

8 класс.

Дробные рациональные уравнения

Если обе части уравнения являются рациональным выражением, то такое уравнение называют **рациональным уравнением**.

Рациональные уравнения

Целые рациональные уравнения

Дробно-рациональные уравнения

$$\frac{2x + 3}{5} = 5x;$$
$$x^2 + 6x + 8 = 0;$$
$$\frac{x + 5}{4} = \frac{x - 9}{6}.$$



$$\frac{2x + 3}{5 + x} = 4x;$$
$$\frac{x^2 + 6x + 8}{x + 2} = 0;$$
$$\frac{x + 5}{4x} = \frac{x - 9}{6}.$$

Распознай уравнения

$$\frac{x-7}{x+5} = 2$$

- дробно-рациональное уравнение

$$\frac{x-7}{5} = 15$$

- целое рациональное уравнение

$$\frac{x^2 + 9x + 17}{x + 5} = \frac{x + 8}{x}$$

- дробно-рациональное уравнение

$$\frac{x^2 - 7}{5} = \frac{x + 2}{7}$$

- целое рациональное уравнение

Алгоритм решения дробных рациональных уравнений.

1. *Найти общий знаменатель дробей, входящих в уравнение;*
2. *Записать **
3. *Умножить обе части уравнения на общий знаменатель;*
4. *Решить получившееся целое уравнение;*
5. *Исключить из его корней те, которые не удовлетворяют **
6. *Записать ответ*



Решить уравнение.

$$\frac{2}{x+3} + 1 = \frac{x^2 - 10}{x^2 - 9};$$

Решение

Это – дробно-рациональное уравнение

$$\frac{2}{x+3} + 1 - \frac{x^2 - 10}{x^2 - 9} = 0; \quad * (x+3)(x-3) \neq 0$$

Выполним действия в левой части:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{x+3} + 1 - \frac{x^2 - 10}{x^2 - 9} = 0 \\ & = \frac{2(x-3) + (x-3)(x+3) - (x^2 - 10)}{(x+3)(x-3)} = 0 \end{aligned}$$

$$= \frac{2x - 6 + x^2 - 9 - x^2 + 10}{(x + 3)(x - 3)} = 0$$

$$\frac{2x - 5}{(x + 3)(x - 3)} = 0;$$

$$\frac{2x - 5}{(x + 3)(x - 3)} = 0;$$

$$2x - 5 = 0,$$

$$2x = 5,$$

$$x = 2,5.$$

Ответ: 2,5.

Рассмотрим пример 3.

Решить уравнение.

$$\frac{10}{x+2} + \frac{6}{x-2} = 2$$

Решени

$$* (x+2)(x-2) \neq 0$$

$$\frac{\overset{x-}{10}}{x+2} + \frac{\overset{x+}{6}}{x-2} - \overset{(x-2)(x+2)}{2} = 0$$

$$\frac{10(x-2) + 6(x+2) - 2(x-2)(x+2)}{(x+2)(x-2)} = 0$$

$$\frac{\underline{10x} - \underline{20} + \underline{6x} + \underline{12} - \underline{2x^2} + \underline{8}}{(x+2)(x-2)} = 0$$

$$\frac{16x - 2x^2}{(x + 2)(x - 2)} = 0$$

$$\frac{2x(8 - x)}{(x + 2)(x - 2)} = 0$$

$$2x(8 - x) = 0,$$

$$2x = 0$$

$$x = 0$$

или

или

$$(8 - x) = 0,$$

$$x = 8,$$

Ответ: 0, 8.

Пример: $\frac{3x-7}{x+5} = \frac{x-3}{x+2}$

* $x+2 \neq 0 \quad x+5 \neq 0$

$x \neq -2 \quad x \neq -5$

$$(3x-7) \cdot (x+2) = (x-3) \cdot (x+5)$$

$$3x^2 + 6x - 7x - 14 = x^2 + 5x - 3x - 15$$

$$3x^2 - x - 14 = x^2 + 2x - 15$$

$$2x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$a = 2 \quad b = -3 \quad c = 1$$

$$D = b^2 - 4ac = 9 - 8 = 1$$

$$x_1 = \frac{3+1}{4} = 1$$

$$x_2 = \frac{3-1}{4} = 0,5$$

Ответ: 1; 0,5.

Отклонение от алгоритма может привести к приобретению посторонних корней данного уравнения

$$\frac{(x-2)(x-3)}{x-3} = 1,$$

$$\frac{(x-2)(x-3) \overset{x-3}{-1}}{x-3} = 0$$

$$\frac{x^2 - 3x - 2x + 6 - x + 3}{x-3} = 0$$

$$\frac{x^2 - 6x + 9}{x-3} = 0$$

$$\frac{(x-3)^2}{x-3} = 0$$

$x = 3$ обращает знаменатель в нуль, значит уравнение корней не имеет.

Отклонимся от алгоритма

Сократим дробь в левой части уравнения на $(x-3)$

$$\frac{(x-2)\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}} = 1,$$

$$x - 2 = 1$$

$$x = 3$$

При таком «способе решения» мы получили посторонний корень.

Решим уравнения

$$\frac{2x-1}{x+7} = \frac{3x+4}{x-1}$$

$$\frac{x-1}{2x+3} = \frac{2x-1}{3-2x}$$

$$\frac{x^2}{x^2+1} = \frac{7x}{x^2+1}$$

