Основні поняття теорії множин
Алгебра множин

Лекції 1,2

Д.е.н., к.т.н. професор
В.Л. Плескач

Факультет інформаційних технологій
Кафедра програмування та комп'ютерної техніки, КНУ

Множина. Елементи множин

Множина – це деяка сукупність об’єктів (предметів, ідей, понять), що розглядається як єдине ціле. Самі об’єкти є елементами.

Елементи множини – це об'єкти, які утворюють цю множину, і можуть мати деякі властивості і знаходитися в деяких відношеннях між собою або з елементами інших множин.

Позначення

Множини позначають заголовними, а елементи множин - рядковими латинськими буквами або рядковими латинськими буквами з індексами.

Запис $A=\{a,b,d,h\}$ означає, що множина A складається з чотирьох елементів a, b, d, h.

Твердження, що скінчена множина A складається з n елементів, записується саме так:

$$A=\{a_1,a_2,...,a_n\}.$$

Позначення

Приналежність елемента множини позначається символом $\in$: $a \in A$ (читається: елемент a належить множині A).

У противному випадку позначають $a \notin A$ (читається: елемент a не належить множині A).

Елементами множин можуть бути інші множини, тоді ці елементи можуть позначатися заголовними буквами. Для деяких множин у ДМ використовують сталі позначення N, Z, Q, R, C.

Позначення

Приклад.

$A = \{D, C\}$,

$D = \{a, b\}$,

$C = \{c, d, e\}$.

При цьому $D \in A$, $C \in A$, проте $a \notin A$ и $c \notin A$.

Приклад.

$A = \{\{x, y\}, z\}$.

Цей запис означає, що множина A містить два елементи: множину $\{x, y\}$ та елемент z.

Скінчені і нескінчені множини

Множина називається скінченною, якщо вона містить скінченну кількість елементів і нескінченною, якщо вона містить нескінченну кількість елементів.

Приклади. Множина ***A={1,2,3,4,5,6,7,8,9,0}*** цифр у десятковій системі числення є скінченною.

B={{1}, {2}, 0}.

Множина точок кола є нескінченною.

Упорядковані множини

- Упорядкованою вважають таку множину, у якій є важливим порядок слідування елементів.

Наприклад, ***упорядкованою*** є множина, в якій кожен елемент має свій порядковий номер.

- Позначають упорядковану множину, як правило, або круглими, або трикутними дужками.

$A=\langle 1,2,3\rangle$, у загальному випадку : $A=\langle a_1,a_2,..,a_n\rangle$, $n\in N$;

$B=(a,b,c)$.

Способи задання множин

- ***Перерахуванням елементів***

$$A = \{a_1, a_2, \ldots , a_n\}.$$

Приклад.

Множина студентів-відмінників у групі позначимо Z_{1a} представимо її перерахуванням:

Z_{1a} = {Іванов, Петров, Сидоров}

Способи задання множин

- ***Через взначальну властивість***

Множина $X = \{x \mid P(x)\}$, где $P(x)$ означає, що елемент x має властивість $P(x)$.

Приклад.

Множину N_{10} усіх натуральних чисел, що строго менше 20-ти, можна представити так:

$$N_{10}=\{x \mid x \in N,\ x<20\}.$$

Способи задання множин

- ***Рекурсією***
- графіком (таблицею)

Множина значень рекурсивної функції є рекурсивно - заданою множиною

$F=\{f_1, f_2, f_3, \ldots\}$.

$$\begin{cases} f_1=1 \\ f_2=1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n = 3f_{n-2}+f_{n-1}, \quad n=3,4,\ldots \end{cases}$$

Так, $f_3 = 3f_1+f_2= 3\times1+1=4$, $f_4=3f_2+f_3=3\times1+4=7$ і т. і.

Підмножина

Множина A, усі елементи якої належать множині B, називають ***підмножинами*** множини B.

Позначення: $A \subset B$; $A \subseteq B$.

Приклад.

R – множина дійсних чисел;

N – множина натуральних чисел.

Множина N є підмножиною множини R.

Рівність множин

Неупорядковані множини рівні (рівнопотужні), якщо вони містять однаковий набір елементів.

Позначають: ***A=B***.

Якщо множини не рівні, це позначається ***A≠B***.

Рівність множин

A=B тоді і тільки тоді, якщо із умови $x \in A$ слідує $x \in B$ та з умови $y \in B$ слідує $y \in A$.

Приклад.

Нехай задано множини

$A = \{1,2,3,4,5\}$;

B – множина натуральних чисел від 1 до 5;

$C = \{c \mid 1 \le c \le 5, c \in N\}$;

$D = \{4,1,5,2,3\}$.

Ці множини містять один набір елементів, тому

$A=B=C=D$

Приклад.

Нехай задано множини:

A={Іванов, Петров, Сидоров};

B={Іванов, Петров, Сидоров}.

A=B, якщо йдеться про тих же самих людей.

Інакше ***A≠B***.

Рівність множин

Приклад.

Нехай А – множина остач, що отримуються при послідовному діленні натуральних чисел

{3, 4, 5, 6,…} на ***3***:

A={0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, …}.

Ця множина містить всього три елементи:

0, 1, 2.

Тому її можна записати у вигляді:

A={0, 1, 2}.

Потужність множин

Число елементів у скінченній множині M називають потужністю M і позначають $|M|$.

Приклад.

Нехай задано множину $A=\{x \mid 4 \le x \le 12,\ x \in N\}$,

тоді $|A|=9$.

Приклад.

B – множина всіх шахових фігур,

C – множина всіх шахових фігур, що якими користувалися при проведенні гри.

$|B|=6$ (пішак, тура, слон, кінь, ферзь, король)

$|C|=32$ (16 білих і 16 чорних).

Строге і нестроге включення

Нестроге включення* позначають** $A \subseteq B$, та означає, що A – ***підмножина множини B, і можливо співпадає з B.

Строге включення* позначають** $A \subset B$, та означає, що A – ***підмножина множини B, і не співпадає з B. $A \subset B$ читають: "A належить (або не включається у) до B" .

Зауваження. Не можна вважати рівносильними поняття відношення **приналежності** і **включення** однієї множини до іншої за причини різної смислової інтерпретації.

Строге і нестроге включення

Виконання співвідношень $A \subseteq B$ і $B \subseteq A$ є можливим за умови при $A = B$.

$A = B$, якщо $A \subseteq B$ і $B \subseteq A$.

Ці співвідношення є ознакою рівності множин через відношення включення.

Строге включення представляють співвідношенням $A \subset B$, $A \neq B$.

Строге і нестроге включення

Приклад.

X – множина студентів групи І,

Y – множина відмінників групи І.

Тоді $Y \subseteq X$,

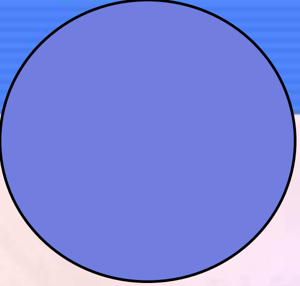
Z – множина студентів усіх потоків 1 курсу.

Тоді $X \subset Z$. Включення ***X*** до ***Z*** є строгим.

Для трьох множин А, В, С справедливі такі співвідношення:

$$A \subseteq A; \quad A \not\subset A; \quad A \subseteq B \wedge B \subseteq C \rightarrow A \subseteq C;$$

$$A \subseteq B \wedge B \subset C \rightarrow A \subset C; \quad |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



Універсальна множина

Універсальна множина – це така множина, що містить всі **можливі** (допустимі) підмножини (елементи).

Універсальна множина позначається символом ***U***.

Універсальна множина ***U*** може відрізнятися для кожної окремої задачі і визначається умовою задачі.

Порожня множина

Порожньою називають таку множину, яка не містить ніяких елементів.

Порожня множина позначається спеціальним символом $\varnothing$.

Операції з порожньою множиною:

$$A \cup \varnothing = A \qquad\qquad A \cap \varnothing = \varnothing$$

Порожня множина $\varnothing$ є підмножиною будь-якої множини, тобто $\varnothing \subseteq \boldsymbol{A}$, де $\boldsymbol{A}$ – будь-яка множина.

Порожня множина

Порожня множина - це також множина, тому, якщо деяка множина ***A*** не містить жодного елементу, то $A=\varnothing$; $|A|=0$.

Запис $A=\{\varnothing\}$ означає, що ***A*** містить один елемент – $\varnothing$, $|A|=1$.

Множина-степінь (булеан)

Множина всіх підмножин множини ***X*** називається ***множиною-степенем X*** або ***булеаном*** і позначається **P** ***(X)***.

Для довільної множини ***X*** з ***n*** елементів її множина-степінь **P** ***(X)*** містить 2^n елементів:

$$|\mathrm{P}(X)| = |2^X| = 2^{|X|} = 2^n$$

<u>Приклад..</u>

A={a, b, c}.

$$2^A=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\},\{a,b,c\}\}$$

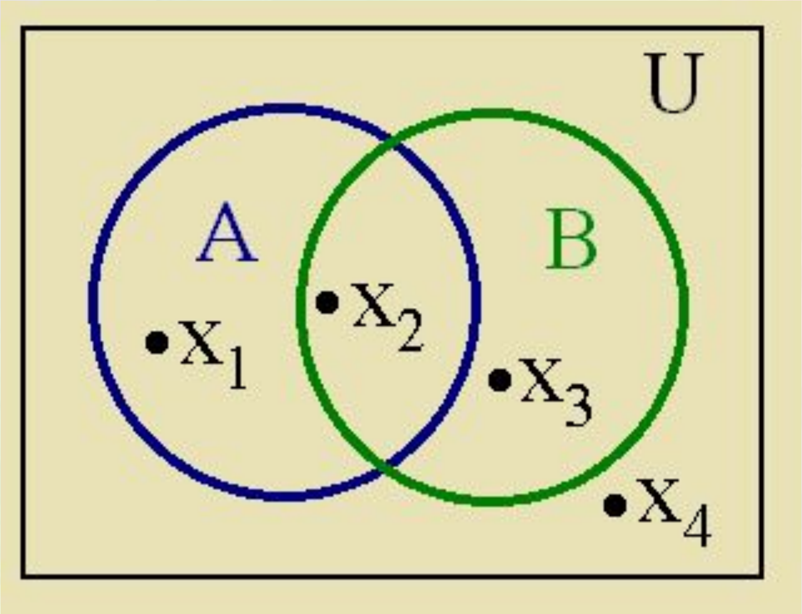
Порожня множина має тільки одну підмножину – саме порожню множину, тому $\mathrm{P}(\varnothing)=\{\varnothing\}$.

Геометрична інтерпретація множин : діаграми Венна

Побудова діаграм Венна полягає в поділі площини на 2^n підмножин за допомогою ***n*** замкнутих фігур (де ***n*** – число зображуваних множин). Кожна фігура на діаграмі представляє окрему множину з 2^n підмножин.

Діаграми Венна для двох множин

Діаграма Венна для двох множин ***A*** і ***B*** виглядає таким чином.



$$x_1 \in A, x_1 \notin B$$

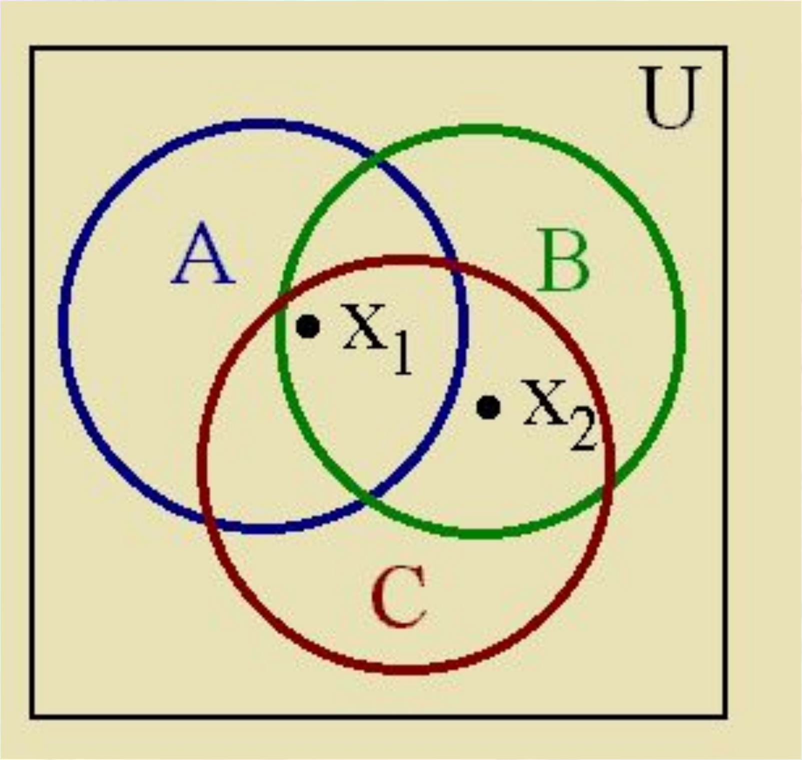
$$x_2 \in A, x_2 \in B$$

$$x_3 \in B, x_3 \notin A$$

$$x_4 \notin A, x_4 \notin B$$

Діаграми Венна для трьох множин

Діаграма Венна для трьох множин ***A***, ***B*** і ***C*** виглядає таким чином.



$x_1 \in A, x_1 \in B,$

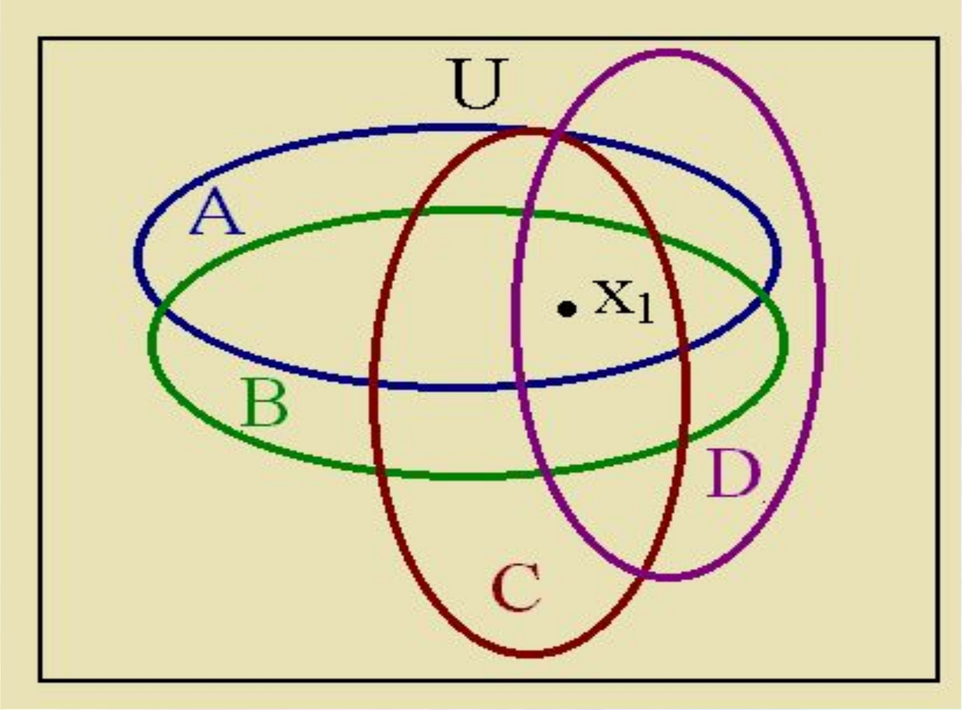
$x_1 \in C$

$x_2 \in B, x_2 \in C,$

$x_2 \notin A$

Діаграми Венна для чотирьох множин

Діаграму Венна для чотирьох множин ***A***, ***B***, ***C*** і ***D*** можна зобразити таким чином.



$x_1 \in A,$

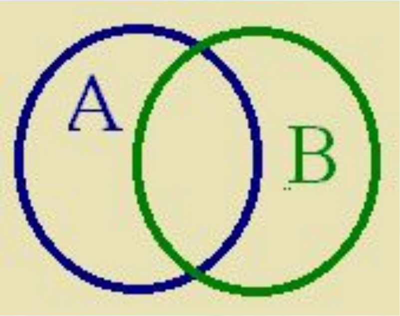
$x_1 \in B,$

$x_1 \in C,$

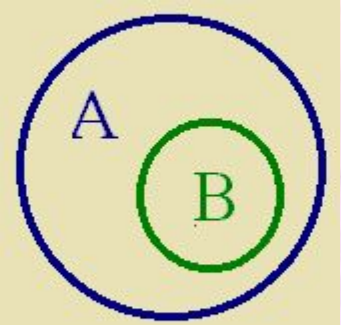
$x_1 \in D$

Кола (круги) Ейлера

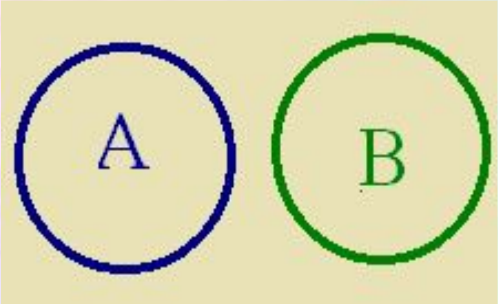
Індивідуальні відношення між заданими множинами зображують за допомогою кругів Ейлера (www.youtube.com/watch?v=unXIsqKQLOg).



A* = *{1, 4, 6};
B* = *{1, 5, 8};
Загальний елемент – ***1***
$A \cap B$



A* = *{1, 4, 6};
B* = *{1, 6};
$B \subseteq A$



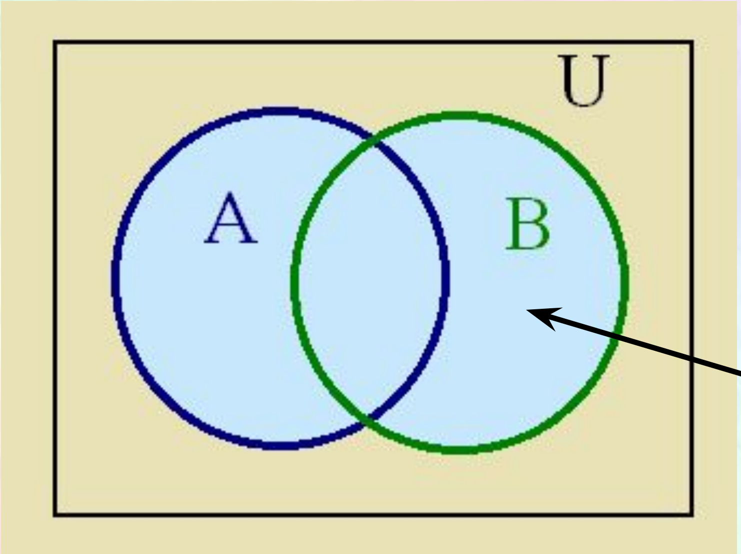
A* = *{1, 4, 6};
C* = *{3, 5, 8};
Немає спільних елементів ***A*** і ***B***.
$A \neq B$

Множина 2^U всіх підмножин універсальної множини U, із заданими на ній чотирма операціями, складають алгебру множин.

Операції над множинами

Об'єднання (сума) ***A∪B*** є множина, яка містить всі елементы, що належать або ***A***, або ***B***, або ***A*** та ***B*** водночас.

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ або } x \in B\}$.



A∪ B

Приклад .

Нехай дано множини:

$A=\{a, b, m\}$;

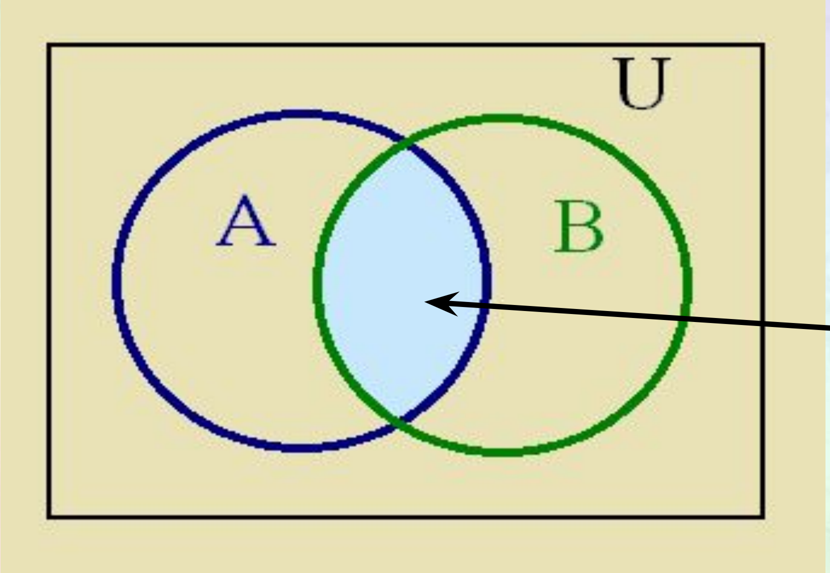
$B=\{m, n, c, p\}$.

$A \cup B = \{a, b, c, m, n, p\}$

Операції над множинами

Перетин (добуток) $A \cap B$ є множиною, що містить тільки ті елементи, що належать A і B водночас.

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \in B\}$.



$A \cap B$

Операції над множинами

Приклад .

Нехай дано множини:

$A=\{a, b, m\}$;

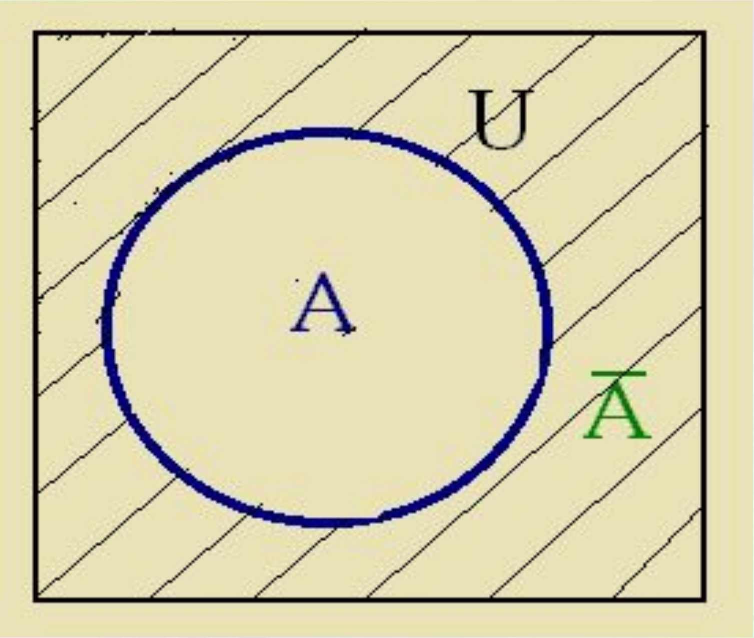
$B=\{m, n, c, p\}$.

$A \cap B =$ $\{m\}$

Операції над множинами

Доповнення (заперечення) $\bar{A}$ (“не A”) є множиною $U \setminus A$.

$$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}.$$



Приклад **.**

$Z = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$.

У цій задачі $U=Z$.

нехай Z_- – множина від’ємних чисел та 0, тоді:

$$Z_- = \{\ldots -2, -1, 0\}.$$

Доповненням до множини Z_- є множина натуральних чисел:

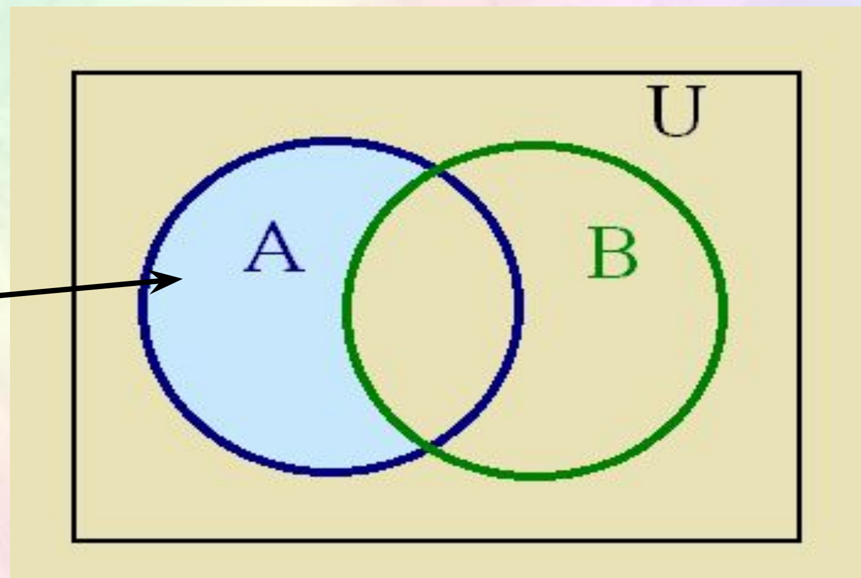
$$N=\{1,2,\ldots\}.$$

Операції над множинами

***Різниця** $A\backslash B$* є множина, що містить усі елементи A, і не належить B.

$$A\backslash B=\{x|x\in A,\ x\notin B\};\quad A\backslash B\neq B\backslash A$$

$A\backslash B$



$A\backslash B = A \cap \square B$

Приклад.

Нехай дано множини:

$A=\{a, b, m\}$;

$B=\{m, n, c, p\}$.

$A \setminus B = \{a,b\}$

$B \setminus A = \{n,c,p\}$

Пріоритет операцій в алгебрі множин

Пріоритет операцій в алгебрі множин такий:

1. **□*A***
2. $\boldsymbol{A \cap B}$
3. $\boldsymbol{A \cup B}$
4. $\boldsymbol{A \setminus B}$

Приклад.

Розставити дужки (визначити послідовність виконання операцій) у формулі:

$$E=A\backslash B\cup\square A\cap D\backslash B$$

$$E=A\backslash(B\cup((\square A)\cap D))\backslash B.$$

$$E=A\backslash B\cup((\square A)\cap D)\backslash B.$$

$$E=A\backslash B\cup(\square A)\cap D\backslash B.$$

$$E=(A\backslash(B\cup((\square A)\cap D)))\backslash B.$$

Закони алгебри множин

1. ***Комутативні закони***

$A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

2. ***Асоціативні закони***

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

3. ***Дистрибутивні закони***

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

4. **Властивості *порожньої* та *універсальної* множин**

$$A \cup \varnothing = A$$

$$A \cup U = U$$

$$A \cap U = A$$

$$A \cap \varnothing = \varnothing$$

Закони алгебри множин

5. ***Закони ідемпотентності***

$A \cup A = A$

$A \cap A = A$

6. ***Закон інволюції (подвійного заперечення)***

$\overline{\overline{A}} = A$

7. ***Закон заперечення***

$A \cap \overline{A} = \varnothing$

8. ***Закон виключеного третього***

$A \cup \overline{A} = U$

Закони алгебри множин

9. ***Закон елімінації (поглинання)***

$A \cap (A \cup B) = A$

$A \cup (A \cap B) = A$

10. ***Закони де Моргана***

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Приклад.

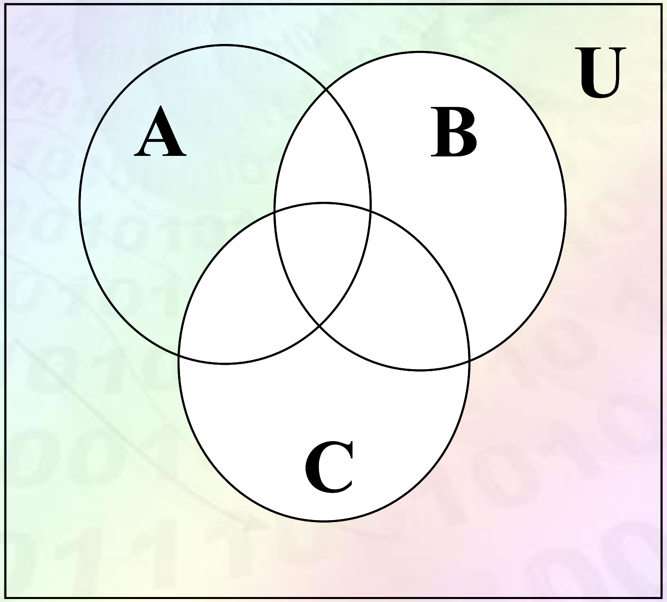
Довести за допомогою діаграм Венна дистрибутивний закон.

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

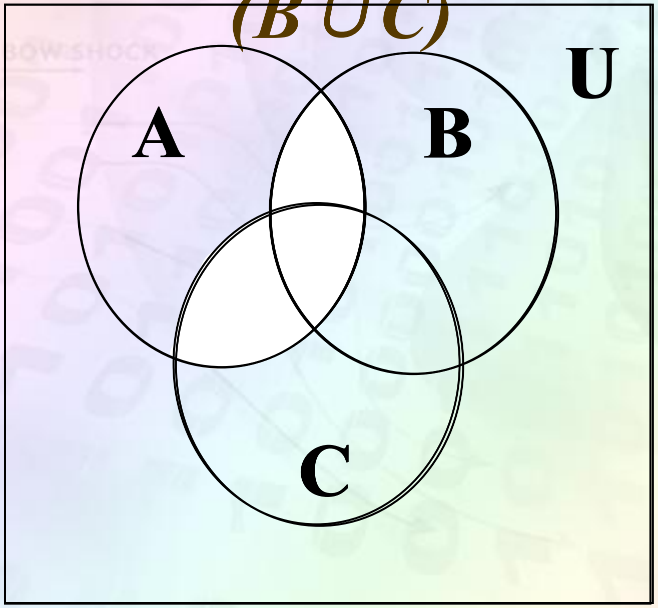
Продовження прикладу.

$B \cup C$

$A \cap (B \cup C)$



$A \cap (B \cup C)$

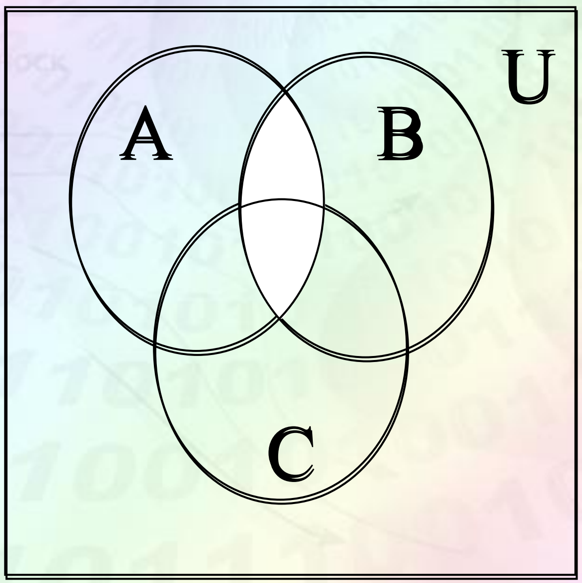


Закони алгебри множин

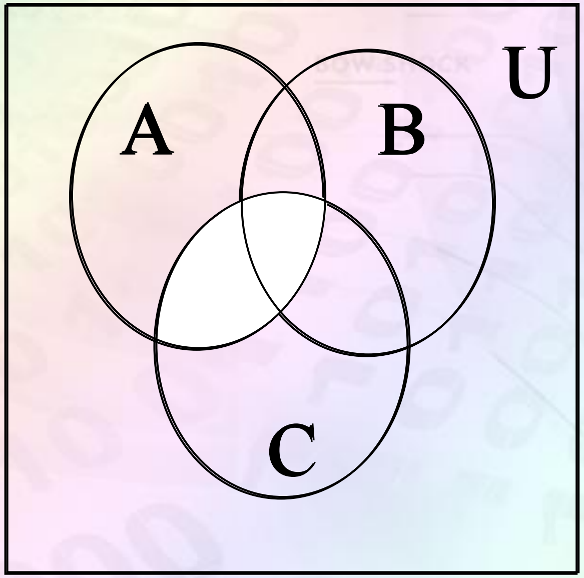
Продовження прикладу.

(A∩B) ∪ (A∩C)

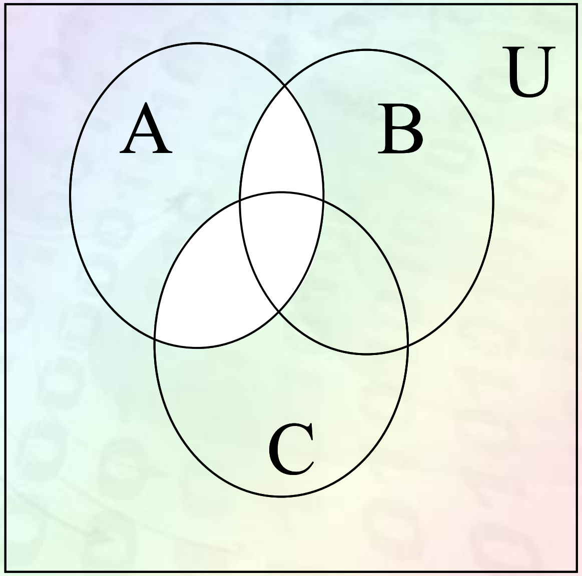
(A∩B)



(A∩C)



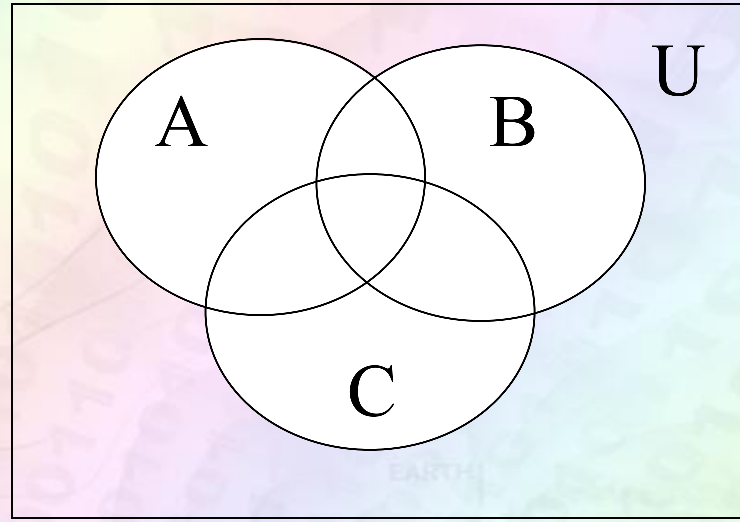
(A∩B) ∪ (A∩C)

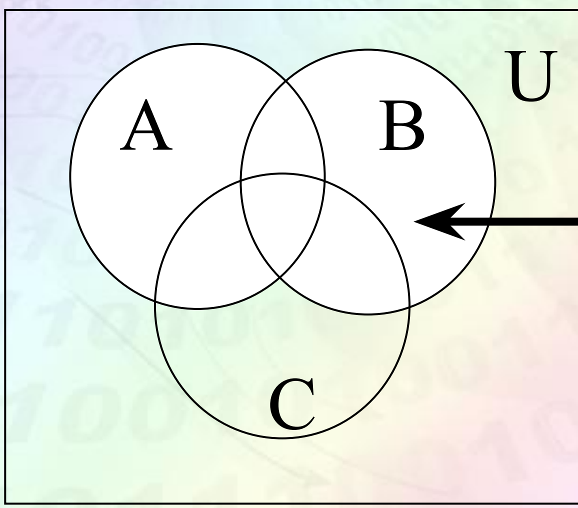


Закони алгебри множин

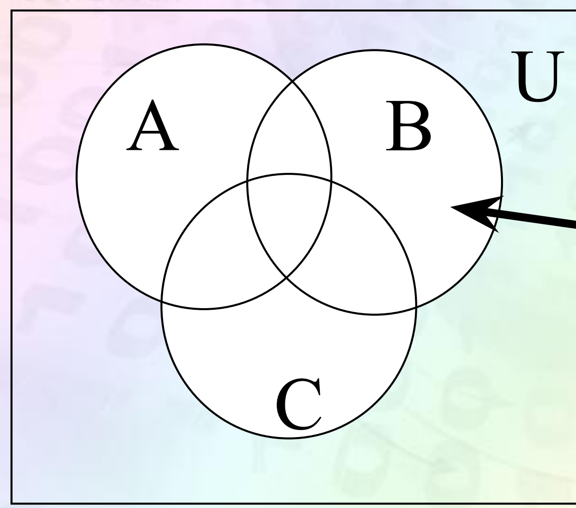
риклад.

Записати формулу, що відповідає заштрихованій частині діаграми Венна





$(A \cup B)$



$(A \cup B)\setminus C$

У результаті отримали формулу $(A \cup B)\setminus C$

Приклад.

Спростити вираз:

$$\overline{(\overline{A}\cup B\cup C)}\cap(A\cap(B\cup\overline{C}))\cap\overline{B}=$$

$$=(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cap(A\cap(B\cup\overline{C}))\cap\overline{B}=$$

$$=A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap A\cap\overline{B}\cap(B\cup\overline{C})=$$

$$=A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap(B\cup\overline{C})=$$

$$=A\cap\overline{B}\cap\overline{C}$$

Відповідь: $A\cap\overline{B}\cap\overline{C}$

Взаємно-однозначна відповідність

Взаємно-однозначною називається така відповідність між множинами A та B, при якій кожному елементу $a \in A$ відповідає один і тільки один елемент $b \in B$ і кожному елементу $b \in B$ відповідає один і тільки один елемент $a \in A$.

Функція, що визначає взаємно-однозначну відповідність називається ***бієктивною*** функцією або ***бієкцією***.

Еквівалентні множини

Множини A і B називаються еквівалентними $(A \sim B)$, якщо між ними існує бієкція (принаймні одна).

Еквівалентні множини називають р***івнопотужними***, що позначається так:

$$|A| = |B|.$$

Еквівалентними один одному виявляються усі скінченні множини з однаковим числом елементів n (потужність кожної з цих множин дорівнює n).

Зліченні множини

Множина A називається зліченною, якщо вона еквівалентна натуральному ряду N ($A \sim N$).

За допомогою бієкції $\phi = N \to A$ можна перерахувати всі елементи з A, забезпечивши їх індексами. Можна стверджувати, що:

$$A = \{a_n\},\ n = 1, 2, \ldots, \infty.$$

Зліченні множини

Множина парних натуральних чисел $N_ч=\{2,4,\ldots,m,\ldots\}$, всіх натуральних чисел $N=\{1,2,\ldots,n, \ldots\}$, цілих чисел Z та раціональних чисел Q послідовно вкладені:

$$N_ч \subset N \subset Z \subset Q.$$

Хоча нижче подані множини не є рівними, вони еквівалентні одна одній, тобто, мають однакову потужність і є зліченними:

$$|N_ч| = |N| = |Z| = |Q|.$$

Нескінченні множини. Зліченні, континуальні множини

Існують нескінченні зліченні множини, і їх потужність вважають більшою, ніж $|N|$.

Множина точок відрізку $[0, 1] = \{x \in R;\ 0 \le x \le 1\}$ не є зліченною (теорема Г. Кантора). Її потужність називають ***континуум*** і позначають малою літерою ***c***: $|[0, 1]| = c$.

Множину $[0, 1]$ і будь-яку еквівалентну множину називають ***континуальними***.

Нескінченні множини.
Зліченні, континуальні множини

на осі дійсних чисел ***R*** *континуальними* (тобто еквівалентними одна одній й відрізку

[0, 1]) є *множини*:

- ***[a,b]***,
- ***(a, b)***, при будь-якому ***a<b***;
- ***(0, +∞)***;
- множина ***(– ∞, + ∞)***, що дорівнює ***R***.

Континуальними є також множини точок будь-якого квадрата і кола на площині R^2, паралелепіпеда і кулі у просторі R^3 .