МОУ Теньгушевская средняя общеобразовательная школа
Алгебра 11 класс.

Тема: Возрастание и убывание функции. Экстремумы функции.

Цель: Углубить ЗУН учащихся по теме: Исследование функций с помощью производной. Показать практическое приложение производной.

Учитель – методист: Анна Павловна Родина

Самостоятельная работа

1.Найдите промежутки возрастания и убывания функции.

а) $f(x) = x^2 + 3x + 6$

б) $f(x) = x^3 + 2x - 1$

а) $f(x) = -x^2 + 4x - 3$

б) $f(x) = x^3 + 4x - 7$

2. Исследуйте функцию y=f(x) на максимум и минимум.

а) $f(x) = x^4 - 8x^2$

б) $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$

а) $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$

б) $f(x) = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}$

3.Найти все значения а, при которых

$$f'(x) \geq 0 \qquad\qquad f'(x) \leq 0$$

для всех действительных значений х, если

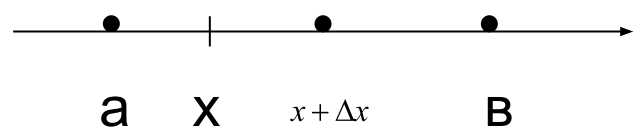
$$f(x) = x^3 + 3x^2 + ax \qquad\qquad f(x) = ax^3 - 6x^2 - x$$

Признаки возрастания и убывания функции.

Теорема 1. Если функция, имеющая производную для всех значений аргумента из интервала (а;в), возрастает в этом интервале, то производная в точках интервала (а;в) принимает либо положительное значения, либо в отдельных точках равна нулю.

Доказательство:

Пусть на (а;в) функция y=f(x) возрастает. Возьмем x $\in$(а;в), так чтобы $(x+\Delta x)\in(a;в)$



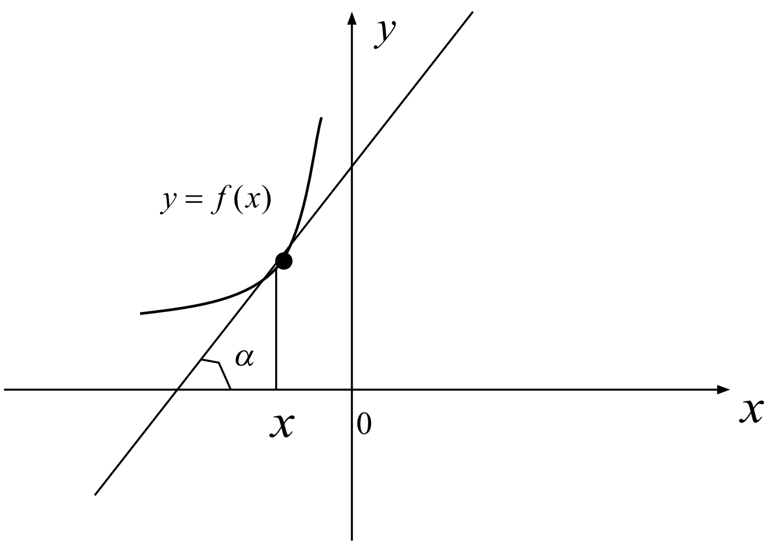
т.к. f(x) возрастает, то

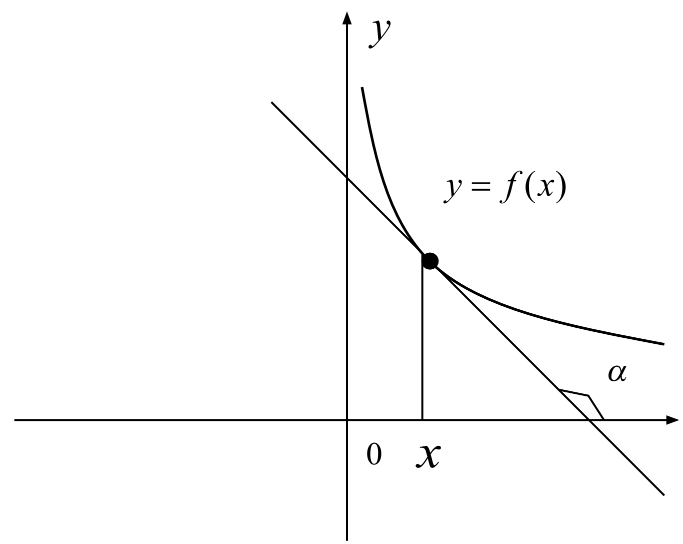
$$\left.\begin{array}{l} \Delta x\rangle 0, \Delta y = f(x+\Delta x)-f(x)\rangle 0 \\ при \Delta x\langle 0, \Delta y = f(x+\Delta x)-f(x)\langle 0 \end{array}\right] \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}\rangle 0$$

Тогда $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)\geq 0$$

Теорема 2.

Если функция, имеющая производную для всех значений аргумента из интервала (а;в), убывает в этом интервале, то производная в точках этого интервала принимает либо отрицательные значения либо в отдельных точках равна нулю.





$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, f'(x) = tg\alpha > 0$$

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi, f'(x) = tg\alpha < 0$$

Теорема Лагранжа

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на сегменте [а;в] и внутри него имеет производную, то найдется такое значение х=с (а<с<в), при котором $f(в) - f(a) = f'(c)(в - a)$

1. Например, вычислите значение с в формуле Лагранжа для функции $y = x^2$ на сегменте [0;2]

Решение:

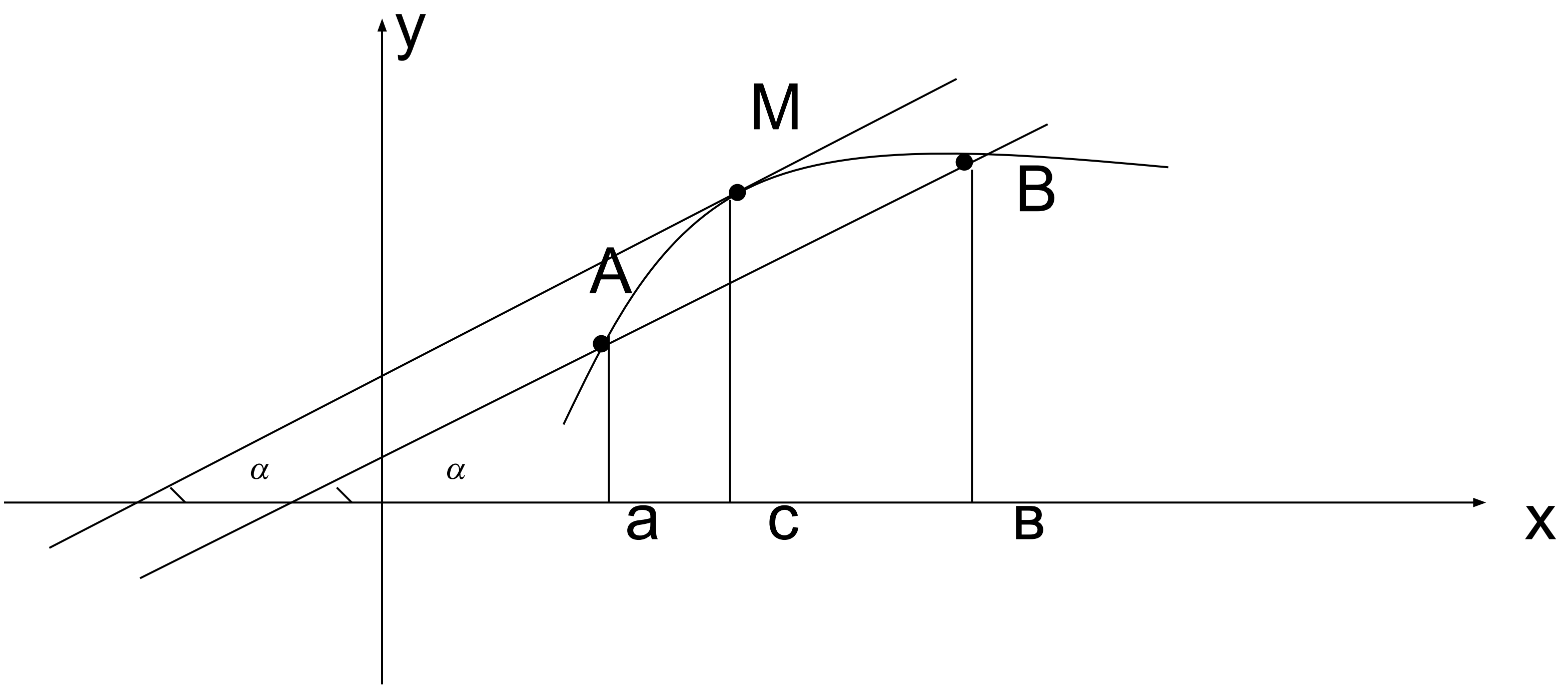
$f'(x) = (x^2)' = 2x$, тогда $2^2 - 0^2 = 2c(2-0)$, с=1.

2. Если формулу Лагранжа переписать в виде $\dfrac{f(в) - f(a)}{в - a} = f'(c)$

то она может быть выражена словами: отношение приращения функции $f(в) - f(a)$ к приращению аргумента *(в-а)* равно производной от заданной функции, вычисленной при некотором значении аргумента, заключенном между *а* и *в.*

<u>*Геометрический смысл теоремы Лагранжа.*</u>

Формула $\frac{f(в)-f(a)}{в-a}=f'(c)$ имеет интересный геометрический смысл: если в каждой точке дуги кривой существует касательная, то на дуге всегда найдется такая точка, в которой касательная параллельна хорде, стягивающей эту дугу.



<u>Теорема 4.</u> Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (а;в) и $f'(x) \geq 0$ для всех $x \in (a; в)$, то функция возрастает на интервале (а;в).

Доказательство:

1) Пусть x_1 и $x_2 \in (a; в); x_1 \langle x_2$

2) $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1),$ где $c \in (x_1; x_2)$.

т.к. $f'(c) \rangle 0; x_2 - x_1 \rangle 0, mo f(x_2) - f(x_1) \rangle 0;$

$m.e. f(x_2) \rangle f(x_1) \Rightarrow f(x) \nearrow$ на (а;в)

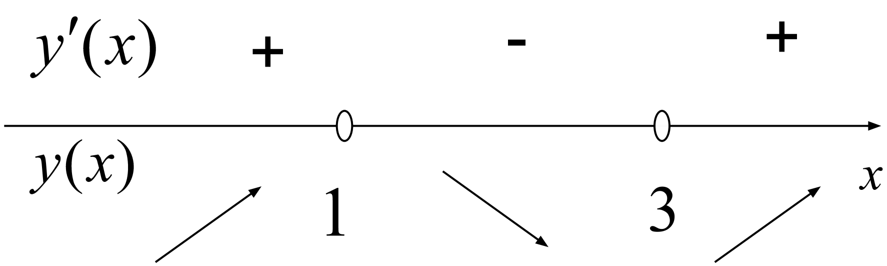
Интервалы монотонности

$$y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$$

Решение:

$$y' = (\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1)' = x^2 - 4x + 3$$

$$y'(x) = 0, \qquad x^2 - 4x + 3 = 0$$



x	(-∞;1)	(1;3)	(3;+∞)
y'	+	-	+
y	возрастает	убывает	возрастает

Необходимое условие существования экстремума функции.

Теорема Если функция имеет производную в каждой точке интервала (а;в), то в точке экстремума производная равна нулю.

Доказательство:

Пусть $c \in (a;в)$, с – точка экстремума. Доказать, что $f'(c) = 0$.

Пусть с – точка максимума. Тогда при $\Delta x \to 0$ выполняется

$f(c) \rangle f(c+\Delta x), f(c+\Delta x) - f(c) \langle 0$ $\quad \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'(c)$.

1)если $\Delta x \rangle 0$, то $\frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \langle 0 \Rightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'(c) \leq 0$

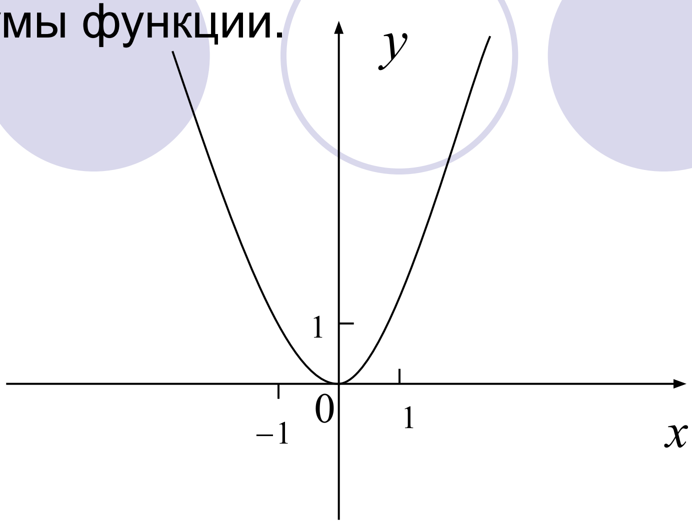
2)если $\Delta x \langle 0$, то $\frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \rangle 0 \Rightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'(c) \geq 0$

Итак: $\begin{cases} f'(c) \leq 0 \\ f'(c) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(c) = 0$

Пример 1.

$f(x) = x^2 \quad x \in (-1;1)$ Найти экстремумы функции.

Решение:



$1)\, f'(x) = (x^2)' = 2x$

$2)\, f'(x) = 0,$

$2x = 0$

$x = 0$

$f'(0) = 0$

Пример2.

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 8x - 1$. Найти экстремумы функции.

Решение:

1)

$f'(x) = (\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1)' = x^2 + 8$

2)

$f'(x) = 0$

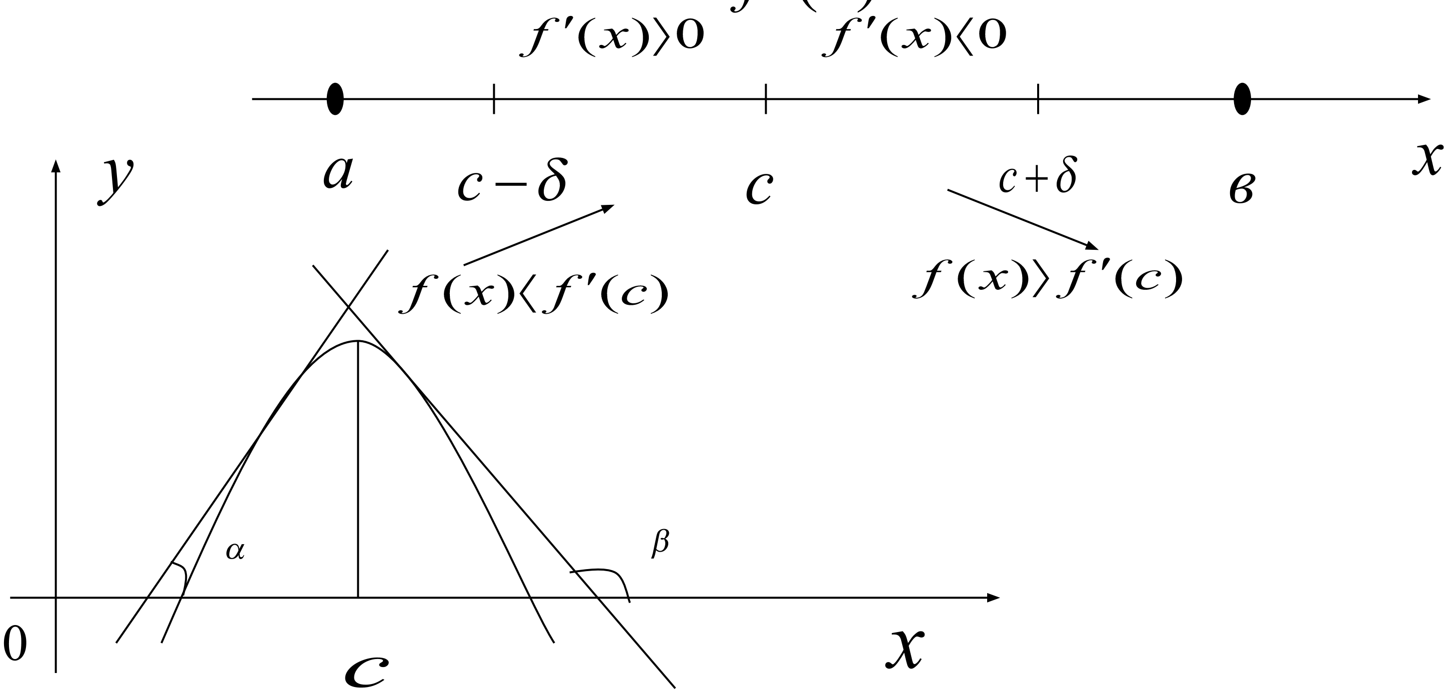
$x^2 + 8 = 0$ - Не имеет корней

Достаточные условия существования экстремума.

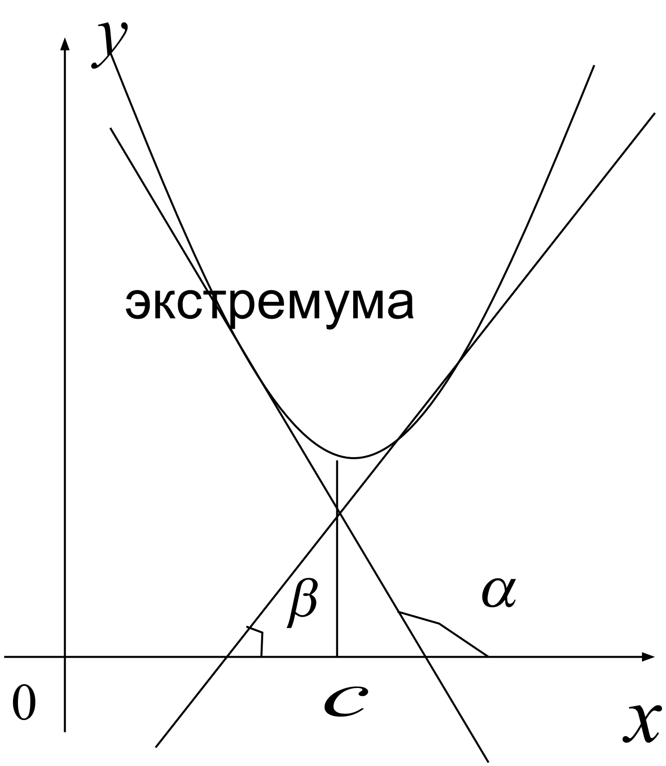
Теорема 1. Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в каждой точке некоторого интервала $(a;в)$ и пусть точка $x = c$ этого интервала есть стационарная точка функции. Тогда, если в некоторой окрестности точки слева от точки **с** производная положительна, а справа – отрицательна, то в точке **с** функция имеет максимум.

Доказательство:

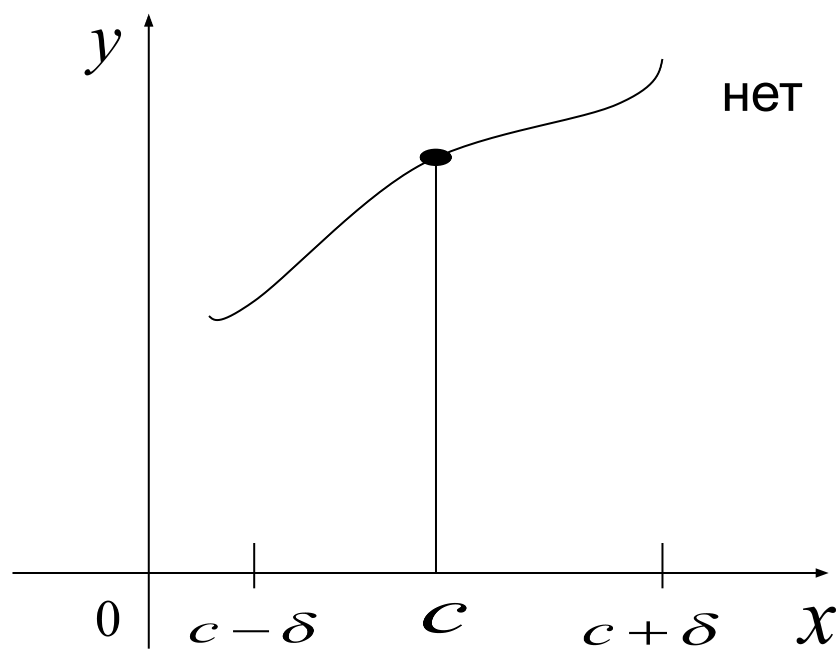
Т.к. на (а;в) существует $f'(x)$, то функция непрерывна.



Теорема 2. Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в точке интервала $(a;в)$ и пусть точка $x = c$ этого интервала есть стационарная точка функции. Тогда, если в некоторой окрестности точки слева от точки **с** производная отрицательна, а справа – положительна, то в точке **с** функция имеет минимум.



Теорема 3.

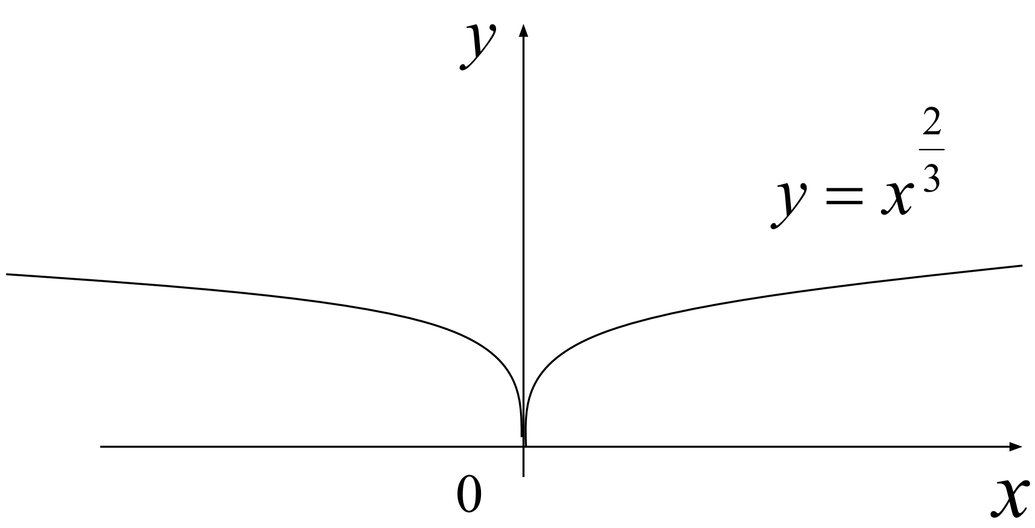


Теорема 1, 2 и 3 справедливы также для точек, в которых производная не существует.

<u>*Пример*</u> $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$, $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ при $x \neq 0$

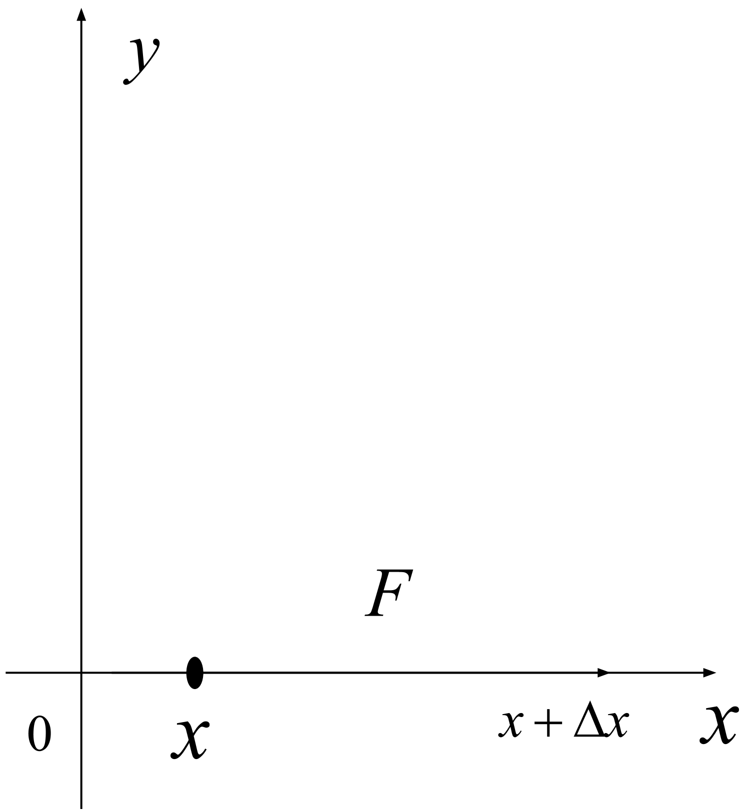
$f'(x)$	$-$		$+$	
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	x

x=0 – точка минимума. $f(x) = 0$



Приложения производной

1. Работа.



Рассмотрим работу ,которую совершает заданная сила F при перемещении по отрезку оси Ох.

Если сила постоянна, то работа $A = F \times S$, где А - работа, F – сила, S - длина пути .

Если сила меняется, то F=F (x).

ΔA на $[x; x+\Delta x]$ нельзя точно вычислить как произведение $F(x) \times \Delta x$ но при $\Delta x \to 0, \Delta A = F(x) \times dx$ т. е.силу можно считать производной работы по перемещению $F = A'(x)$

2. Заряд

Пусть q - заряд, переносимый электрическим током через поперечное сечение проводника за время t.

Если сила тока I постоянна, то за время dt ток переносит заряд, равный Idt.

При силе тока ,изменяющейся со временем по некоторому закону $I = I(t)$,то произведение $I(t)dt$ дает главную часть приращения заряда на маленьком отрезке времени $[t; t + \Delta t]$,т.е. $dq = I(t)dt$. Значит сила тока является производной заряда по времени $I(t) = q'(t)$

<u>3. Температура</u>

Длина стержня меняется в зависимости от температуры по закону

$$\ell = \ell_0 + 0{,}001t + 0{,}0001t^2$$

Найти коэффициент линейного расширения при $t = 5^0 C$

Найти промежутки расширения и сжатия стержня.

Решение:

1) $$k(t) = \ell'(t) = (\ell_0 + 0{,}001t + 0{,}0001t^2)' = 0{,}001 + 0{,}0002t$$

$$k(t_0) = k(5^0) = 0{,}001 = 0{,}0002 \times 5 = 0{,}002$$

2) $$\ell'(t) = 0, \quad 0{,}001 + 0{,}0002t = 0$$

$$0{,}0002t = -0{,}001$$

$$t = -5^0 C$$

$\ell'(t)$ $-$ $+$

$\ell(t)$ -5 t

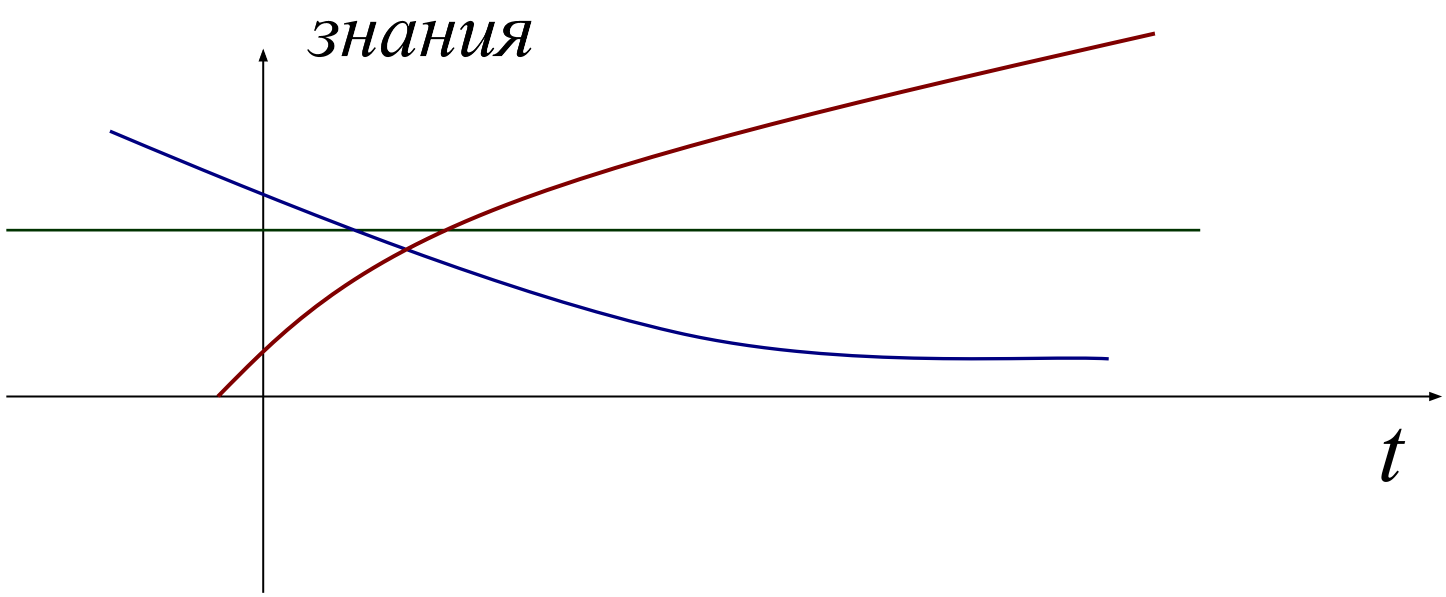
сжимается *расширяется*

4 .Успехи ученика

Обсуждая успехи своего ученика, учитель математики так отозвался о нем: «Он очень мало знает, но у него положительная производная». Что хотел сказать учитель?

Да. Скорость приращения знаний у ученика положительна, а это есть залог того, что его знания возрастут.

Подумайте, как вы могли бы охарактеризовать три разные кривые роста знаний.



Тренажер: найти точки экстремума функций.

1) $y = x^2 - 4x$

2) $y = x^3 + 3x^2$

3) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$

4) $y = (x+2)^2(3x-1)$

5) $y = x^4 - 4x^3 + 4x^2$

6) $y = \dfrac{x^2+1}{x}$

7) $y = \dfrac{x^3+4}{x^2}$

8) $y = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$

9) $y = x + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

10) $y = \dfrac{2x}{x^2+9}$

11) $y = \dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$

12) $y = (x-1) \times \sqrt{x}$

13) $y = 2x^2 - \sqrt{x}$

14) $y = \sqrt[3]{x^2} - 1$

15) $y = x^2 \times \sqrt{1-2x}$