

# Косой изгиб. Сочетание изгиба с другими видами нагружения

Доцент кафедры  
Самолетостроения  
К.т.н. Мухин Д.В.

# Дифференциальное уравнение упругой линии балки, метод начальных параметров.

Форму упругой линии балки можно определить из

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}$$

из аналитической геометрии

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

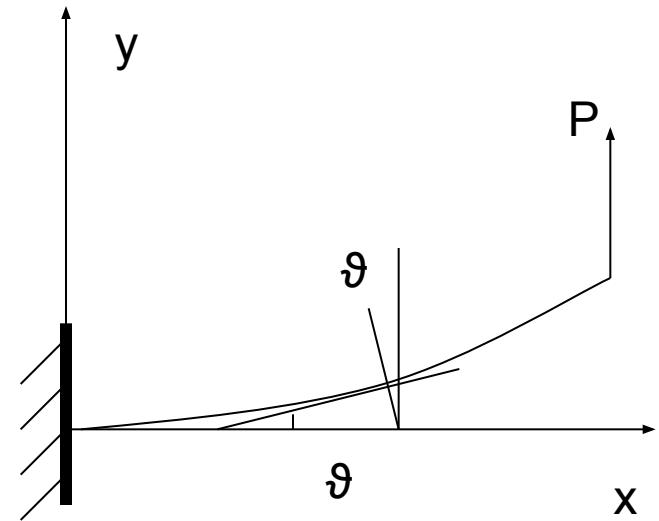
Так как перемещения малы и угол  $\vartheta$  мал

$$\operatorname{tg} \vartheta = y' \approx \vartheta \quad \text{при этом} \quad y'^2 \ll 1$$

$$\frac{1}{\rho} \approx y'' \Rightarrow y'' = \frac{M}{EI_z}$$

С учетом того что

$$Q = \frac{dM}{dx}; q = \frac{dQ}{dx}$$



$$y'' = \frac{M}{EI_z}; y''' = \frac{Q}{EI_z}; y^{IV} = \frac{q}{EI_z}$$

Если  $q = \text{const}$  – кривая четвертого порядка,

Если  $q = 0$  – кривая третьего порядка.

# Метод начальных параметров

Участок 1

$$y^{IV} = 0$$

НУ

$$y|_{x=0} = y_0; \quad y'|_{x=0} = y'_0;$$

$$M|_{x=0} = EI_z y''_0; \quad Q|_{x=0} = EI_z y'''_0.$$

Общий интеграл

$$y = C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot \frac{x^2}{2!} + C_4 \cdot \frac{x^3}{3!}$$

Производные

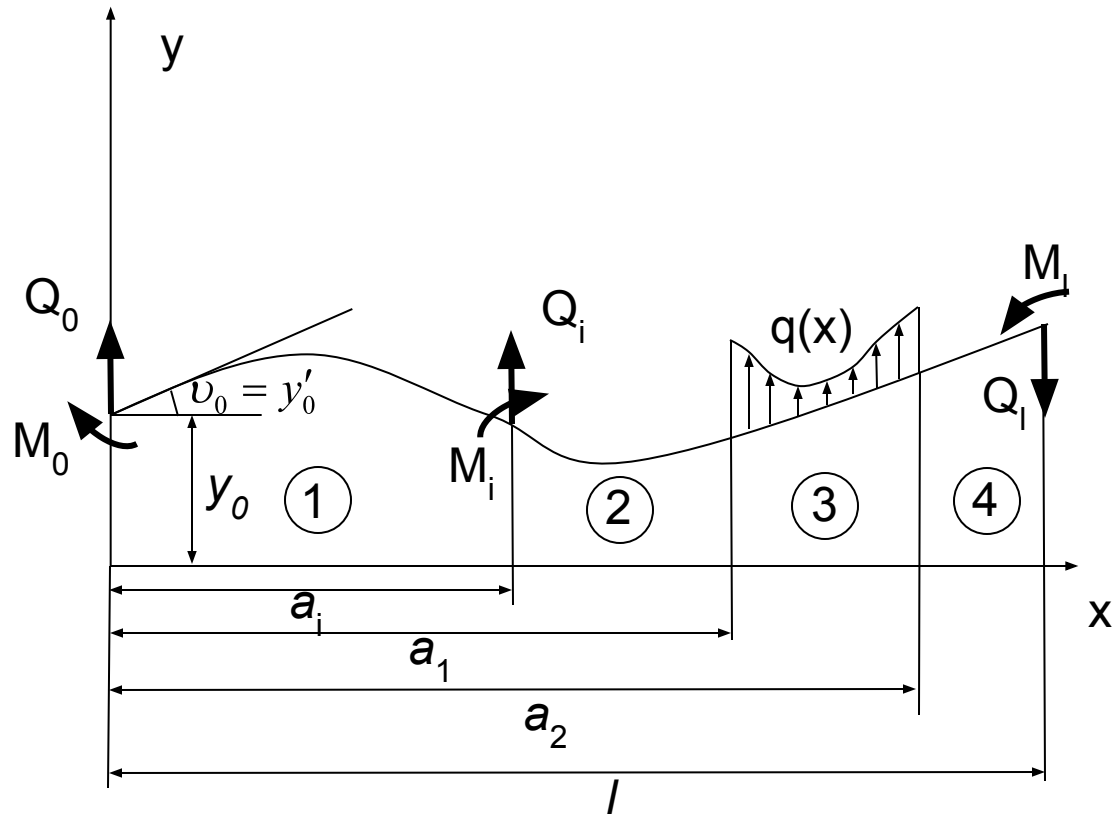
$$y' = C_2 + C_3 \cdot x + C_4 \cdot \frac{x^2}{2!};$$

$$y'' = C_3 + C_4 \cdot x;$$

$$y''' = C_4.$$

Уравнение упругой линии на первом участке

$$y_1 = y_0 + y'_0 \cdot x + \frac{M_0}{EI_z} \cdot \frac{x^2}{2!} + \frac{Q_0}{EI_z} \cdot \frac{x^3}{3!}$$



Определяем постоянные интегрирования из НУ

$$y|_{x=0} = y_0 = C_1; \quad y'|_{x=0} = y'_0 = C_2;$$

$$EI_z y''|_{x=0} = M_0 = EI_z C_3; \quad C_3 = M_0 / EI_z;$$

$$EI_z y'''|_{x=0} = Q_0 = EI_z C_4; \quad C_4 = Q_0 / EI_z.$$

При переходе к следующему участку сохраняется непрерывность: прогиб и угол поворота. Изгибающий момент и поперечная сила меняется скачком на величины  $M_i$  и  $Q_i$ . Для выполнения этих условий добавляются слагаемые

$$\frac{M_i (x - a_i)^2}{EI_z 2!} \quad \text{и} \quad \frac{Q_i (x - a_i)^3}{EI_z 3!}$$

Уравнение рабочей линии для второго участка

$$y_2 = y_0 + y'_0 \cdot x + \frac{M_0}{EI_z} \cdot \frac{x^2}{2!} + \frac{Q_0}{EI_z} \cdot \frac{x^3}{3!} + \frac{M_i (x - a_i)^2}{EI_z 2!} + \frac{Q_i (x - a_i)^3}{EI_z 3!}$$

Для учета распределенной нагрузки на 3 участке добавляется слагаемое

$$\int_{a_1}^x \frac{q}{EI_z} \frac{(x - S)^3}{3!} dS$$

Уравнение рабочей линии для третьего участка

$$y_3 = y_0 + y'_0 \cdot x + \frac{M_0}{EI_z} \cdot \frac{x^2}{2!} + \frac{Q_0}{EI_z} \cdot \frac{x^3}{3!} + \frac{M_i (x - a_i)^2}{EI_z 2!} + \frac{Q_i (x - a_i)^3}{EI_z 3!} + \int_{a_1}^x \frac{q}{EI_z} \frac{(x - S)^3}{3!} dS$$

Окончание участка распределенной нагрузки (участок 4) преобразует последнее слагаемое к виду

$$\int_{a_1}^{a_2} \frac{q}{EI_z} \frac{(x - S)^3}{3!} dS$$

Уравнение рабочей линии для четвертого участка

$$y_4 = y_0 + y'_0 \cdot x + \frac{M_0}{EI_z} \cdot \frac{x^2}{2!} + \frac{Q_0}{EI_z} \cdot \frac{x^3}{3!} + \frac{M_i (x - a_i)^2}{EI_z 2!} + \frac{Q_i (x - a_i)^3}{EI_z 3!} + \int_{a_1}^{a_2} \frac{q}{EI_z} \frac{(x - S)^3}{3!} dS$$

Как видно уравнения (особенно для случая нескольких приложенных сосредоточенных сил, изгибающих моментов и грузовых площадок) получаются довольно громоздкими. Для рассмотренного случая при  $q = \text{const}$  полная система уравнений будет иметь вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} y = y_0 + y'_0 \cdot x + \frac{M_0}{EI_z} \cdot \frac{x^2}{2!} + \frac{Q_0}{EI_z} \cdot \frac{x^3}{3!} \Big|_1 + \frac{M_i}{EI_z} \frac{(x-a_i)^2}{2!} + \frac{Q_i}{EI_z} \frac{(x-a_i)^3}{3!} \Big|_2 + \\ + \frac{q}{EI_z} \frac{(x-a_1)^4}{4!} \Big|_3 - \frac{q}{EI_z} \frac{(x-a_2)^4}{4!} \Big|_4 ; \\ y' = y'_0 + \frac{M_0 \cdot x}{EI_z} + \frac{Q_0}{EI_z} \cdot \frac{x^2}{2!} \Big|_1 + \frac{M_i}{EI_z} \frac{(x-a_i)}{1} + \frac{Q_i}{EI_z} \frac{(x-a_i)^2}{2!} \Big|_2 + \\ + \frac{q}{EI_z} \frac{(x-a_1)^3}{3!} \Big|_3 - \frac{q}{EI_z} \frac{(x-a_2)^3}{3!} \Big|_4 ; \\ M = M_0 + Q_0 \cdot x \Big|_1 + M_i + Q_i(x-a_i) \Big|_2 + \frac{q(x-a_1)^2}{2!} \Big|_3 - \frac{q(x-a_2)^2}{2!} \Big|_4 ; \\ Q = Q_0 \Big|_1 + Q_i \Big|_2 + q(x-a_1) \Big|_3 - q(x-a_2) \Big|_4 ; \end{array} \right.$$

В тех случаях, когда задача сформулирована не в форме Коши (не все НУ заданы в начальной точке) производится подстановка имеющихся НУ в полную систему уравнений. Получается система алгебраических уравнений относительно величин  $y_0, y'_0, M_0, Q_0$ . Решая эту систему находим данные величины и записываем уравнение линии балки.

Уравнения метода начальных параметров можно записать более компактно в матричном виде

$$V^T(x) = |y(x), y'(x), M(x), Q(x)|;$$

$$V_0^T = |y_0, y'_0, M_0, Q_0|;$$

$$V_i^T = |0, 0, M_i, Q_i|;$$

$$V^T(S) = |0, 0, 0, q(S)|;$$

$$K(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{EI_z 2!} & \frac{x^3}{EI_z 3!} \\ 0 & 1 & \frac{x}{EI_z} & \frac{x^2}{EI_z 2!} \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$V(x) = K(x)V_0|_1 + \sum K(x - a_i)V_i|_2 + \sum \left( \int_{a_1}^x K(x - S)V(S)dS|_3 + \int_x^{a_2} K(x - S)V(S)dS|_4 \right)$$

Тут система составлена для любого числа приложенных сосредоточенных сил, моментов и грузовых площадок.

## 2. Косой изгиб

Вид деформации является сложным, когда в поперечном сечении стержня возникают два и более силовых факторов. Сложный вид деформации можно рассматривать как сумму простых видов, изученных ранее (растяжение, изгиб, кручение), если применим принцип независимости действия сил (частный случай принципа наложения, применяемый в механике деформируемого твердого тела):

***напряжение (деформация) от группы сил равно сумме напряжений (деформаций) от каждой силы в отдельности.***

Принцип справедлив, если функция и аргумент связаны линейной зависимостью.

В задачах механики материалов и конструкций становится неприменимым, если:

- напряжения в какой-либо части конструкции от одной из сил или группы сил превышают предел пропорциональности ;
- деформации или перемещения становятся настолько большими, что нарушается линейная зависимость между ними и нагрузкой.

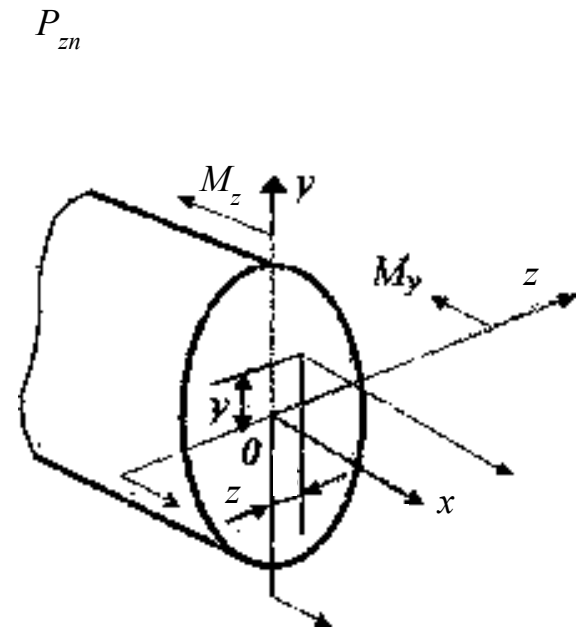
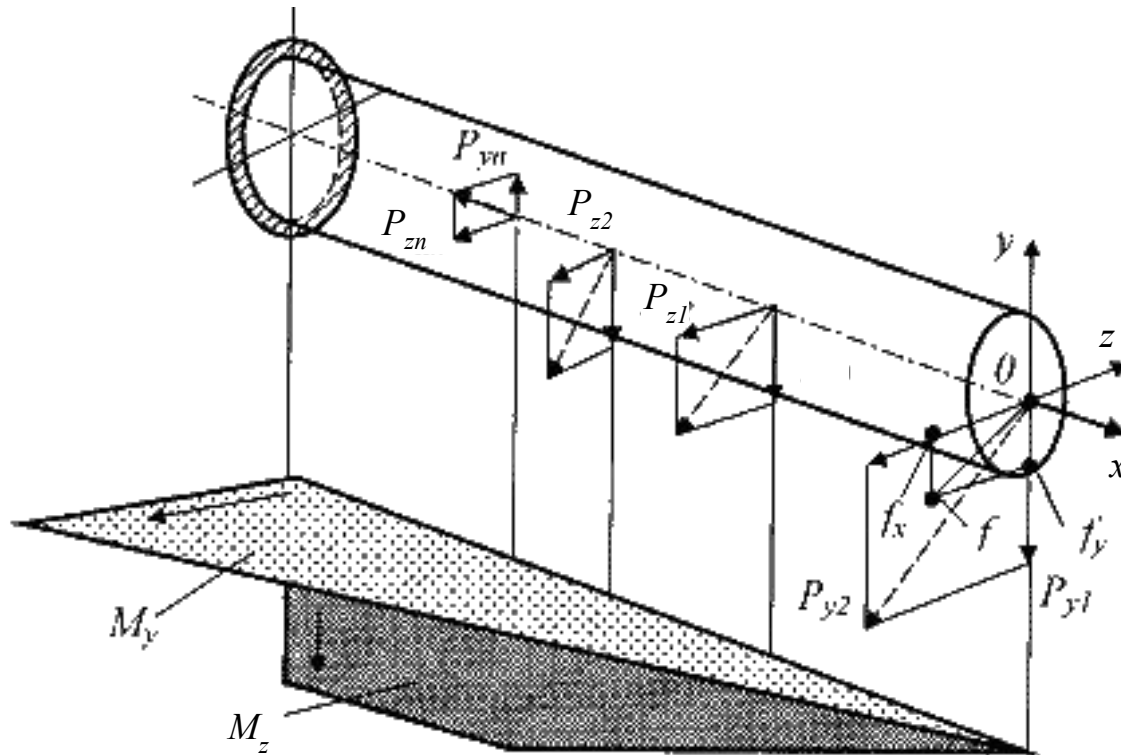
Ранее было показано, что прямой и чистой изгибы реализуются когда силовые факторы лежат в одной из главных плоскостей инерции.

Косой изгиб имеет место, когда силы, его вызывающие, не лежат в одной из главных плоскостей инерции.

Однако, если разложить внешние силы по главным осям инерции  $Oy$  и  $Oz$ , то получим две системы сил  $P_{1z}, P_{2z}, \dots, P_{nz}$  и  $P_{1y}, P_{2y}, \dots, P_{ny}$ , каждая из которых вызывает прямой изгиб с изгибающими моментами соответственно  $M_y$  и  $M_z$ . Применяя принцип независимости действия сил, нормальные напряжения определим как алгебраическую сумму напряжений от  $M_z$  и  $M_y$

$$\sigma = \sigma_{M_y} + \sigma_{M_z} = \pm \frac{M_y}{I_y} z \pm \frac{M_z}{I_z} y$$

Чтобы не связывать себя формальными правилами знаков, слагаемые определяют по модулю, а знаки ставят по смыслу





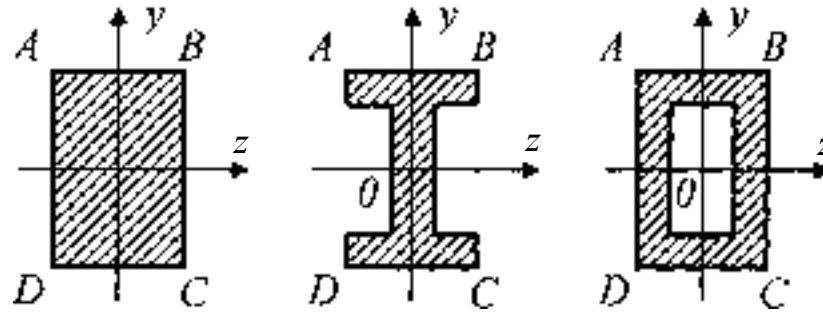
Прогибы балки определяют как геометрическую сумму прогибов от прямых изгибов в каждом направлении

$$f = \sqrt{f_y^2 + f_z^2}$$

Так как моменты сопротивления по разным осям различны, при равных изгибающих силах прогибы в направлениях двух главных осей будут различны. Следовательно плоскость изгиба не совпадет с плоскостью нагрузки. Отсюда и название – косо́й изгиб.

Таким образом, расчет на косо́й изгиб с применением принципа независимости действия сил сводится к расчету на два прямых изгиба с последующим алгебраическим суммированием напряжений и геометрическим суммированием прогибов.

В случае поперечных сечений, имеющих две оси симметрии и выступающие угловые точки с равными по модулю и максимальными одноименными координатами

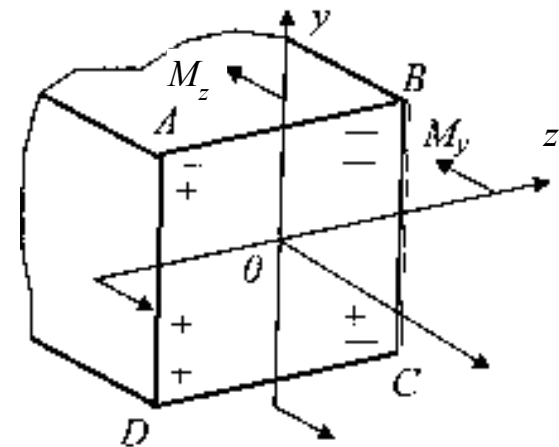


$$y_A = y_B = |y_C| = |y_D| = y_{\max} \quad |z_A| = |z_B| = |z_C| = |z_D| = z_{\max}$$

$$\sigma_{A,B,C,D} = \pm \frac{M_y}{I_y} z_{\max} \pm \frac{M_z}{I_z} y_{\max} = \pm \frac{M_y}{W_y} \pm \frac{M_z}{W_z}$$

Условие прочности

$$\max \sigma = \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} \leq [\sigma]$$



В том случае, если сечение имеет неправильную форму, то встает задача определения положения нейтральной линии (нейтрального слоя), для того, чтобы определить наиболее удаленные от него точки. Исходной формулой служит

$$\sigma = \frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_z}{I_z} y \quad \text{или} \quad \sigma = M \left( \frac{z}{I_y} \cos \alpha + \frac{y}{I_z} \sin \alpha \right)$$

На нейтральной линии  $\sigma=0$ . Приравниваем выражение нулю получаем:

$$y = -z \frac{I_z}{I_y} \operatorname{ctg} \alpha$$

Легко установить, что при косом изгибе нейтральная линия не перпендикулярна к плоскости изгибающего момента. Действительно, угловой коэффициент  $k_1$  плоскости момента представляет собой тангенс угла  $\alpha$ :  $k_1 = \operatorname{tg} \alpha$

Угловой же коэффициент нейтральной линии равен:  $k_2 = -\frac{I_z}{I_y} \operatorname{ctg} \alpha$

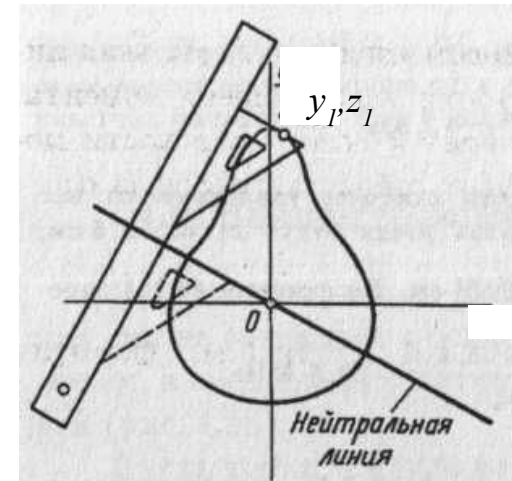
Так как в общем случае  $I_z \neq I_y$ , то условие перпендикулярности прямых, известное из аналитической геометрии, не соблюдается, поскольку  $k_1 \neq 1/k_2$ . Стержень, образно выражаясь, “предпочитает” изгибаться не в плоскости изгибающего момента, а в некоторой другой плоскости, где жесткость на изгиб будет меньше. Поэтому нейтральная линия не перпендикулярна плоскости момента, а несколько повернута в сторону оси минимального момента инерции



Так как эпюра нормальных напряжений в сечении линейна, то максимальное напряжение возникает в точке, наиболее удаленной от нейтральной линии. Пусть координаты этой точки будут  $y_1, z_1$ . Тогда, получаем

$$\sigma_{\max} = \frac{M_y}{I_y} z_1 + \frac{M_z}{I_z} y_1$$

В случае сложной формы сечения удобно прибегать к графическому методу. Для этого сечение вычерчивают в масштабе и проводят главные оси  $x$  и  $y$ . Затем, согласно формуле, получаем уравнение и, строим нейтральную линию. При помощи линейки и угольника определяют точку, наиболее удаленную от нейтральной линии, а ее координаты  $y_1, z_1$  определяют непосредственно с чертежа.



### 3. Внецентренное растяжение — сжатие

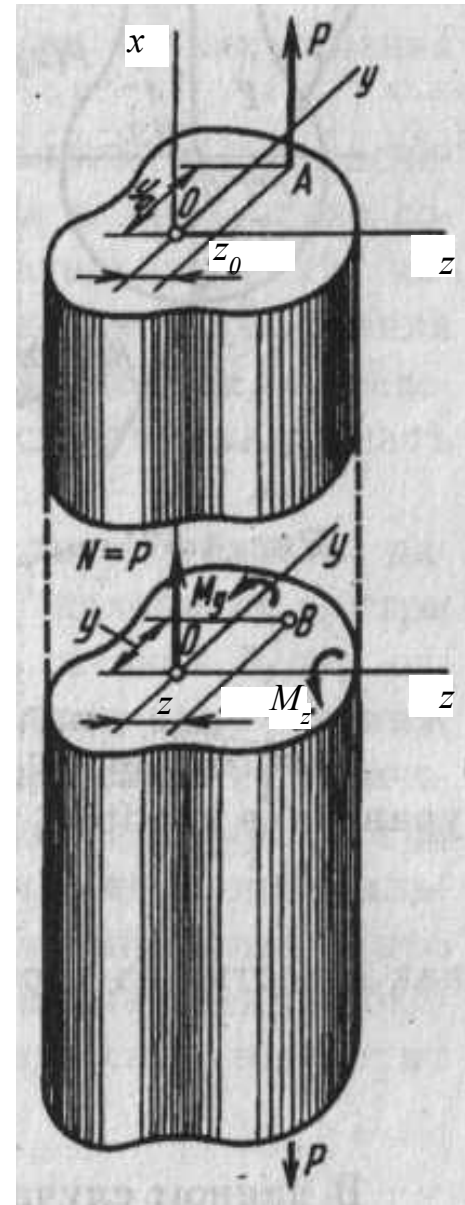
При внецентренном растяжении равнодействующая внешних сил не совпадает с осью стержня, как при обычном растяжении, а смещена относительно оси  $x$  и остается ей параллельной. Пусть точка  $A$  приложения равнодействующей внешних сил имеет в сечении координаты  $y_0$  и  $z_0$ . Тогда относительно главных осей равнодействующая сила  $P$  дает моменты:

$$M_z = P \cdot y_0; \quad M_y = P \cdot z_0.$$

Таким образом, внецентренное растяжение - сжатие оказывается родственным косому изгибу. В отличие от последнего, при внецентренном растяжении в поперечном сечении стержня возникают не только изгибающие моменты, но и нормальная сила  $N = P$ .

В произвольной точке  $B$  с координатами  $y, z$  нормальное напряжение  $\sigma$  определяется следующим выражением:

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{P \cdot z_0}{I_y} z + \frac{P \cdot y_0}{I_z} y$$

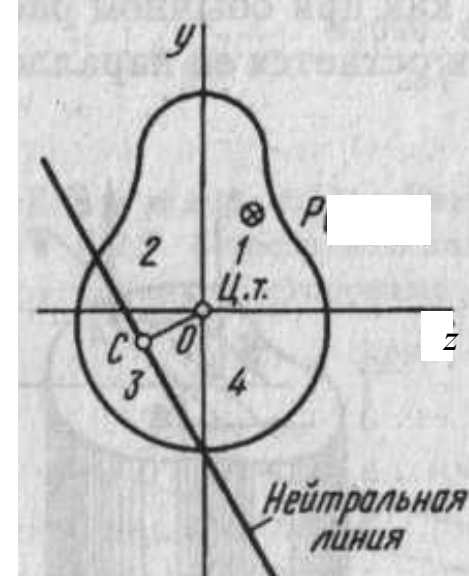


Уравнение нейтральной линии получаем, приравнявая  $\sigma$  нулю:

$$\frac{1}{A} + \frac{z_0}{I_y} z + \frac{y_0}{I_z} y = 0 \qquad y = \frac{I_z \cdot z_0}{I_y \cdot y_0} z - \frac{I_z}{A \cdot y_0}$$

Наибольшие напряжения, как и при косом изгибе, имеют место в точке с координатами  $y_1, z_1$  наиболее удаленной от нейтральной линии:

$$\sigma_{\max} = P \left( \frac{1}{A} + \frac{z_0 z_1}{I_y} + \frac{y_0 y_1}{I_z} \right)$$



При внецентренном растяжении - сжатии в отличие от косо го изгиба нейтральная линия не проходит через центр тяжести сечения. При положительных  $y_0$  и  $z_0$  по крайней мере одна из координат  $y, z$ , входящих в уравнение нейтральной линии, должна быть отрицательной. Следовательно, если точка приложения силы  $P$  находится в первом квадранте, то нейтральная линия проходит с противоположной стороны центра тяжести через квадранты 2, 3 и 4.

Расстояние от начала координат до некоторой прямой, уравнение которой

$$ay + bx + c = 0$$

как известно из курса аналитической геометрии, равно  $OC = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

В данном случае  $OC = \frac{1/A}{\sqrt{y_0^2/I_z^2 + z_0^2/I_y^2}}$

Следовательно, по мере того как точка приложения силы приближается к центру тяжести сечения, нейтральная линия удаляется от него.

В пределе при  $y_0 = z_0 = 0$ , когда сила  $P$  приложена в центре тяжести, нейтральная линия находится в бесконечности. Напряжения в этом случае распределены по сечению равномерно. По мере того как точка приложения силы удаляется от центра тяжести, отрезок  $OC$  уменьшается и нейтральная линия, следовательно, приближается к центру тяжести. Из сказанного следует, что при внецентренном растяжении и сжатии нейтральная линия может как пересекать сечение, так и находиться за его пределами. В первом случае в сечении возникают и растягивающие, и сжимающие напряжения. Во втором случае напряжения во всех точках сечения будут одного знака. Затронутый вопрос имеет значение, например, для расчета сжатых кирпичных колонн. Кирпичная кладка плохо сопротивляется растяжению. Поэтому желательно, чтобы напряжения при внецентренном сжатии были для всего сечения сжимающими и чтобы нейтральная линия проходила за пределами сечения. Для этого нужно внешнюю силу прикладывать достаточно близко к центру тяжести.

В окрестности центра тяжести существует область, называемая *ядром сечения*. Если след силы  $P$  находится внутри ядра сечения, напряжения во всех точках сечения будут одного знака. Если сила приложена за пределами ядра сечения, нейтральная линия пересекает сечение, и напряжения в сечении будут как сжимающими, так и растягивающими. Когда точка приложения силы находится на границе ядра, нейтральная линия касается контура сечения. Чтобы определить ядро сечения, надо представить себе, что нейтральная линия обкатывается вокруг сечения. Точка приложения силы вычертит при этом контуры ядра.



## 4. БАЛКИ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Согласно гипотезе Фусса – Винклера, реакция упругого основания в каждой точке пропорциональна прогибу балки

$$q_{\xi} = -\xi y$$

Таким образом, основание балки представляет собой некоторую сплошную упругую среду, представляющую собой множество несвязанных между собой пружин. Балка, расположенная на такого рода сплошной среде, называется балкой на упругом основании. Коэффициент  $\xi$  называется коэффициентом упругого основания. Простое предположение, что непрерывная реакция основания пропорциональна прогибу, приводит к вполне удовлетворительным результатам во многих практических случаях, например, в случае бетонного покрытия или железнодорожного пути. В некоторых случаях фундаменты под различного рода машины рассматриваются как балки на упругом основании.

Дифференциальное уравнение упругой линии балки:  $EI_z \frac{d^4 y}{dx^4} = q$

где  $q$  представляет интенсивность распределенной нагрузки, действующей на балку.

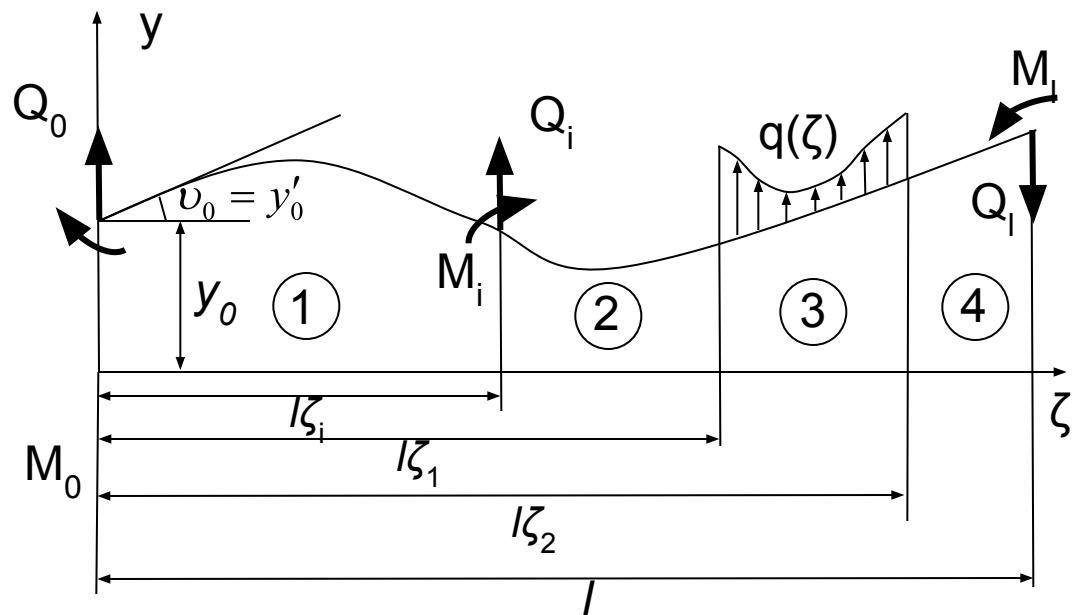
Поскольку для балки на упругом основании интенсивность распределенной нагрузки представляет собой сумму, то получаем

$$q + q_{\xi} = q - \xi y$$

$$EI_z \frac{d^4 y}{dx^4} + \xi y = q$$

Введем вместо переменной  $x$  безразмерную переменную  $\zeta$  по формуле  $x = \zeta l$ , где  $l$  - длина балки. Тогда уравнение переписывается в виде:

$$\frac{d^4 y}{d\zeta^4} + \frac{l^4 \xi}{EI_z} y = \frac{l^4}{EI_z} q$$



Для угла поворота сечения, изгибающего момента и поперечной силы получим следующие выражения:

$$y' = \frac{1}{l} \frac{dy}{d\zeta}; \quad M = \frac{EI_z}{l^2} \frac{d^2 y}{d\zeta^2}; \quad Q = \frac{EI_z}{l^3} \frac{d^3 y}{d\zeta^3}$$

Рассмотрим решение однородного дифференциального уравнения :

$$\frac{d^4 y}{d\zeta^4} + f y = 0 \quad \text{где} \quad f = \frac{l^4 \xi}{EI_z}$$

его характеристическое уравнение:  $\lambda^4 + f = 0$

Корни характеристического уравнения:  $\lambda_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\sqrt[4]{f}$ ,  $\lambda_{3,4} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)\sqrt[4]{f}$

Введем обозначения:  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[4]{f} = l \cdot \sqrt[4]{\frac{\xi}{4EI_z}}$

Тогда формулы для корней характеристического уравнения переписутся в виде:

$$\lambda_{1,2} = \pm(1+i)\gamma, \lambda_{3,4} = \pm(1-i)\gamma$$

Соответствующее решение однородного уравнения можно записать:

$$\begin{aligned} y &= C_1^{**} e^{(1+i)\gamma\zeta} + C_2^{**} e^{-(1+i)\gamma\zeta} + C_3^{**} e^{(1-i)\gamma\zeta} + C_4^{**} e^{-(1-i)\gamma\zeta} = \\ &= e^{\gamma\zeta} (C_1^* \cos \gamma\zeta + C_2^* \sin \gamma\zeta) + e^{-\gamma\zeta} (C_3^* \cos \gamma\zeta + C_4^* \sin \gamma\zeta) = \\ &= C_1 \operatorname{ch} \gamma\zeta \cos \gamma\zeta + C_2 \operatorname{ch} \gamma\zeta \sin \gamma\zeta + C_3 \operatorname{sh} \gamma\zeta \sin \gamma\zeta + C_4 \operatorname{sh} \gamma\zeta \cos \gamma\zeta \end{aligned}$$

Согласно данной формуле решение однородного уравнения записывается в трех эквивалентных формах.

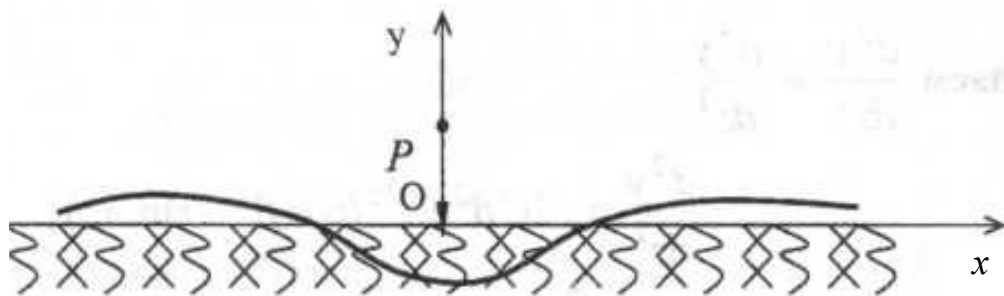
Первая форма комплексная, что неудобно на практике.

Вторая форма содержит растущую по величине и стремящуюся к нулю составляющие. Эта форма решения удобна при рассмотрении балок бесконечной длины, так как растущая составляющая должна быть равна нулю.

Третья форма решения удобна для балок ограниченной длины. В данном случае возможно получение формул метода начальных параметров, подобно тому, как это было сделано в случае поперечного изгиба балки со свободным пролетом.

Рассмотрим расчет бесконечно длинной балки на упругом основании, нагруженной одной силой  $P$

Начало координат расположим под силой. Вследствие симметрии рассмотрим только правую часть балки. Возьмем решение в виде:



$$y = e^{\beta x} (C_1^* \cos \beta x + C_2^* \sin \beta x) + e^{-\beta x} (C_3^* \cos \beta x + C_4^* \sin \beta x)$$

$$\text{где } \beta = \sqrt[4]{\frac{\xi}{4EI_z}}$$

В бесконечно удаленных точках прогиб и кривизна упругой линии обращаются в нуль. Поэтому, имея в виду, что рассматривается правая часть балки, уравнение упругой линии получается в следующем виде:

$$y = e^{-\beta x} (C_3^* \cos \beta x + C_4^* \sin \beta x)$$

Соотношение между постоянными  $C_3^*$  и  $C_4^*$  находится из условия, что в начале координат касательная к оси балки горизонтальна, т.е

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 0$$

Дифференцируем и приравниваем к нулю уравнение упругой линии

$$\frac{dy}{dx} = -\beta e^{-\beta x} [\cos \beta x (C_3^* - C_4^*) + \sin \beta x (C_3^* + C_4^*)] = 0$$

отсюда  $C_3^* = C_4^* = C$

Следовательно  $y = e^{-\beta x} C (\cos \beta x + \sin \beta x); \quad \frac{dy}{dx} = -2e^{-\beta x} C \beta \sin \beta x$

Для определения постоянной  $C$  воспользуемся условием, что поперечная сила в

правом сечении балки в начале координат равна  $P/2$ , то есть  $Q|_{x=0} = -\frac{P}{2}$

Но с другой стороны  $EI_z \frac{d^3 y}{dx^3} = Q(x)$  следовательно  $EI_z \left. \frac{d^3 y}{dx^3} \right|_{x=0} = -\frac{P}{2}$

Вычисляем  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  и  $\frac{d^3 y}{dx^3}$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -2C\beta^2 e^{-\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x);$$
$$\frac{d^3 y}{dx^3} = 4C\beta^3 e^{-\beta x} \cos \beta x.$$

С учетом НУ

$$EI_z 4C\beta^3 = -\frac{P}{2}$$
$$C = -\frac{P}{8EI_z \beta^3}$$

Итоговые уравнения

$$y = -\frac{P}{8EI_z \beta^3} e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x);$$
$$y' = \frac{P}{4EI_z \beta^2} e^{-\beta x} \sin \beta x;$$
$$M = \frac{P}{4\beta} e^{-\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x);$$
$$Q = -\frac{P}{2} e^{-\beta x} \cos \beta x.$$

# Метод начальных параметров для балок на упругом основании

Исходная система уравнений будет иметь вид:

$$\begin{cases} y = C_1 \operatorname{ch} \gamma \zeta \cos \gamma \zeta + C_2 \operatorname{ch} \gamma \zeta \sin \gamma \zeta + C_3 \operatorname{sh} \gamma \zeta \sin \gamma \zeta + C_4 \operatorname{sh} \gamma \zeta \cos \gamma \zeta; \\ y' = \frac{\gamma}{l} [C_1 (\cos \gamma \zeta \operatorname{sh} \gamma \zeta - \sin \gamma \zeta \operatorname{ch} \gamma \zeta) + C_2 (\sin \gamma \zeta \operatorname{sh} \gamma \zeta + \cos \gamma \zeta \operatorname{ch} \gamma \zeta) + \\ + C_3 (\sin \gamma \zeta \operatorname{ch} \gamma \zeta + \cos \gamma \zeta \operatorname{sh} \gamma \zeta) + C_4 (\cos \gamma \zeta \operatorname{ch} \gamma \zeta - \sin \gamma \zeta \operatorname{sh} \gamma \zeta)]; \\ M = \frac{2EI_z \gamma^2}{l^2} (-C_1 \sin \gamma \zeta \operatorname{sh} \gamma \zeta + C_2 \cos \gamma \zeta \operatorname{sh} \gamma \zeta + C_3 \cos \gamma \zeta \operatorname{ch} \gamma \zeta - C_4 \sin \gamma \zeta \operatorname{ch} \gamma \zeta); \\ Q = \frac{2EI_z \gamma^3}{l^3} [-C_1 (\sin \gamma \zeta \operatorname{ch} \gamma \zeta + \cos \gamma \zeta \operatorname{sh} \gamma \zeta) + C_2 (\cos \gamma \zeta \operatorname{ch} \gamma \zeta - \sin \gamma \zeta \operatorname{sh} \gamma \zeta) + \\ + C_3 (\cos \gamma \zeta \operatorname{sh} \gamma \zeta - \sin \gamma \zeta \operatorname{ch} \gamma \zeta) - C_4 (\sin \gamma \zeta \operatorname{sh} \gamma \zeta + \cos \gamma \zeta \operatorname{ch} \gamma \zeta)]; \end{cases}$$

При постановке задачи в форме Коши данные соотношения должны удовлетворять условиям:

$$\begin{aligned} y|_{\zeta=0} = y_0 = C_1; & \quad y'|_{\zeta=0} = y'_0 = \frac{\gamma}{l} (C_2 - C_4); \\ M|_{\zeta=0} = M_0 = \frac{2EI_z \gamma^2}{l^2} C_3; & \quad Q|_{\zeta=0} = Q_0 = \frac{2EI_z \gamma^3}{l^3} (C_2 + C_4). \end{aligned}$$

Из НУ определяем постоянные интегрирования

$$C_1 = y_0; \quad C_2 = \frac{y_0' l}{2\gamma} + \frac{Q_0 l^3}{4EI_z \gamma^3}; \quad C_3 = \frac{M_0 l^2}{2EI_z \gamma^2}; \quad C_4 = \frac{y_0' l}{2\gamma} - \frac{Q_0 l^3}{4EI_z \gamma^3}.$$

Для упрощения записи введем функции Крылова:

$$s = \cos \gamma \zeta \operatorname{sh} \gamma \zeta, \quad t = \frac{1}{2} (\sin \gamma \zeta \operatorname{ch} \gamma \zeta + \cos \gamma \zeta \operatorname{sh} \gamma \zeta), \quad u = \frac{1}{2} \sin \gamma \zeta \operatorname{sh} \gamma \zeta, \quad v = \frac{1}{4} (\sin \gamma \zeta \operatorname{ch} \gamma \zeta - \cos \gamma \zeta \operatorname{sh} \gamma \zeta).$$

Функции Крылова обладают свойствами

$$\frac{ds}{d\zeta} = -4\gamma v; \quad \frac{dt}{d\zeta} = \gamma s; \quad \frac{du}{d\zeta} = \gamma t; \quad \frac{dv}{d\zeta} = \gamma u.$$

С учетом НУ и свойств функций Крылова исходная система уравнений может быть представлена:

$$y = sy_0 + \frac{l}{\gamma} ty_0' + \frac{l^2}{EI_z \gamma^2} u M_0 + \frac{l^3}{EI_z \gamma^3} v Q_0;$$

$$y' = -\frac{4\gamma}{l} v y_0 + sy_0' + \frac{l}{EI_z \gamma} t M_0 + \frac{l^2}{EI_z \gamma^2} u Q_0;$$

$$M = \frac{4EI_z \gamma^2}{l^2} u y_0 - \frac{4EI_z \gamma}{l} v y_0' + s M_0 + \frac{l}{\gamma} t Q_0;$$

$$Q = -\frac{4EI_z \gamma^3}{l^3} t y_0 - \frac{4EI_z \gamma^2}{l^2} u y_0' - \frac{4\gamma}{l} v M_0 + s Q_0.$$



Для балок с несколькими приложенными сосредоточенными силами, моментами и грузовыми площадками соотношения проще записать в матричной форме.

$$V^T(\zeta) = |y(\zeta), y'(\zeta), M(\zeta), Q(\zeta)|;$$

$$V_0^T = |y_0, y'_0, M_0, Q_0|;$$

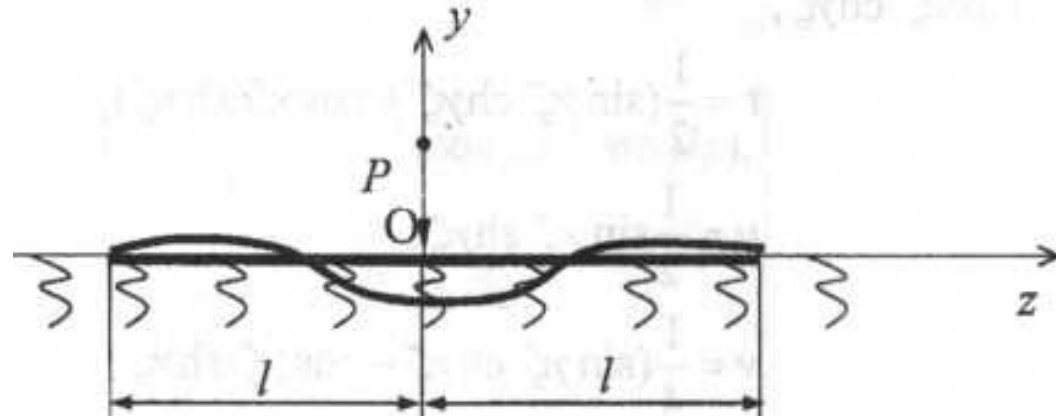
$$V_i^T = |0, 0, M_i, Q_i|;$$

$$V^T(\alpha) = |0, 0, 0, q(\alpha)|;$$

$$K(x) = \begin{vmatrix} s & \frac{lt}{\gamma} & \frac{l^2 u}{\gamma^2 EI_z} & \frac{l^3 v}{EI_z 3!} \\ -\frac{4\gamma v}{l} & s & \frac{lt}{\gamma EI_z} & \frac{l^2 u}{\gamma^2 EI_z} \\ \frac{4\gamma^2 EI_z u}{l^2} & -\frac{4\gamma EI_z v}{l} & s & \frac{lt}{\gamma} \\ -\frac{4\gamma^3 EI_z t}{l^3} & -\frac{4\gamma^2 EI_z u}{l^2} & -\frac{4\gamma v}{l} & s \end{vmatrix}$$

$$V(\zeta) = K(\zeta)V_0|_1 + \sum K(\zeta - \zeta_i)V_i|_2 + \sum l \cdot \left( \int_{\alpha_1}^{\zeta} K(\zeta - \alpha)V(\alpha)d\alpha|_3 + \int_{\zeta}^{\alpha_2} K(\zeta - \alpha)V(\alpha)d\alpha|_4 \right)$$

В качестве примера рассмотрим балку на упругом основании конечной длины, нагруженную сосредоточенной силой в середине.



С учетом симметрии имеем следующие граничные условия:

$$y'_0 = \left. \frac{dy}{d\zeta} \right|_{\zeta=0} = 0; \quad Q_0 = \left. \frac{EI_z}{l^3} \frac{d^3 y}{d\zeta^3} \right|_{\zeta=0} = -\frac{P}{2};$$

$$M_l = \left. \frac{EI_z}{l^2} \frac{d^2 y}{d\zeta^2} \right|_{\zeta=l} = 0; \quad Q_l = \left. \frac{EI_z}{l^3} \frac{d^3 y}{d\zeta^3} \right|_{\zeta=l} = 0.$$

Воспользовавшись соотношениями метода начальных параметров, получаем уравнения для нахождения  $y_0$  и  $M_0$ :

$$-\frac{4EI_z \gamma^2}{l^2} u(1)y_0 + s(1)M_0 = \frac{l}{\gamma} t(1) \frac{P}{2},$$

$$-\frac{4EI_z \gamma^3}{l^3} t(1)y_0 - \frac{4\gamma}{l} v(1)M_0 = s(1) \frac{P}{2}$$

Решая систему получаем

$$y_0 = -\frac{P}{8} \frac{l^3}{EI_z \gamma^3} \frac{4t(1)v(1) + s^2(1)}{4u(1)v(1) + s(1)t(1)},$$

$$M_0 = \frac{P}{2} \frac{l}{\gamma} \frac{[-u(1)s(1) + t^2(1)]}{4u(1)v(1) + s(t)t(1)}$$

Записываем формулу прогиба балки

$$y(\zeta) = -\frac{P}{2} \frac{l^3}{EI_z \gamma^3} \left[ \frac{1}{4u(1)v(1) + s(1)t(1)} \times \right. \\ \left. \times \left\{ \frac{1}{4} [4t(1)v(1) + s^2(1)] \cdot s(\zeta) + [u(1)s(1) - t^2(1)] u(\zeta) \right\} + v(\zeta) \right];$$