

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»
(ДГТУ)**

ФАКУЛЬТЕТ «ТРАНСПОРТ, ЭКСПЛУАТАЦИЯ И СВЯЗЬ»

**ДИСЦИПЛИНА:
Методы и средства обработки сигналов**

**Лекция
по учебной дисциплине
«Задачи обнаружения и оценивания параметров
сигналов.»**

**Ростов-на-Дону
2021**

Содержание:

Введение.

Учебные вопросы:

1. Оптимальное обнаружение и различение сигналов.

2. Характеристики и методы оценки параметров сигналов.

Заключение.

Рекомендуемая литература:

1. Тихонов В.И. Оптимальный прием сигналов. – М.: Радио и связь, 1983.—320 с. (С. 66-95, 166-201)
2. Липкин И.А. Статистическая радиотехника. Теория информации и кодирования. — М.: Вузовская книга, 2002. — 216 с. (С. 54-74)
3. Перов А.И. Статистическая теория радиотехнических систем. – М.: Радиотехника, 2003. – 400 с., инв. Р 717. (С. 83-110, 158-201)
4. Радиотехнические системы / Под ред. Ю.М. Казаринова. — М.: Высшая школа, 1990.— 496 с.
5. Фалькович С.Е., Хомяков Э.Н. Статистическая теория измерительных радиосистем. - М.: Радио и связь, 1981. - 288 с.
6. Радзиевский В.Г., Сирота А.А. Теоретические основы радиоэлектронной разведки. – М.: Радиотехника, 2004. – 432 с.
7. Информационные технологии в радиотехнических системах / Под ред. И.Б. Федорова. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. — 846 с.
8. Шахтарин Б.И. Обнаружение сигналов. – М.: Горячая линия–Телеком, 2014. – 526 с.
9. Тихонов В.И., Шахтарин Б.И., Сизых В.В. Случайные процессы. Примеры и задачи. Т.5. Оценка сигналов, их параметров и спектров. Основы теории информации. — М.: Горячая линия-Телеком, 2012. — 400 с.

1. Оптимальное обнаружение и различение сигналов

Обозначим через H_0 и H_1 соответственно гипотезы об отсутствии ($\eta = 0$) и о присутствии ($\eta = 1$) сигнала в принятом колебании $x(t) = \eta s(t, \lambda) + u(t)$, $0 \leq t \leq T$.

При решении задачи обнаружения возможен один из четырех исходов:

- 1) выбрана гипотеза H_0 и верна гипотеза H_0 ;
- 2) выбрана гипотеза H_1 , а верна H_0 ;
- 3) выбрана гипотеза H_1 и верна H_1 ;
- 4) выбрана гипотеза H_0 , а верна H_1 .

Пусть известны априорные вероятности отсутствия $P_0 = P(H_0) = P(\eta = 0)$ и присутствия $P_1 = P(H_1) = P(\eta = 1)$ сигнала. Припишем каждому из четырех возможных исходов решения задачи обнаружения некоторую стоимость, характеризующую те потери (или выигрыш), которые будут при этом исходе. Обозначим эти стоимости соответственно C_{00} , C_{10} , C_{11} и C_{01} (первый индекс обозначает выбранную гипотезу, а второй – правильную). Будем строить правило решения таким образом, чтобы средние потери были минимальными (*критерий Байеса*). Величину средних потерь назовем средним риском и обозначим буквой R . Обозначим условные вероятности перечисленных исходов: $P(H_0/H_0)$, $P(H_1/H_0)$, $P(H_1/H_1)$, $P(H_0/H_1)$, где первой стоит выбранная гипотеза, а второй – правильная. Тогда средний риск равен

$$R = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 C_{ij} P(H_i, H_j) = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 C_{ij} P(H_i) P(H_j/H_i) = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 C_{ij} P_i P(H_j/H_i) \text{ или}$$

$$R = C_{00} P_0 P(H_0/H_0) + C_{10} P_0 P(H_1/H_0) + C_{11} P_1 P(H_1/H_1) + C_{01} P_1 P(H_0/H_1).$$

Примем, что стоимости потерь при ошибочном решении $C_{10} > 0$ и $C_{01} > 0$, тогда как при правильном решении мы имеем выигрыш или отрицательные потери: $C_{00} \leq 0$ и $C_{11} \leq 0$. Таким образом, всегда будут выполняться условия: $C_{10} > C_{00}$; $C_{01} > C_{11}$. Правило решения сводится к разбиению пространства Z принятых колебаний $x(t)$ на две части Z_0 и Z_1 , соответствующие принятию гипотез H_0 и H_1 (рис. 1). Оптимизация правила решения сводится к такому выбору границ разбиения, который минимизирует средний риск R .

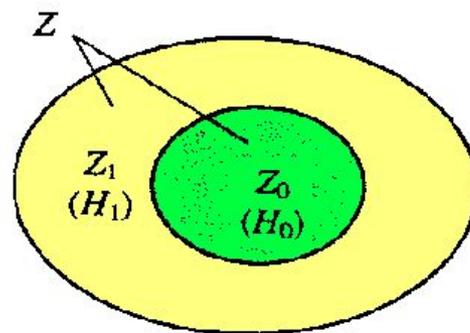


Рис. 1 - Разбиение пространства Z принятых колебаний на две части Z_0 и Z_1

Поскольку для области Z_0 принимается гипотеза H_0 , а для области Z_1 – гипотеза H_1 ,

$$P(H_0|H_0) = \int_{Z_0} p(x/H_0) dx, \quad P(H_1|H_0) = \int_{Z_1} p(x/H_0) dx,$$

$$P(H_1|H_1) = \int_{Z_1} p(x/H_1) dx, \quad P(H_0|H_1) = \int_{Z_0} p(x/H_1) dx,$$

где $p(x/H_0)$ и $p(x/H_1)$ – плотности условных вероятностей появления принятых колебаний $x(t)$ при условии справедливости гипотез H_0 и H_1 .

Интегралы от этих плотностей вероятности по областям Z_0 и Z_1 пространства реализаций $x(t)$ дают вероятность того, что при этом реализация будет принадлежать данным областям и соответственно будут приняты гипотезы H_0 и H_1 .

Подставляя последние выражения в выражение для **среднего риска** получим:

$$R = C_{00}P_0 \int_{Z_0} p(x/H_0)dx + C_{10}P_0 \int_{Z_1} p(x/H_0)dx + C_{11}P_1 \int_{Z_1} p(x/H_1)dx + C_{01}P_1 \int_{Z_0} p(x/H_1)dx.$$

Учитывая, что $\int_{Z_1} p(x/H_i)dx = 1 - \int_{Z_0} p(x/H_i)dx$, $i = 0,1$,

получим $R = P_0C_{10} + P_1C_{11} + \int_{Z_0} [P_1(C_{01} - C_{11})p(x/H_1) - P_0(C_{10} - C_{00})p(x/H_0)]dx$.

Первые два члена в последнем выражении соответствуют фиксированным потерям, не зависящим от выбора границ области Z_0 . Поэтому для минимизации R нужно выбрать область Z_0 так, чтобы она включала все отрицательные (и только отрицательные) значения подынтегрального выражения, т.е. из условия

$$P_1(C_{01} - C_{11})p(x/H_1) - P_0(C_{10} - C_{00})p(x/H_0) < 0.$$

Данное неравенство можно переписать в виде $\frac{p(x/H_1)}{p(x/H_0)} < \frac{P_0(C_{10} - C_{00})}{P_1(C_{01} - C_{11})}$.

а правило решения в виде $\frac{p(x/H_1)}{p(x/H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \frac{P_0(C_{10} - C_{00})}{P_1(C_{01} - C_{11})}$.

Такая запись означает, что при знаке $>$ принимается решение H_1 , а при знаке $<$ – решение H_0 . Левую часть неравенства называют *отношением правдоподобия* и обозначают

$$\Lambda(x) = \frac{p(x/H_1)}{p(x/H_0)}$$

Смысл термина очевиден: более правдоподобна та из гипотез, которой соответствует большая плотность вероятности получения данной реализации $x(t)$. Каждой реализации случайной функции $x(t)$ соответствует определенная величина отношения плотностей вероятностей. Поэтому отношение правдоподобия $\Lambda(x)$ является одномерной случайной величиной. Правая часть последнего неравенства представляет собой фиксированную величину, зависящую только от априорного распределения вероятностей передачи сигналов и от выбора стоимостей верных и неверных решений. Она определяет порог решающей схемы $\Lambda_0 = P_0(C_{10} - C_{00}) / P_1(C_{01} - C_{11})$. Таким образом, критерий Байеса сводится к кри-

терию отношения правдоподобия: $\Lambda(x) \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \Lambda_0$.

Распределение априорных вероятностей и стоимостей влияет лишь на выбор значения порога, но не влияет на процедуру обработки данных, заключающуюся в вычислении $\Lambda(x)$. Поэтому уточнение стоимостей и априорных вероятностей, которые часто носят характер не очень строгих экспертных оценок на основе интуиции или предшествующего опыта, не влияет на решающую схему, а требует лишь перестройки уровня порога.

Если потери при ошибочном решении об обнаружении принять одинаковыми $C_{10} = C_{01}$, а потери при правильном решении нулевыми - $C_{11} = C_{00} = 0$, то минимизация среднего риска R сведется к минимизации среднего числа ошибок в приеме независимо от характера этих ошибок. Критерий минимума среднего числа ошибок был назван В.А. Котельниковым критерием "идеального наблюдателя". Иногда этот критерий называют еще критерием Котельникова. Для указанного критерия порог обнаружения равен $\Lambda_0 = P_0 / P_1$.

Так как при радиоэлектронной разведке указанные вероятности неизвестны, а выбор стоимостей потерь затруднен, то в качестве критерия оптимальности обнаружения обычно используется критерий Неймана-Пирсона, согласно которому принимается гипотеза, соответствующая максимальной вероятности правильного обнаружения при заданном допустимом значении вероятности ложного обнаружения (ложной тревоги).

В рассмотренных, выше критериях предполагалось, что принятие решения осуществляется за фиксированный интервал времени T . Однако может оказаться, что решение можно принять за интервал времени, меньший T . Этот факт учитывает последовательный наблюдатель. При последовательном наблюдении производится непрерывный анализ отношения правдоподобия и сравнение его с двумя порогами $h' = (1 - p_D) / (1 - p_F)$ и $h'' = p_D / p_F$. Если отношение правдоподобия меньше h' , то принимается решение о наличии только шума. Если же отношение правдоподобия больше h'' , то принимается решение о наличии сигнала. В том случае, когда отношение правдоподобия находится между нижним уровнем h' и верхним h'' , имеющихся в распоряжении данных недостаточно для принятия решения, и испытание продолжается. Такая процедура повторяется до тех пор, пока не будет принято определенное решение.

Последовательный анализ был разработан А. Вальдом. Преимущество последовательного наблюдателя состоит в том, что можно независимо задавать вероятности p_F и p_D , и он дает определенную экономию в энергии сигнала или во времени за счет сравнительно быстрого, принятия решения об отсутствии цели. Однако применение последовательного анализа предполагает более сложную работу аппаратуры.

Рассмотрим более подробно задачу обнаружения детерминированного сигнала на фоне белого гауссовского шума (БГШ). В этом случае правило обнаружения будет иметь вид

$$\Lambda(x) = \exp \left\{ \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t)s(t, \lambda) dt - \frac{1}{N_0} \int_0^T s^2(t, \lambda) dt \right\} \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \Lambda_0,$$

где N_0 - односторонняя спектральная плотность мощности БГШ. Учитывая монотонный характер логарифмической функции и прологарифмировав обе части последнего неравенства, получим

$$q = \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t)s(t, \lambda) dt \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \frac{E}{N} + \ln \Lambda_0 = h.$$

Из этого выражения видно, что для вынесения решения о наличии или отсутствии детерминированного сигнала, принимаемого на фоне белого шума, нужно принятую реализацию $x(t)$ перемножить с копией полезного сигнала, проинтегрировать произведение и результат интегрирования в момент времени $t = T$ сравнить с порогом h (рис. 2).

Если этот пороговый уровень превышен, то принимается решение о наличии сигнала. Если же порог не превышен, то констатируется отсутствие сигнала.

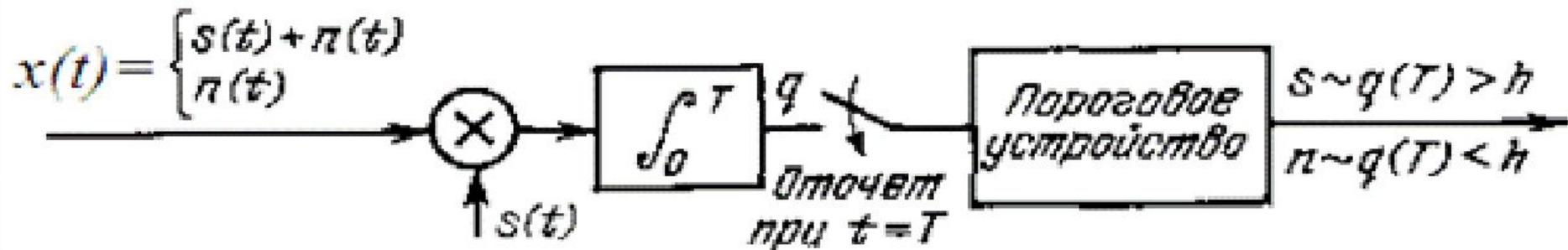


Рис. 2 - Структурная схема оптимального обнаружителя детерминированного сигнала на основе корреляционного приемника

Если детерминированный сигнал присутствует, то $x(t) = s(t) + n(t)$. Случайная величина $q = q_1 = \frac{2}{N_0} \int_0^T [s(t) + n(t)]s(t)dt$ будет иметь нормальную плотность вероятности $p_1(q)$ с математическим ожиданием и дисперсией, равными: $m_1 = M\{q_1\} = 2E/N$, $D_1 = M\{(q_1 - m_1)^2\} = 2E/N$. В отсутствие сигнала $x(t) = n(t)$ и случайная величина $q = q_0 = \frac{2}{N_0} \int_0^T n(t)s(t)dt$ имеет также нормальную плотность вероятности $p_0(q)$, причем $m_0 = M\{q_0\} = 0$, $D_0 = M\{q_0^2\} = 2E/N$.

Плотности вероятности $p_1(q)$ и $p_0(q)$ изображены на рис. 3.

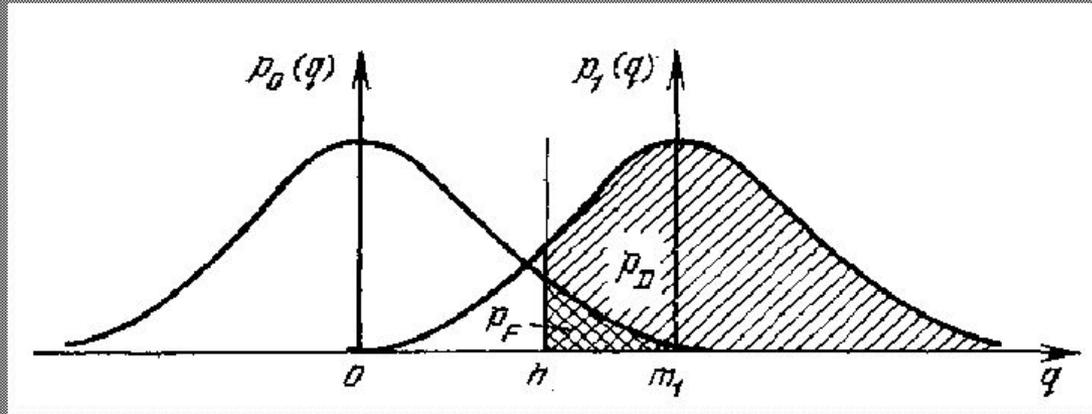


Рис. 3 - Нормальные плотности вероятности $p_1(q)$ и $p_0(q)$ при наличии и отсутствии сигнала (p_F — вероятность ложной тревоги, p_D — вероятность правильного обнаружения)

Согласно критерию Неймана — Пирсона должна задаваться вероятность ложной тревоги p_F , т.е. вероятность превышения выходным шумом при $t = T$ порогового уровня h :

$$p_F = \int_h^{\infty} p_0(q) dq = 1 - \Phi\left(\frac{h}{\sqrt{2E/N}}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$ — интеграл вероятности. При этом вероятность правильного

обнаружения будет равна $p_D = \int_h^{\infty} p_1(q) dq = 1 - \Phi\left(-\frac{h}{\sqrt{2E/N}} - \sqrt{\frac{2E}{N}}\right)$.

На рис. 3 площади, соответствующие вероятностям p_F и p_D , заштрихованы.

Рассмотренные выражения позволяют рассчитать кривые обнаружения сигнала (рис. 4), которые представляют собой зависимость вероятности правильного обнаружения p_D от отношения сигнал-шум при фиксированной вероятности ложной тревоги p_F .

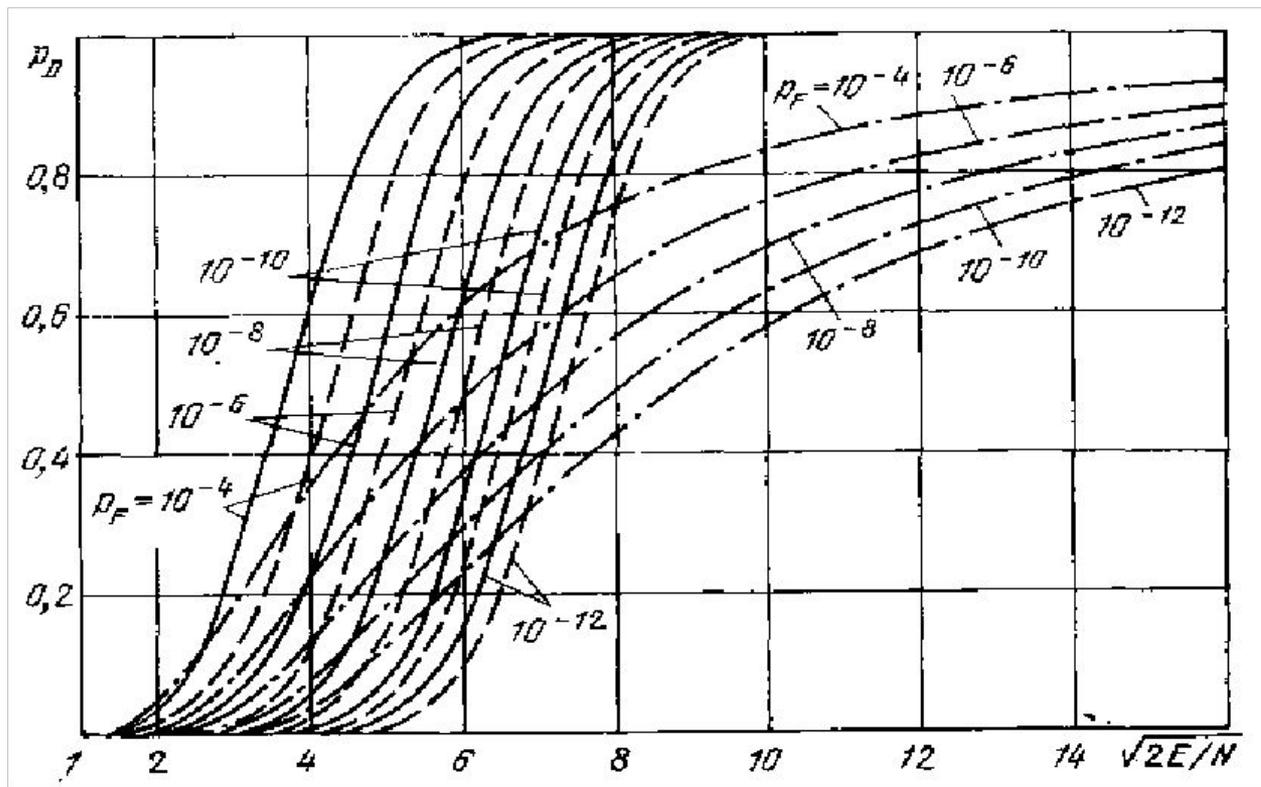


Рис. 4 - Кривые обнаружения для детерминированного сигнала (сплошные), сигнала со случайной начальной фазой (штриховые) и сигнала со случайными амплитудой и начальной фазой (штрихпунктирные)

Структурная схема обнаружителя радиосигнала со случайной начальной фазой усложняется (рис. 5). В ней появляются квадратурные каналы. Структурная схема обнаружителя федингующего радиосигнала (со случайной начальной фазой и случайной амплитудой) не изменится (рис. 5). Для указанного радиосигнала существует простая зависимость вероятности правильного обнаружения от вероятности ложной тревоги $p_D = p_F^{1/(1+E/N)}$.

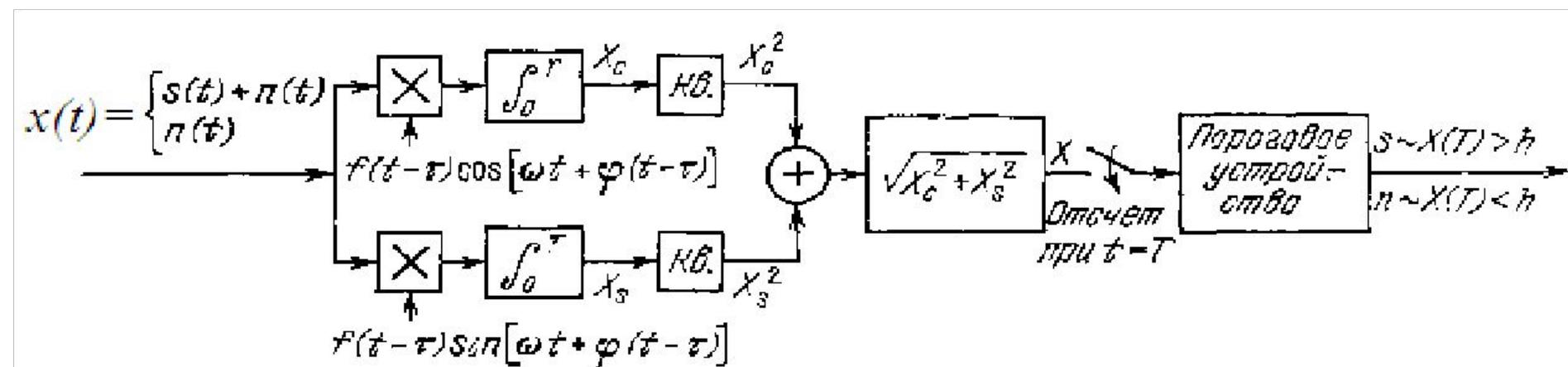


Рис. 5 - Структурная схема оптимального корреляционного (квадратурного) обнаружителя радиосигнала со случайной начальной фазой

При радиоэлектронной разведке неизвестными являются не только параметры, но и форма сигналов, определяемая видами их модуляции или кодирования. Априорно известными являются лишь занимаемый сигналом диапазон частот. В этом случае для обнаружения сигнала на фоне БГШ обычно используется энергетический обнаружитель, состоящий из последовательно соединенных полосового фильтра (ПФ), энергетического приемника (ЭП) и порогового устройства (ПУ).

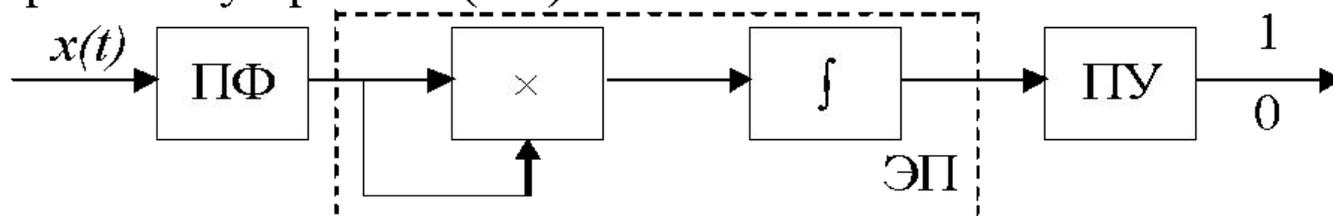


Рис. 6 - Структурная схема энергетического обнаружителя

Задача различения сигналов является обобщением задачи обнаружения. Она формулируется следующим образом. В принятом колебании может быть только один из двух сигналов $s_1(t, \lambda_1)$ или $s_2(t, \lambda_2)$:

$$x(t) = \eta s_1(t, \lambda_1) + (1 - \eta) s_2(t, \lambda_2) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

где случайная величина η может принимать только два значения: $\eta = 1$ (присутствует сигнал $s_1(t, \lambda_1)$) с вероятностью p_1 и $\eta = 0$ (присутствует сигнал $s_2(t, \lambda_2)$) с вероятностью $p_2 = 1 - p_1$. Нужно по принятой реализации $x(t)$ вынести оптимальное решение — присутствует ли сигнал $s_1(t, \lambda_1)$ или сигнал $s_2(t, \lambda_2)$. При $s_2(t, \lambda_2) = 0$ задача различения двух сигналов переходит в задачу обнаружения. Подобным же образом формулируется задача многоальтернативного различения.

2. Характеристики и методы оценки параметров сигналов

Так как поступающая на вход приемника реализация $x(t) = s(t, \lambda) + n(t)$, $0 \leq t \leq T$, представляет собой аддитивную смесь сигнала и шума, то точное определение интересующего нас параметра λ в этих условиях невозможно. Задача заключается в определении так называемой оценки этого параметра $\hat{\lambda} = \lambda(x)$ по данной входной реализации $x(t)$, дающей наилучшее (в определенном смысле) приближение к действительному значению этого параметра.

Для определения критерия оптимальности оценки параметра λ так же, как и в задаче обнаружения, припишем каждому значению ошибки оценки $\hat{\lambda} - \lambda$ определенные стоимости потерь $c(\hat{\lambda} - \lambda)$. Функцию $c(\hat{\lambda} - \lambda)$ назовем функцией потерь. Она является неотрицательной функцией ошибки оценки.

В качестве критерия оптимальности оценки естественно принять критерий минимума соответствующего ей среднего значения риска для всех возможных значений параметра λ и всех возможных реализаций смеси сигнала и шума $x(t)$. Этот критерий предложен Байесом и носит его имя. Его можно рассматривать как обобщение критерия Байеса, принятого при рассмотрении задачи обнаружения. Величина среднего (байесовского) риска для выбранной функции потерь $c(\hat{\lambda} - \lambda)$ и известной совместной плотности вероятности $p(x, \lambda)$ принятой реализации $x(t)$ и параметра сигнала λ равна

$$R(\hat{\lambda}) = \int_{Z-\infty}^{\infty} \int c(\hat{\lambda} - \lambda) p(x, \lambda) d\lambda dx = \int_Z p(x) R_{ps}(\hat{\lambda}) dx, \quad R_{ps}(\hat{\lambda}) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\hat{\lambda} - \lambda) p(\lambda/x) d\lambda, \quad \text{где } Z \text{ — область}$$

ласть всех возможных реализаций $x(t)$, $R_{ps}(\hat{\lambda})$ - апостериорный риск, то есть при заданной реализации $x(t)$.

Оптимальная оценка должна минимизировать байесовский риск или, так $p(x)$ - не зависящая от $\hat{\lambda}$ положительно определенная функция, апостериорный риск. То есть

$$\hat{\lambda}_b = \arg \min_{\hat{\lambda}} R(\hat{\lambda}) = \arg \min_{\hat{\lambda}} R_{ps}(\hat{\lambda}).$$

Очевидно, что получаемое на основе указанного условия значение оценки зависит от вида функции потерь. Наиболее часто используются: квадратичная, модульная и простая функции потерь (рис. 7).

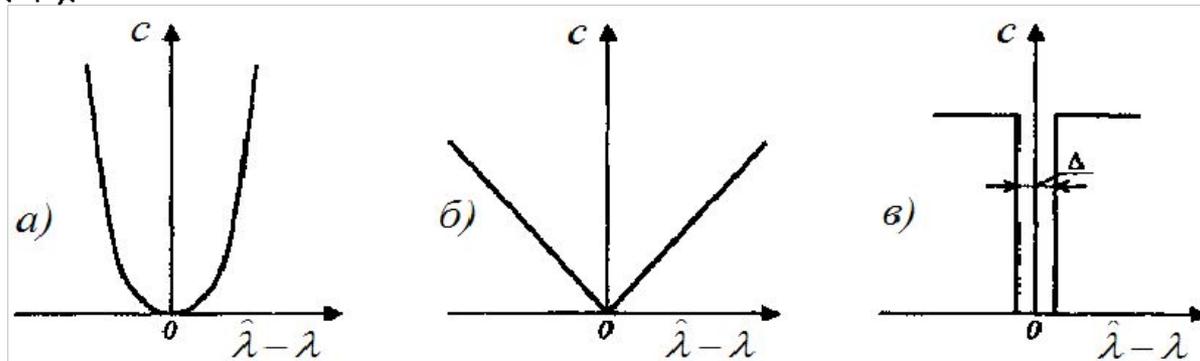


Рис. 7 – Функции потерь

Рассмотрим оценки, соответствующие каждой из указанных функций потерь.

1. Для квадратичной функции потерь $c(\hat{\lambda} - \lambda) = (\hat{\lambda} - \lambda)^2$ оценка находится из условия

$$\frac{d}{d\hat{\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{\lambda} - \lambda)^2 p(\lambda/x) d\lambda = 2\hat{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} p(\lambda/x) d\lambda - 2 \int_{-\infty}^{\infty} \lambda p(\lambda/x) d\lambda = 0. \text{ Так как } \int_{-\infty}^{\infty} p(\lambda/x) d\lambda = 1, \text{ то}$$

$$\hat{\lambda}_{kw} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda p(\lambda/x) d\lambda. \text{ Таким образом, оптимальная оценка параметра сигнала определяется}$$

как апостериорное математическое ожидание или что, то же самое, как абсцисса центра тяжести апостериорного закона распределения возможных значений параметра λ .

2. Для модульной функции потерь $c(\hat{\lambda} - \lambda) = |\hat{\lambda} - \lambda|$ оценка находится из условия

$$\frac{d}{d\hat{\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\lambda} - \lambda| p(\lambda/x) d\lambda = \frac{d}{d\hat{\lambda}} \left[\int_{-\infty}^{\hat{\lambda}} (\hat{\lambda} - \lambda) p(\lambda/x) d\lambda + \int_{\hat{\lambda}}^{\infty} (\lambda - \hat{\lambda}) p(\lambda/x) d\lambda \right] = 0 \text{ или}$$

$$\int_{-\infty}^{\hat{\lambda}_m} p(\lambda/x) d\lambda = \int_{\hat{\lambda}_m}^{\infty} p(\lambda/x) d\lambda.$$

Таким образом, байесовская оценка параметра по критерию минимума среднего значения модуля ошибки соответствует *абсциссе медианы апостериорного закона распределения* $p(\lambda/x)$, делящей пополам площадь фигуры, отвечающей этому закону.

3. Для простой функции потерь $c(\hat{\lambda} - \lambda) = \begin{cases} 0 & \text{при } |\hat{\lambda} - \lambda| \leq \Delta/2, \\ c_0 & \text{при } |\hat{\lambda} - \lambda| > \Delta/2, \end{cases}$ которая характерна для

систем, которые при ошибке оценивания параметра, превосходящей величину $\Delta/2$, вообще не решают поставленную задачу, а при ошибке, не превышающей величину $\Delta/2$, обеспечивают полноценное решение поставленной задачи, оценка находится из условия

минимума величины $c_0 \left[1 - \int_{\hat{\lambda}-\Delta/2}^{\hat{\lambda}+\Delta/2} p(\lambda/x) d\lambda \right]$.

Если при этом допустимая ошибка $\Delta/2$ мала по сравнению с областью возможных значений параметра, то минимум последнего выражения, отвечающий максимуму вычитаемого интеграла, обеспечивается при выборе оценки, соответствующей *максимуму апостериорной плотности вероятности* $p(\lambda/x)$.

Во многих практических случаях, в частности при действии аддитивной нормальной помехи, функция $p(\lambda/x)$ симметрична относительно ее максимума. В этом случае при всех трех существенно различных формах функции потерь критерий Байеса сводится к общему критерию максимума апостериорной вероятности. Это свойство сравнительно слабой зависимости байесовской оценки от конкретного выбора функции риска при решении многих практических задач особенно важно, если учесть трудности строгого обоснования формы функции риска.

В случае высокоточных измерений область неопределенности значений параметра λ при известной реализации $x(t)$, определяемая апостериорным законом распределения $p(\lambda/x)$, много уже области возможных значений параметра по априорной информации (до измерений), определяемой распределением $p(\lambda)$. В этом случае в узкой области апостериорного распределения $p(\lambda/x)$ можно принять априорное распределение постоянным

$$p(\lambda) = \text{const}. \text{ Воспользуемся формулой Байеса: } p(\lambda/x) = \frac{p(\lambda)p(x/\lambda)}{\int_{-\infty}^{\infty} p(\lambda)p(x/\lambda)d\lambda}.$$

Из последнего выражения следует, что при $p(\lambda) = \text{const}$ апостериорная плотность вероятности $p(\lambda/x)$ пропорциональна значению $p(x/\lambda)$. Функция $p(x/\lambda)$, представляющая плотность вероятности получения данной реализации $x(t)$ при фиксированном значении λ , характеризует правдоподобность той или иной гипотезы о значении параметра λ при известной реализации $x(t)$ и называется функцией правдоподобия. Критерий максимума апостериорной плотности вероятности при высокоточных измерениях сводится, таким образом, к критерию максимума функции правдоподобия.

При оценивании параметра сигнала известной формы на фоне БГШ оценка максимального правдоподобия (ОМП) находится из условия

$$\hat{\lambda}_{\text{опр}} = \arg \max_{\lambda} \left\{ \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t)s(t, \lambda) dt - \frac{1}{N_0} \int_0^T s^2(t, \lambda) dt \right\}.$$

ОМП можно использовать также в случае, когда отсутствует априорная информация о законе распределения параметра. В частном случае, когда энергия сигнала не зависит от значения измеряемого параметра, получение оптимальной оценки параметра сводится к определению его значения λ , обеспечивающего

максимум корреляционного интеграла $q = \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t)s(t, \lambda) dt$. Функциональная схема оптимального измерителя, реализующего оптимальную оценку одного неэнергетического параметра λ сигнала, приведена на рис. 8.

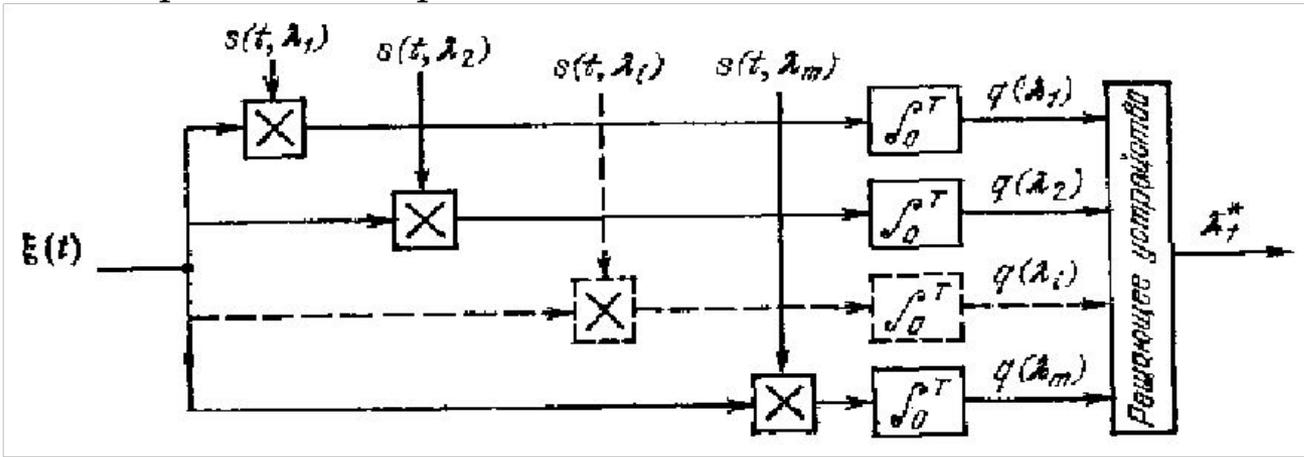


Рис. 8 - Общая структурная схема оптимального измерителя одного неэнергетического параметра сигнала известной формы

При наличии у сигнала мешающих параметров μ , являющихся случайными величинами с известной априорной плотностью распределения $p(\mu)$, осуществляется *усреднение совместной функции правдоподобия по мешающим параметрам* $p(x/\lambda) = \int p(\mu)p(x/\lambda, \mu)d\mu$. Примером является оценивание параметров сигнала со случайной начальной фазой (в схеме измерителя появляются квадратурные каналы).

Свойства оценок: состоятельность, несмещенность, эффективность и достаточность.

Оценку $\hat{\lambda}$ называют *состоятельной*, если увеличении объема выборки она стремится к истинному значению λ , т.е. оценка сходится по вероятности к истинному значению $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\hat{\lambda} - \lambda| < \varepsilon\} = 1$, где ε — заранее заданное малое положительное число.

Оценка $\hat{\lambda}$ называется *несмещенной*, если ее математическое ожидание равно истинному значению λ , то есть $M\{\hat{\lambda}\} = \lambda$.

Несмещенная оценка максимального правдоподобия, для которой в неравенстве Рао-Крамера $D_{\hat{\lambda}} = \int_Z (\hat{\lambda} - M\{\lambda\})^2 p(x/\lambda) dx \geq \frac{1}{\int_Z \left(\frac{d \ln p(x/\lambda)}{d\lambda}\right)^2 p(x/\lambda) dx}$ имеет место знак равен-

ства, называется *эффективной*.

Оценка $\hat{\lambda}$ должна обладать свойствами достаточности (являться достаточной статистикой). Статистика (функция наблюдаемых данных) является *достаточной*, если все суждения об оцениваемом параметре могут быть вынесены на основании этой статистики без дополнительного обращения к принятым данным (выборочным значениям).

Пусть принимаемое колебание имеет вид $x[n] = A \cos(2\pi f_0 n + \Phi) + w[n]$, $n = \overline{0, N-1}$, где $w[n] \sim N(0, \sigma^2)$ - дискретный белый гауссовский шум, $A > 0$, $0 < f_0 < 1/2$. Обозначим вектор отсчетов входной реализации как $\mathbf{X} = (x[0], \dots, x[N-1])^T$. Функция правдоподобия имеет вид

$$p(\mathbf{X} / A, \Phi, f_0) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} (x[n] - A \cos(2\pi f_0 n + \Phi))^2\right\}.$$

Оценки максимального правдоподобия (ОМП) амплитуды, фазы и частоты находятся из условия минимизации выражения $J(A, \Phi, f_0) = \sum_{n=0}^{N-1} (x[n] - A \cos(2\pi f_0 n + \Phi))^2$. При этом оценка

частоты находится из условия $\hat{f}_0 = \arg \max_{f_0} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp(-i2\pi f_0 n) \right|$, а оценки амплитуды и

фазы соответственно как $\hat{A} = \frac{2}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp(-i2\pi \hat{f}_0 n) \right|$.

$$\hat{\Phi} = \arctg \left[- \frac{\sum_{n=0}^{N-1} x[n] \sin(2\pi \hat{f}_0 n)}{\sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos(2\pi \hat{f}_0 n)} \right].$$

Границы Рао-Крамера для амплитуды, фазы и частоты определяются выражениями

$$D(\hat{A}) \geq \frac{2\sigma^2}{N}, \quad D(\hat{\Phi}) \geq \frac{2(2N-1)}{q^2 N(N-1)}, \quad D(f_0) \geq \frac{12}{(2\pi)^2 q^2 N(N^2-1)},$$

где $q^2 = A^2 / (2\sigma^2)$ - отношение сигнал-шум. Граница Рао-Крамера для частоты уменьшается по мере роста отношения сигнал-шум q^2 как $1/N^3$.

Задание на самоподготовку:

изучить материал лекции,
выучить основные определения.