

# Тема урока: Иррациональные уравнения

## Цель:

- Познакомиться с понятием «иррациональные уравнения» и некоторыми методами их решений.
- Развивать умение выделять главное в изучаемом материале, обобщать факты и понятия.

Выполнил(а):

11 РМ

# Найти область определения

**I**       $Y = \sqrt{x - 6}$        $X \geq 6$

**II**       $Y = \sqrt{\frac{7}{x}}$        $X > 0$

**III**       $Y = \frac{1}{\sqrt{2 + x}}$        $X > -2$

**IV**       $Y = \sqrt{x}$        $X \geq 0$



Из последнего промежутка найти наименьшее положительное целое число.

# Является ли число $x_0$ корнем уравнения?

I  $\sqrt[3]{x} = -3$   $x_0 = 27$  нет

II  $\sqrt{x} - 5 = 1$   $x_0 = 36$  да

III  $\sqrt{x+1} - 2 = 0$   $x_0 = 8$  нет

IV  $2 = x^4$   $x_0 = \sqrt{2}$  да



$\sqrt{2}$  - какое число?

# История иррационального числа

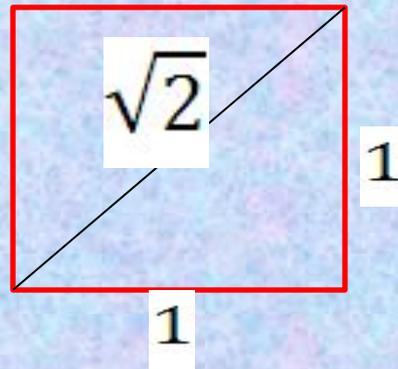
Термин «рациональное» (число) происходит от латиноамериканского слова ratio – отношение, которое является переводом греческого слова «логос» в отличие от рациональных чисел, числа, выражающие отношение несоизмеримых величин, были названы еще в древности иррациональными, т.е. нерациональными (по-гречески «алогос») правда, первоначально термин «рациональный» и «иррациональный» относились не к числам, а к соизмеримым и соответственно не соизмеримым величинам, которые пифагорейцы называли выразимыми и невыразимыми.

$$\sqrt{2}$$



Удивительное открытие пифагорейцев.

Каким числом выражается длина диагонали квадрата со стороной **1**?



$$\sqrt{2} = ?$$

- С латыни слово «irrationalis» означает «неразумный».
- «surdus» - «глухой» или «немой»

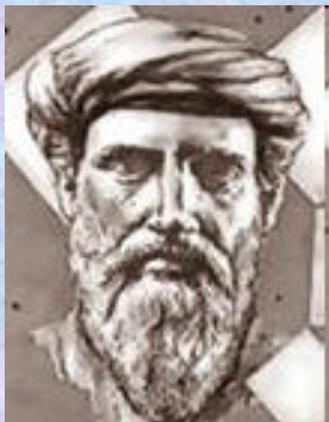


**«НИ ВЫСКАЗАТЬ, НИ**

**ВЫСЛУШАТЬ»**



Симон Стевин



ал - Каши



Рене Декарт

Занимались иррациональными числами

# Определение:

Уравнения, в которых переменная содержится под знаком корня, называются **иррациональными**:

$$x + \sqrt{x} = 2$$

$$3\sqrt{x+5} = x + 2$$

Какое уравнение является иррациональным ?

$$\sqrt{x-1} = 3$$

$$y^2 + 3y\sqrt{2} = 4$$

$$x + \sqrt{x^2 + 9} = 2$$

$$\sqrt{x-2} = \sqrt{2-x}$$

$$\sqrt{6y} = 0$$

$$\sqrt[3]{x-9} = -3$$

$$\sqrt{3}y - 4 = 5$$

$$\sqrt{4-x} + \sqrt{5+x} = 3$$

$$\sqrt{x} = x - 2$$

# Методы решения иррациональных уравнений:

1. Возведение обеих частей в степень.
2. Использование равносильных переходов.
3. Умножение левой части на сопряженное выражение.
4. Введение новой переменной.

# 1. Возведение обеих частей уравнения в степень

$$\sqrt{A} = B \rightarrow A = B^2 + \text{Проверка корней}$$

(т.к. могут появиться лишние корни)

- При возведении в четную степень возможно расширение области определения заданного уравнения. Поэтому при решении таких иррациональных уравнений обязательна проверка.
- При возведении в нечетную степень обеих частей иррационального уравнения область определения не меняется.

пример

$$\sqrt{x^2 + 2x + 5} = \sqrt{x^2 - 3x + 10}$$

возводя обе части в квадрат,  
получаем

$$x^2 + 2x + 5 = x^2 - 3x + 10$$

$$5x = 5$$

$$x = 1$$

Проверка:  $\sqrt{1+2+5} = \sqrt{1-3+10}$  верно    Ответ:  $x = 1$

## 2. Использование равносильных переходов.

$$\sqrt{A} = B \rightarrow \begin{cases} A = B^2 \\ B \geq 0 \end{cases}$$

Пример:

$$\sqrt{2x-1} = x - 2$$

$$\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ 2x - 1 = (x - 2)^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 2 \\ 2x - 1 = x^2 - 4x + 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 6x + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x_1 = 1 \\ x_2 = 5 \end{cases}$$

Ответ:  $x = 5$

### 3. Умножение левой части на сопряженное выражение.

Если в левой части иррационального уравнения сумма или разность корней, а подкоренное выражение – линейная функция одинаковыми линейными коэффициентами, а в правой части некоторое число, то левую и правую части уравнения умножают на выражение, сопряженное выражению в левой части ( $\sqrt{a} + \sqrt{b}$  и  $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ ) - сопряженные).

Пример:

$$\sqrt{x+7} + \sqrt{x-1} = 4$$

$$(\sqrt{x+7} + \sqrt{x-1})(\sqrt{x+7} - \sqrt{x-1}) = 4(\sqrt{x+7} - \sqrt{x-1})$$

$$x+7-x+1 = 4(\sqrt{x+7} - \sqrt{x-1})$$

$$4(\sqrt{x+7} - \sqrt{x-1}) = 8$$

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{x-1} = 2$$

Тогда имеем 
$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{x-1} = 2 \\ \sqrt{x+7} + \sqrt{x-1} = 4 \end{cases}$$

$$2\sqrt{x+7} = 6$$

$$\sqrt{x+7} = 3$$

$$x+7=9 \quad x=2$$

Проверка:  $\sqrt{2+7} + \sqrt{2-1} = 4$

$3+1 = 4$  верно      Ответ:  $x = 2$

# 4. Введение новой переменной.

Решить уравнение:  $(x^2 + 1) + 2\sqrt{x^2 + 1} = 15$

Введем новую переменную  $\sqrt{x^2 + 1} = t, \quad t \geq 0$

$x^2 + 1 = t^2$ , тогда

$$t^2 + 2t = 15$$

$t^2 + 2t - 15 = 0$  решая,

получим  $t = -5$      $t = 3$

$$\sqrt{x^2 + 1} = 3$$

$$x^2 + 1 = 9$$

$$x^2 = 8$$

$$x_1 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$x_2 = -\sqrt{8} = -2\sqrt{2}$$

Ответ:  $x_1 = 2\sqrt{2}$

$$x_2 = -2\sqrt{2}$$

