например, иногда выгодно в качестве y_0 брать конечный отрезок ряда Тейлора искомого решения.



Заметим, что при пользовании методом последовательных приближений аналитичность правой части дифференциального уравнения необязательна, поэтому этот метод можно применять и в тех случаях, когда разложение решения дифференциального уравнения в степенной ряд невозможно.

Пример 1. Методом последовательных приближений найти приближенное решение дифференциального уравнения

$$y' = x - y,$$

Удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$.



Решение. В качестве начального приближения возьмем $y_0(x) = 1$. Так как

$$y = 1 + \int_0^x (x - y) dx$$

то будем иметь

$$y_1 = 1 + \int_0^x (x - 1) dx = 1 - x + \frac{x^2}{2}$$

Аналогично

$$y_2 = 1 + \int_0^x \left(x - 1 + x - \frac{x^2}{2} \right) dx = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{6}$$



Подобным же образом получим

$$y_3 = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24}$$

$$y_4 = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^5}{120}$$

и т.д.



Система дифференциальных уравнений (метод Пикара)

Дана система дифференциальных уравнений

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = \bar{f}(x, \bar{y}) \quad (4)$$

где

$$\bar{y}(x_0) = \bar{y}_0 \quad (5)$$

Записывая векторное уравнение (4) в интегральной форме, будем иметь



$$\bar{y} = \bar{y}_0 + \int_{x_0}^x \bar{f}(x, \bar{y}) dx \quad (6)$$

где под интегралом от вектор-функции

$$\bar{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \boxtimes \\ f_n \end{bmatrix}$$

понимается вектор

$$\int_{x_0}^x \bar{f} dx = \begin{bmatrix} \int_{x_0}^x f_1 dx \\ \boxtimes \\ \int_{x_0}^x f_n dx \end{bmatrix}$$



Последовательные приближения $\bar{y}^{(p)}$ ($p = 1, 2, \dots$) определяются по формуле

$$\bar{y}^{(p)} = \bar{y}_0 + \int_{x_0}^x \bar{f}(x, \bar{y}^{(p-1)}) dx$$

Причем обычно полагают $\bar{y}^{(0)} \equiv \bar{y}$

Этот метод годится также для дифференциального уравнения n -го порядка, если его записать в виде системы.



Пример 2. Построить несколько последовательных приближений для решения системы

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = x + y_1 y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = x^2 - y_1^2 \end{cases}$$

удовлетворяющего начальным условиям

$$y_1(0) = 1; \quad y_2(0) = 0$$



Решение.

Имеем:

$$y_1 = 1 + \int_0^x (x + y_1 y_2) dx$$

$$y_2 = \int_0^x (x^2 - y_1^2) dx$$

Отсюда,
полагая

$$y_1^{(0)} = 1; \quad y_2^{(0)} = 0$$

получаем

М

$$y_1^{(1)} = 1 + \int_0^x (x + 0) dx = 1 + \frac{x^2}{2}$$

$$y_2^{(1)} = \int_0^x (x^2 - 1) dx = -x + \frac{x^3}{3}$$



$$y_1^{(2)} = 1 + \int_0^x \left[x + \left(1 + \frac{x^2}{2} \right) \left(-x + \frac{x^3}{3} \right) \right] dx = 1 - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{36}$$

$$y_2^{(2)} = \int_0^x \left[x^2 - \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{4} \right) \right] dx = -x - \frac{x^5}{20}$$

И т.д.



Окончание вычислений

$$|y - y_n| \leq N^n M \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}$$