Надежность автоматизированных систем

- **Раздел 1. Надежность аппаратного обеспечения автоматизированных систем**
- **Тема 3.** Статистические методы определения показателей надежности аппаратного обеспечения автоматизированных систем

Лекция

Учебные вопросы

- 1. Экспоненциальное (показательное) распределение
- 2. Нормальное распределение (распределение Гаусса)
- 3. Усеченное нормальное распределение
- 4. Логарифмически нормальное распределение
- 5. Распределение Вейбулла
- 6. Гамма-распределение
- 7. Равномерное распределение
- 8. Смесь распределений

- Показатели надежности аппаратного обеспечения АС являются ***непрерывными случайными величинами***, в связи с этим для определения их значений используется аппарат математической статистики – законы распределения непрерывных случайных величин.

1. Экспоненциальное (показательное) распределение

- Экспоненциальное (показательное) распределение задается функцией:
- $F(t)=1-e^{-\lambda t}$ при $t \geq 0$.
- Экспоненциальным законом распределения можно аппроксимировать время безотказной работы большого числа систем.

- Это распределение имеет один параметр $\lambda = \dfrac{1}{T_1}$, где T_1 - средняя наработка

до отказа.

- Таким образом, параметр λ характеризует число отказов элемента в единицу времени, называется **интенсивностью отказов** и имеет размерность 1/время.

- *Плотность экспоненциального распределения* задается следующим образом:

$$f(t)=\lambda e^{-\lambda t}.$$

- *Вероятность безотказной работы* за время t (функция надежности) определяется с помощью выражения:

$$P(t)=e^{-\lambda t}.$$

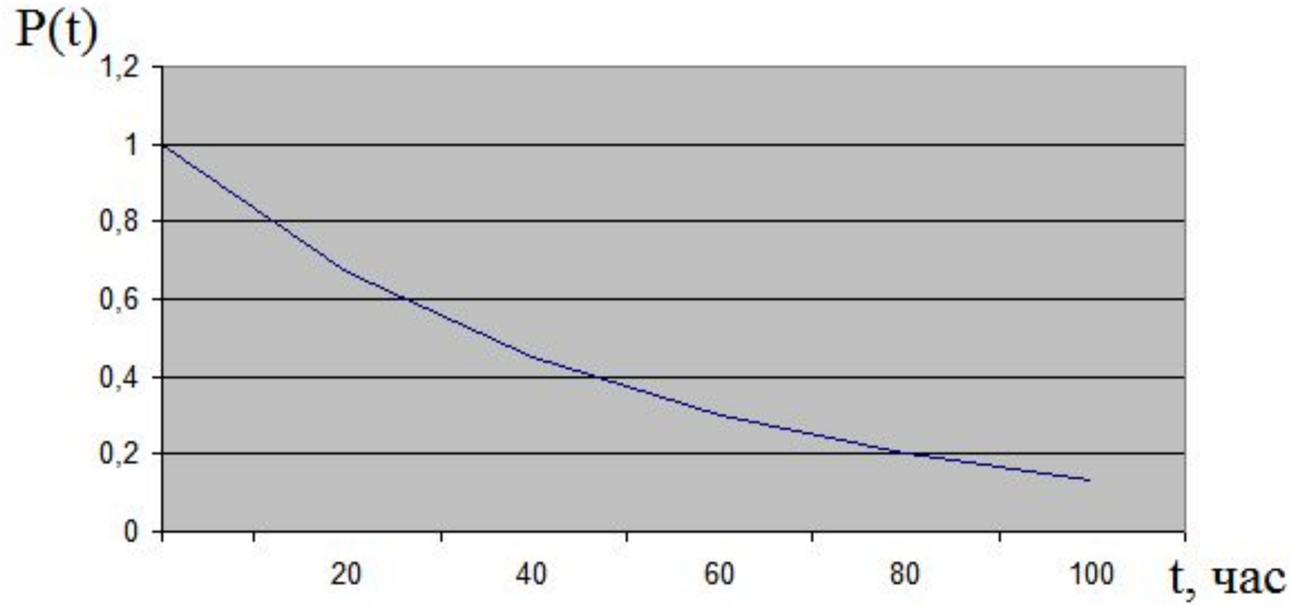


Рис. 1. Функция надежности $P(t)=e^{-\lambda t}$ при $\lambda=0,02$ час$^{-1}$

- Экспоненциальное распределение выделяется среди других распределений свойством «отсутствия памяти», которое означает, что система, проработавшая время t, имеет такое же распределение, что и новая, только начавшая работу.
- Данное свойство как бы исключает износ и «старение» системы.

- Числовые характеристики экспоненциального распределения выражаются через его параметр:
- математическое ожидание $M(X) = \frac{1}{\lambda}$;
- дисперсия $D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$;
- среднее квадратическое отклонение

$$\sigma(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

- Итак, при экспоненциальном распределении между показателями надежности системы существуют следующие зависимости:

$P(t)=e^{-\lambda t}$, $T_1 = \dfrac{1}{\lambda}$, $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$.

2. Нормальное распределение (распределение Гаусса)

- Нормальное распределение определяется плотностью

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < t < +\infty$$

и зависит от двух параметров m и σ, которые являются соответственно математическим ожиданием и среднеквадратическим отклонением времени безотказной работы системы.

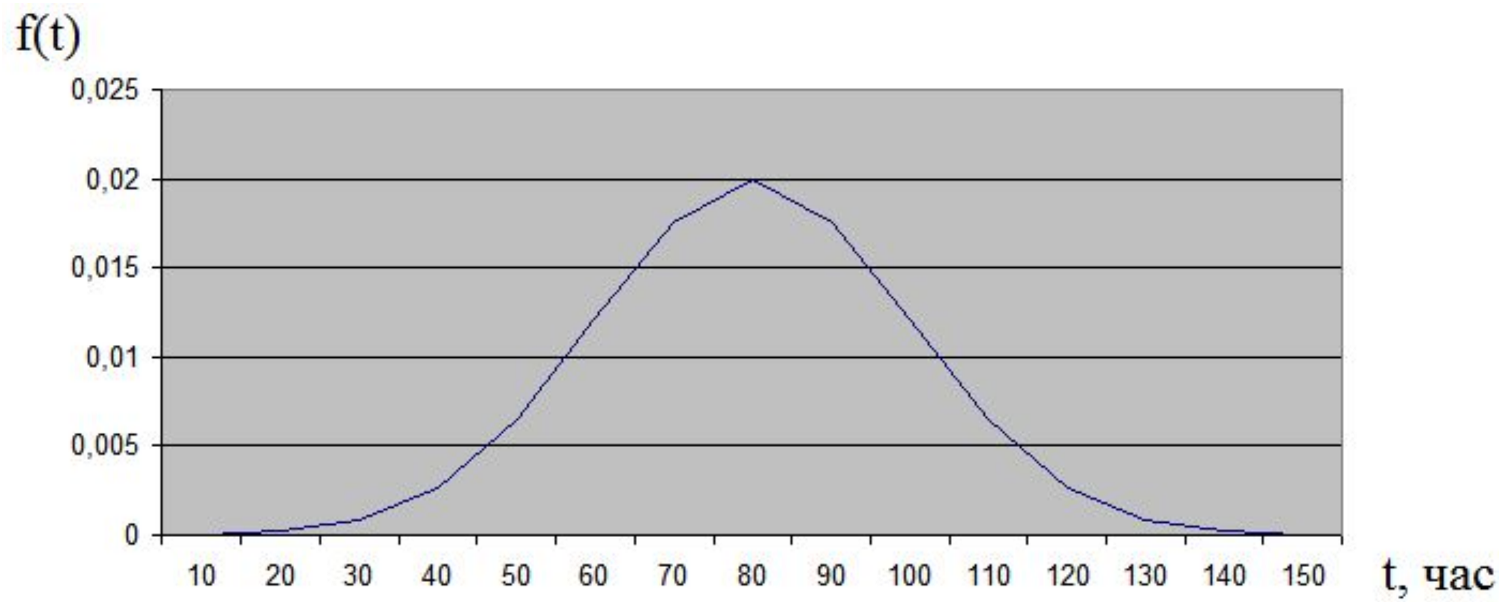


Рис. 2. Плотность нормального распределения (кривая Гаусса) с параметрами m=80 час, σ=20 час

- Согласно закону больших чисел, распределение всегда подчиняется нормальному закону, если на изменение случайной величины оказывают влияние многие примерно равнозначные факторы.
- Для нормального распределения функция надежности вычисляется по формуле:

$$P(t) = \int_t^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = 0,5 - {}_0\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)$$

- где $\Phi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ - функция Лапласа,

значения которой сведены в таблицы.

3. Усеченное нормальное распределение

- Усеченное нормальное распределение получается из нормального при ограничении интервала изменения случайной величины на промежуток [0,+∞].
- Плотность распределения записывается так же, как для нормального распределения, но с коэффициентом пропорциональности *c*:

$$f(t) = \frac{c}{\sigma_0\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m_0)^2}{2\sigma_0^2}}$$

- Усеченное нормальное распределение зависит от двух параметров m_0 и σ_0, где m_0 - значение случайной величины, соответствующее максимальному значению f(t), называемое *модой*.

  Коэффициент *c* определяется из условия нормировки:

$$\int_0^\infty f(t)dt = 1,$$

откуда

$$c = \frac{1}{0,5 + \Phi_0\left(\frac{m_0}{\sigma_0}\right)}$$

- Математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение усеченного нормального распределения определяются через параметры m_0 и σ_0 по формулам:
- $$m = m_0 + k\sigma_0, \qquad \sigma = \sigma_0\sqrt{1 + k\frac{m_0}{\sigma_0} - k^2},$$

где $$k = \frac{c}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{m_0^2}{2\sigma_0^2}}.$$

4. Логарифмически нормальное распределение

- В логарифмически нормальном распределении логарифм случайной величины подчиняется нормальному закону с плотностью

$$f(t) = \frac{1}{st\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln t - \mu)^2}{2s^2}} ,$$

- где μ и s - параметры распределения.

- Математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение определяются в соответствии с формулами:
- $m = \sqrt{e^{2\mu + s^2}}$, $\sigma = \sqrt{e^{2\mu + s^2}(e^{s^2} - 1)}$.
- Логарифмически нормальное распределение применяют для описания случайных величин, представляющих собой произведение достаточно большого числа случайных величин.

5. Распределение Вейбулла

- Распределение Вейбулла является достаточно универсальным, благодаря возможности варьирования двух параметров. Характеризуется плотностью распределения:

$$f(t) = \frac{\alpha t^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha}} e^{-\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha}}$$

- с параметром формы α и параметром масштаба β.

- Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение выражаются следующим образом:

$$\bar{m} = \beta \quad (1+\frac{1}{\alpha}), \qquad \sigma = \beta\sqrt{\Gamma(1+\frac{2}{\alpha}) - \Gamma^2(1+\frac{1}{\alpha})},$$

где $\Gamma(t) = \int\limits_0^{+\infty} x^{t-1}e^{-x}dx$ - гамма-функция.

- Универсальность распределения Вейбулла объясняется следующим:
- при α=1 оно превращается в экспоненциальное;
- при α<1 функции плотности и интенсивности отказов убывающие;
- при α>1 интенсивность отказов возрастающая;
- при α=3,3 распределение близко к нормальному.

- Зависимости между показателями надежности имеют вид:
- $$P(t) = e^{-\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha}}$$,
- $$T_1 = \beta \quad (1 + \frac{1}{\alpha})$$,
- $$\lambda = \frac{\alpha}{\beta^{\alpha}} t^{\alpha - 1}$$.

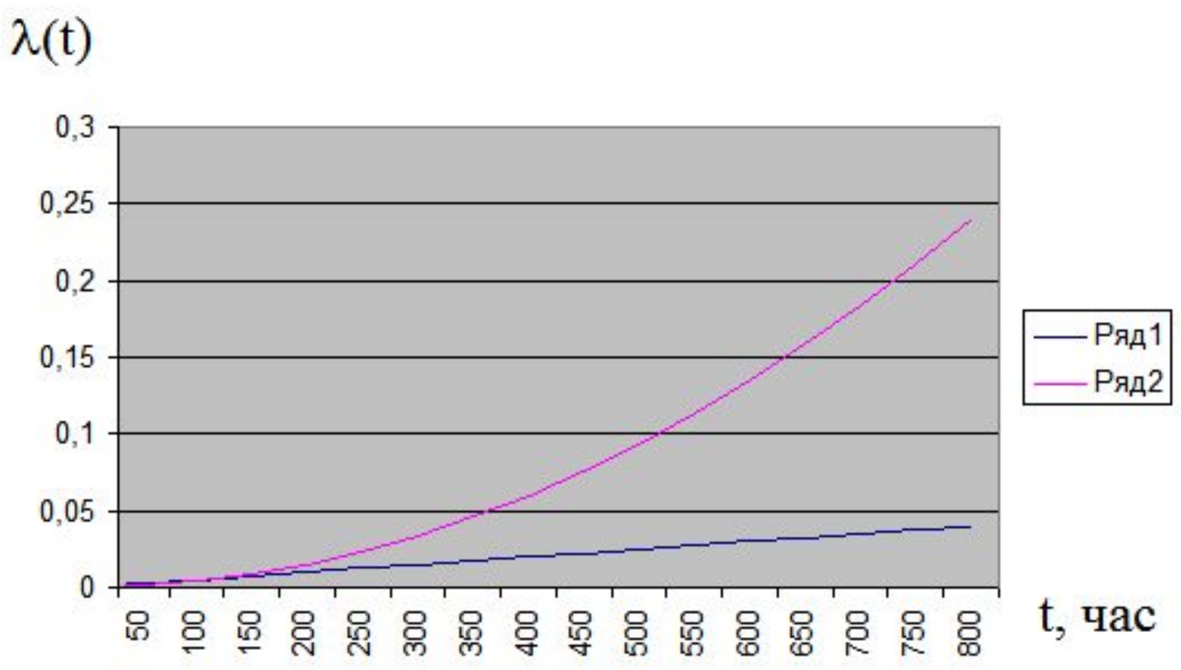


Рис. 3. Графики интенсивности отказов для распределения Вейбулла при разных параметрах: ряд 1 - α=2 и β=200 час; ряд 2 - α=3 и β=200 час

- При α=2 функция λ(t) линейная и распределение Вейбулла превращается в ***распределение Рэлея*** с плотностью

$$f(t) = 2\lambda t e^{-\lambda t^2} \quad .$$

6. Гамма-распределение

- Гамма-распределение имеет плотность

$$f(t)=\frac{t^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}e^{-\frac{t}{\beta}}$$

- с параметрами α и β.
- Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение связаны с этими параметрами следующим образом:
- $m=\alpha\beta$, $\sigma=\sqrt{\alpha\beta}$.

- Вероятность безотказной работы элемента определяется через интеграл:

$$P(t)=\int_{t}^{\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}e^{-\frac{x}{\beta}}dx$$

- Параметр α, характеризующий асимметрию гамма-распределения, определяет вид характеристик надежности.
- При $\alpha>1$ интенсивность отказа возрастает, при $\alpha<1$ - убывает, а при $\alpha=1$ становится постоянной, т.е. гамма-распределение превращается в экспоненциальное.

Рис. 4. Плотность распределения времени до отказа при гамма-распределении

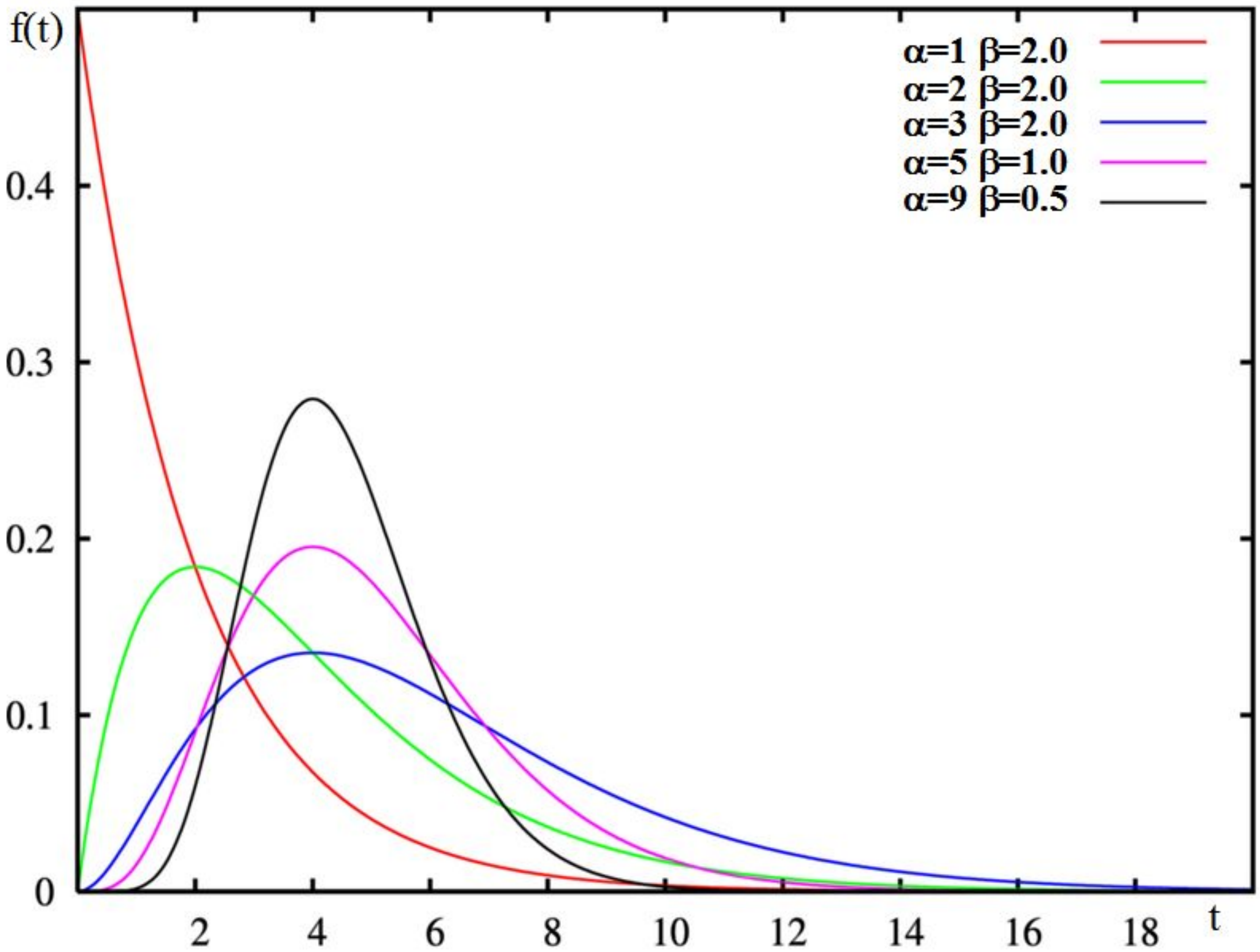
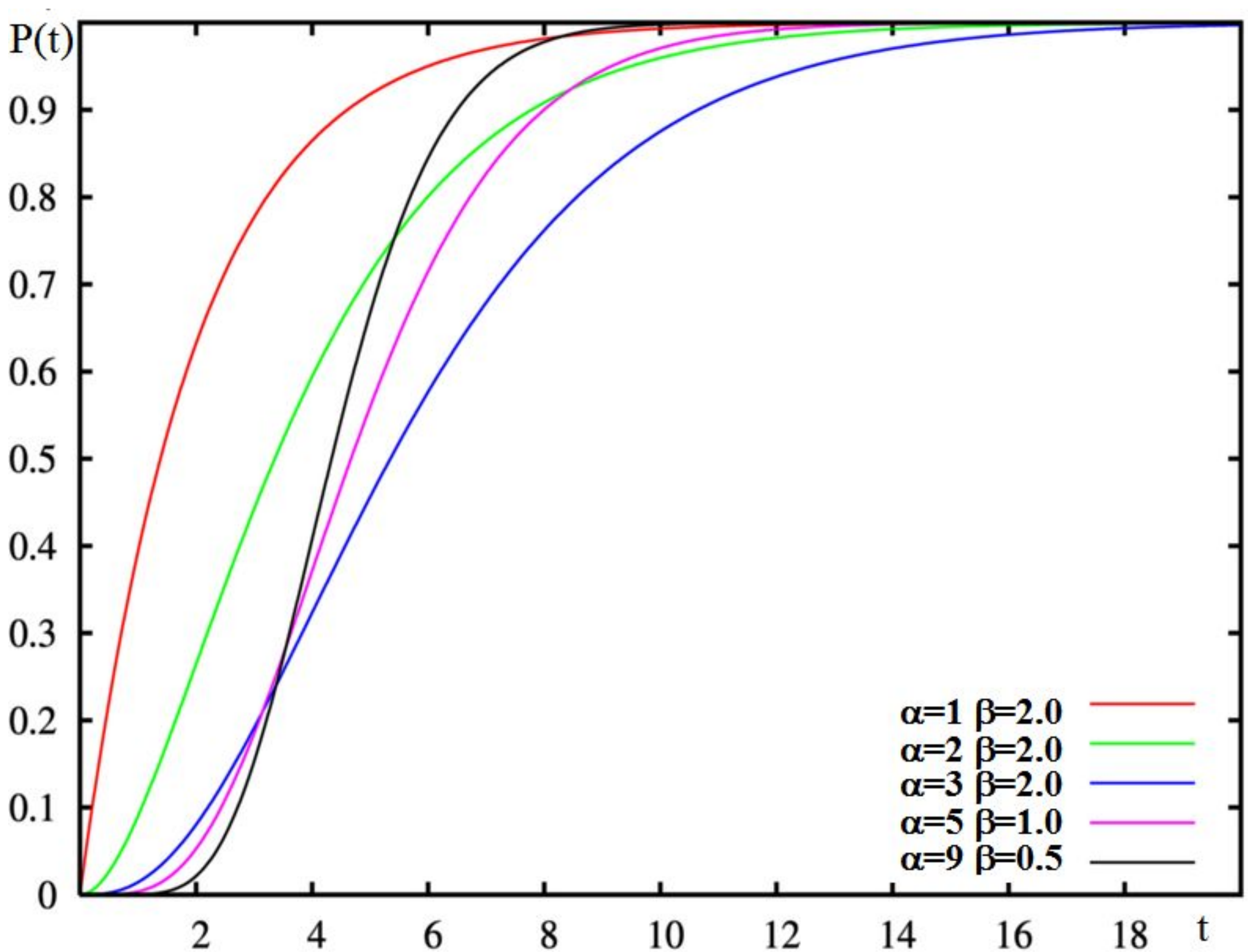


Рис. 5. График вероятности безотказной работы системы при гамма-распределении времени работы до отказа



7. Равномерное распределение

- Непрерывное равномерное распределение — распределение СВ, принимающей значения, принадлежащие интервалу [a,b], характеризующееся тем, что плотность вероятности на этом интервале постоянна.

- Плотность непрерывного распределения имеет вид:

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, a\le t\le b;\\ 0,\ \ t<a,\ \ t>b\end{cases}.$$

- Вероятность безотказной работы определяется следующим образом:

$$P(t)=\begin{cases} 1, & t<a; \\ \dfrac{b-t}{b-a}, & a\le t\le b; \\ 0, & t>b. \end{cases}$$

- Математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение связаны с параметрами a и b следующим образом:
- $m = \dfrac{a+b}{2}$, (совпадает с серединой

отрезка) $\sigma = \dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$

- .

Рис. 6. График плотности распределения времени до отказа при равномерном распределении

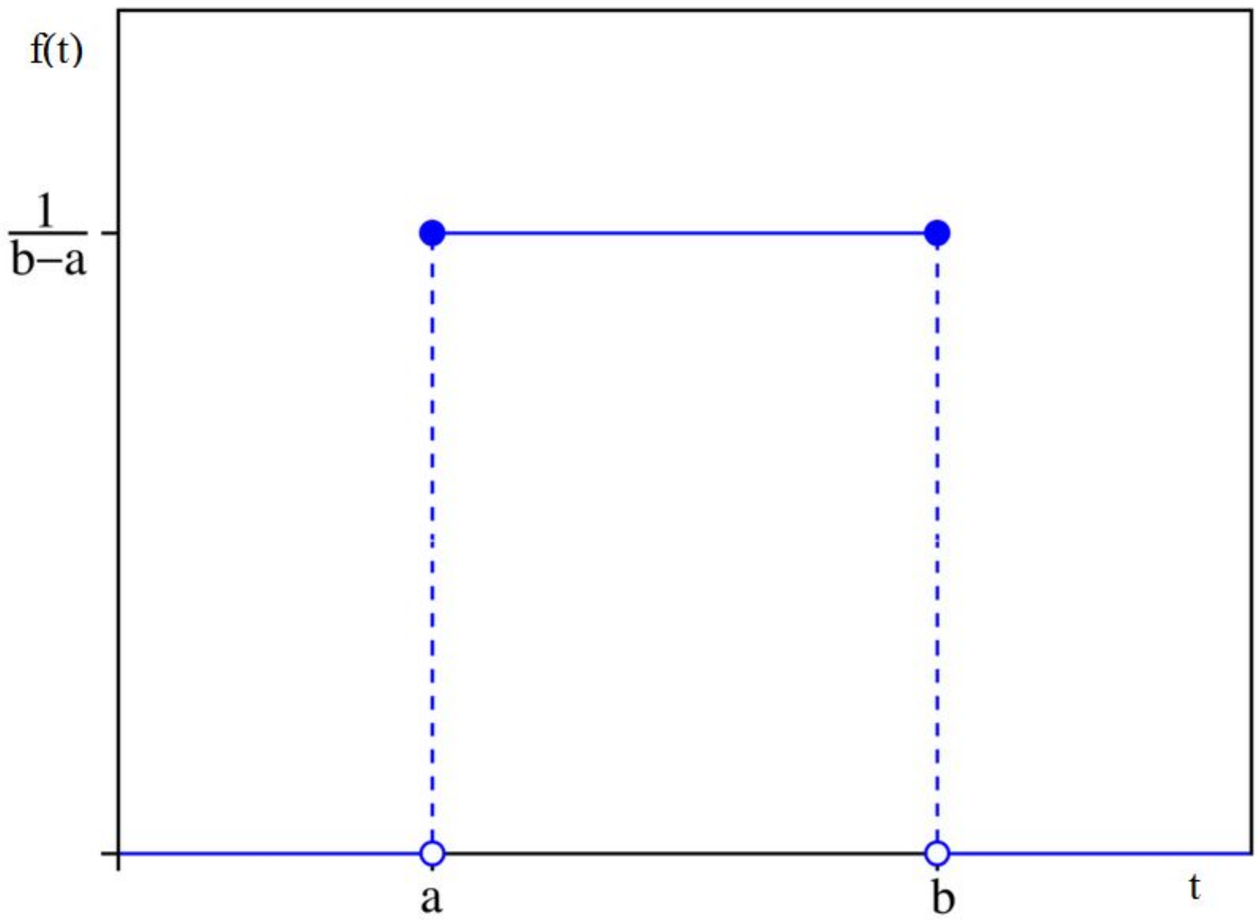
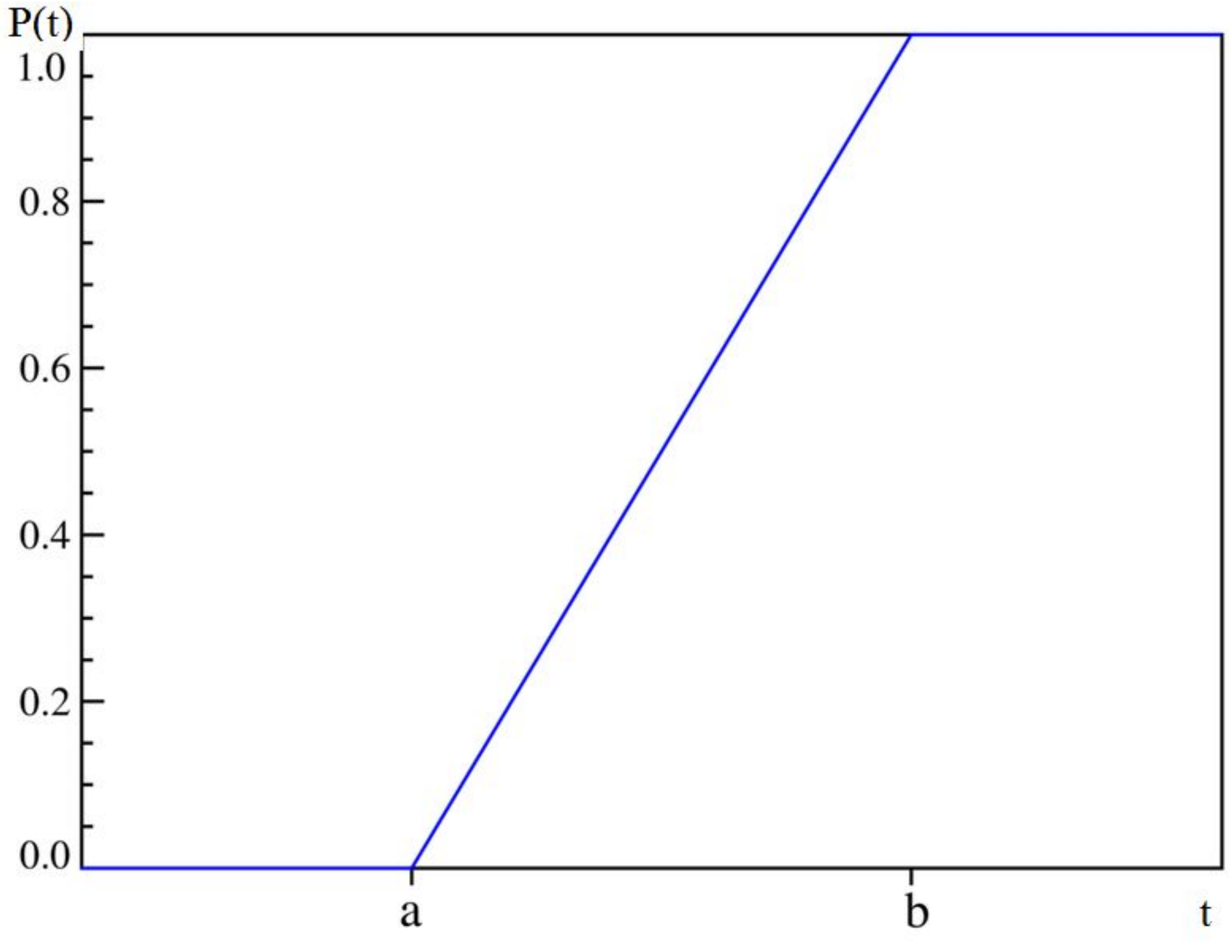


Рис. 7. График вероятности безотказной работы системы при равномерном распределении времени работы до отказа



8. Смесь распределений

- Смесь распределений определяется как линейная комбинация других распределений, например, распределение с плотностью

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i e^{-\lambda_i t}$$

- где $\sum_{i=1}^{n} c_i = 1$ образует смесь *n* экспоненциальных распределений.
- Такое распределение называется гиперэкспоненциальным.

Таблица 1
Связь параметров распределений с математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением

Вид распределения	m	σ
Экспоненциальное $\mathrm{Exp}(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda}$
Равномерное $U(a,b)$, $a\geq 0$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{b-a}{2\sqrt{3}}$
Гамма $\Gamma(\alpha,\beta)$	$\alpha\beta$	$\sqrt{\alpha}\beta$
Усеченное нормальное $\mathrm{TN}(m_0,\sigma_0)$	$m_0+k\sigma_0$	$\sigma_0\sqrt{1+k\frac{m_0}{\sigma_0}-k^2}$, $k=\frac{c}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{m_0^2}{2\sigma_0^2}}$, $c=\frac{1}{0,5+\Phi_0\left(\frac{m_0}{\sigma_0}\right)}$
Рэлея $R(\lambda)$	$\sqrt{\frac{\pi}{4\lambda}}$	$\sqrt{\frac{4-\pi}{4\lambda}}$
Вейбулла $W(\alpha,\beta)$	$\beta\Gamma(1+\frac{1}{\alpha})$	$\beta\sqrt{\Gamma(1+\frac{2}{\alpha})-\Gamma^2(1+\frac{1}{\alpha})}$
Нормальное $N(m,\sigma)$ $m>3\sigma$	m	σ

Таблица 2
Вероятность безотказной работы и плотность распределения времени до отказа для различных распределений случайной величины

Вид распределения	$f(t)$	$P(t)$
Экспоненциальное $\mathrm{Exp}(\lambda)$	$\lambda e^{-\lambda t}$	$e^{-\lambda t}$
Равномерное $U(a,b)$, $a\geq 0$	$\begin{cases} \frac{1}{b-a}, a\leq t\leq b; \\ 0, \ t<a, \ t>b. \end{cases}$	$\begin{cases} 1, \ t<a; \\ \frac{b-t}{b-a}, \ a\leq t\leq b; \\ 0, \ t>b. \end{cases}$
Гамма $\Gamma(\alpha,\beta)$	$\frac{t^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}e^{-\frac{t}{\beta}}$	$\int_t^{\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}e^{-\frac{x}{\beta}}dx$
Усеченное нормальное $TN(m_0, \sigma_0)$	$\frac{c}{\sigma_0\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-m_0)^2}{2\sigma_0{}^2}}$ $c=\frac{1}{0,5+\Phi_0\left(\frac{m_0}{\sigma_0}\right)}$	$c\left(0,5-\Phi_0\left(\frac{t-m_0}{\sigma_0}\right)\right)$
Рэлея $R(\lambda)$	$2\lambda t e^{-\lambda t^2}$	$e^{-\lambda t^2}$
Вейбулла $W(\alpha,\beta)$	$\frac{\alpha t^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha}}e^{-\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha}}$	$e^{-\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha}}$
Нормальное $N(m, \sigma)$ $m>3\sigma$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}$	$0,5-\Phi_0\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)$

- **Примечание.** Равномерное и нормальное распределения имеют ограничения на параметры для того, чтобы можно было их использовать для решения задач надежности в неотрицательной временной области ($t \geq 0$).