Тема 12. Уравнения и неравенства

12.4. Общие методы решения уравнений

https://youtu.be/V9UOk7LWXAM

«Метод решения хорош, если с самого начала мы можем предвидеть – и впоследствии подтвердить это, что, следуя нашему методу, мы достигли цели».

Готфрид Лейбниц
01.07.1646 – 14.11.1716 гг.

Методы решения уравнений – это способы, приёмы, с помощью которых можно решить то или иное уравнение.

Общие методы решения уравнений – это такие способы, приёмы, с помощью которых можно решить уравнения разного типа.

общие методы решения уравнений любых видов

Метод разложения на множители

Функционально-графический метод

Общие методы решения уравнений

Метод введения новой переменной

Замена уравнения $h(f(x)) = h(g(x))$ уравнением $f(x) = g(x)$

Метод замены уравнения $h(f(x)) = h(g(x))$ уравнением $f(x) = g(x)$

Если функция $h(x)$ монотонная, то она принимает каждое своё значение только один раз.

Пример 1. Решить уравнение $(3x - 7)^5 = (2x + 3)^5$.

Решение.

$3x - 7 = 2x + 3;$

$3x - 2x = 3 + 7;$

$x = 10;$

Ответ: 10.

Решение

Т.к. показатель степени одинаков, основание однородны - функцияh$(x) = x^2$ монотонная и возрастающая, то в решении участвуют только основания степени.

Переносим слагаемые, приводим подобные слагаемые, получим икс равен десяти.

Выполнили равносильные преобразования, проверку делать не нужно.

Пример 2. Решить уравнение $(8 - 2x)^2 = (x^2 + 5)^2$.

Решение.

Так как функция $h(x) = x^2$ немонотонная, то применять этот метод нельзя.

Пример 3. Решить уравнение $\log_3(x + 1) + \log_3(x + 3) = 1$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x + 1 > 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > -1;$

$\log_3(x + 1)(x + 3) = \log_3 3;$

$(x + 1)(x + 3) = 3;$

$x^2 + 4x = 0;$

$x_1 = 0, x_2 = -4;$

Ответ: 0.

Решение

Вычислим ОДЗ уравнения. Она задается системой неравенств:
$x + 1 > 0$ и $x + 3 > 0$. Отсюда $x > -1$.
Воспользуемся свойством логарифма и
тем, что один равен логарифму трех по основанию три, получим логарифмическое уравнение $\log_3(x + 1)(x + 3) = \log_3 3$
Так как функция $h(x) = \log_3 3$ монотонная (возрастающая), то данное уравнение равносильно уравнению $(x + 1)(x + 3) = 3$;
Решая квадратное уравнение, получим корни: $x_1 = 0, x_2 = -4$;
Ноль принадлежит ОДЗ.
Минус четыре не принадлежит ОДЗ.

вывод: рассмотренный метод применяется в случае монотонных функций h(x) например, при решении:

— показательного уравнения;

Замена уравнения
$h(f(x)) = h(g(x))$
уравнением $f(x) = g(x)$

— логарифмического уравнения;

Замена уравнения
$h(f(x)) = h(g(x))$
уравнением $f(x) = g(x)$

— иррационального уравнения;

Замена уравнения
$h(f(x)) = h(g(x))$
уравнением $f(x) = g(x)$

Метод разложения на множители

$f(x)\,g(x)\,h(x) = 0$ заменяют совокупностью уравнений $f(x) = 0$, $g(x) = 0$, $h(x) = 0$.

Он заключается в том, что уравнение $f(x)g(x)h(x)=0$
заменяют совокупностью уравнений $f(x)=0$, $g(x)=0$, $h(x)=0$.
Решив эти уравнения, вычислив корни, обязательно их нужно проверить.

Пример 4. Решить уравнение $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$.

Решение.

$(\sin x + \sin 3x) + \sin 2x = 0;$

$2 \sin 2x \cos x + \sin 2x = 0;$

$\sin 2x\,(2 \cos x + 1) = 0;$

Замена уравнения
$h(f(x)) = h(g(x))$

Замена уравнения
$h(f(x)) = h(g(x))$

Замена уравнения
$h(f(x)) = h(g(x))$

Замена уравнения
$h(f(x)) = h(g(x))$
уравнением $f(x) = g(x)$

Замена уравнения
$h(f(x)) = h(g(x))$
уравнением $f(x) = g(x)$

Замена уравнения
$h(f(x)) = h(g(x))$
уравнением $f(x) = g(x)$

Пример 4. Решить уравнение $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$.

Решение.

ОДЗ уравнения множество всех действительных чисел.

$(\sin x + \sin 3x) + \sin 2x = 0;$

$2 \sin 2x \cos x + \sin 2x = 0;$

$\sin 2x\,(2 \cos x + 1) = 0;$

Замена уравнения
$h(f(x)) = h(g(x))$
уравнением $f(x) = g(x)$

Замена уравнения
$h(f(x)) = h(g(x))$

Замена уравнения
$h(f(x)) = h(g(x))$

Замена уравнения
$h(f(x)) = h(g(x))$
уравнением $f(x) = g(x)$

Замена уравнения
$h(f(x)) = h(g(x))$

Замена уравнения
$h(f(x)) = h(g(x))$
уравнением $f(x) = g(x)$

Метод введения новой переменной

Замена уравнения $h(f(x)) = h(g(x))$ уравнением $f(x) = g(x)$

Суть его заключается в следующем:
если уравнение $f(x)=0$ имеет вид (или может быть приведено к виду) $p(g(x))$, то вводят новую переменную $u= g(x)$, получают уравнение $p(u)=0$, решают его и находят корни (u_1, u_2,… $_n$).
Возвращаются к старой переменной и получают совокупность уравнений

Пример 5. Решить уравнение $4^x - 10 \cdot 2^{x-1} = 24$.

Решение.

$2^{2x} - 5 \cdot 2^x - 24 = 0;$

$2^x = t, t > 0;$

$t^2 - 5t - 24 = 0;$

Замена уравнения
$h(f(x)) = h(g(x))$
уравнением $f(x) = g(x)$

Замена уравнения
$h(f(x)) = h(g(x))$
уравнением $f(x) = g(x)$

Замена уравнения
$h(f(x)) = h(g(x))$
уравнением $f(x) = g(x)$

Замена уравнения
$h(f(x)) = h(g(x))$
уравнением $f(x) = g(x)$

Заменим $4^x=2^{2x}$, $10 \cdot 2^{-1}= 5$, получим: $2^{2x}-5 \cdot 2^x-24=0$

Заменим $2^x=t$, $t>0$,

получим $t^2- 5t- 24=0$.

$t_1=-3$, $t_2=8$.

Корень $t_1=-3$ является посторонним, т.к. не удовлетворяет условию, $t>0$

Возвращаемся к замене $2^x=t$, получим $2^x=8$, $x=3$.

Ответ:3

Замена уравнения $h(f(x)) = h(g(x))$ уравнением $f(x) = g(x)$

Решение.

$t = \log_5 x$;

Замена уравнения $h(f(x)) = h(g(x))$ уравнением $f(x) = g(x)$

$t^2 - 2t - 3 = 0$;

Замена уравнения $h(f(x)) = h(g(x))$ уравнением $f(x) = g(x)$

Замена уравнения $h(f(x)) = h(g(x))$ уравнением $f(x) = g(x)$

Замена уравнения $h(f(x)) = h(g(x))$ уравнением $f(x) = g(x)$

Ответ: 125; 0,2.

Перейдем во втором слагаемом к основанию 5 и сделаем замену переменной $t = \log_5 x$, тогда

Теперь данное уравнение перепишется в виде $t^2 - 2t - 3 = 0$. $t_1 = 3$, $t_2 = -1$.

Решая уравнения замены $\log_5 x = 3$ и $\log_5 x = -1$,
Находим $x = 5^3 = 125$ и $x = 5^{-1} = 0,2$

Функционально-графический метод решения уравнения $f(x) = g(x)$

Строят графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$.
Затем находят точки пересечения этих графиков, определяют их абсциссы.

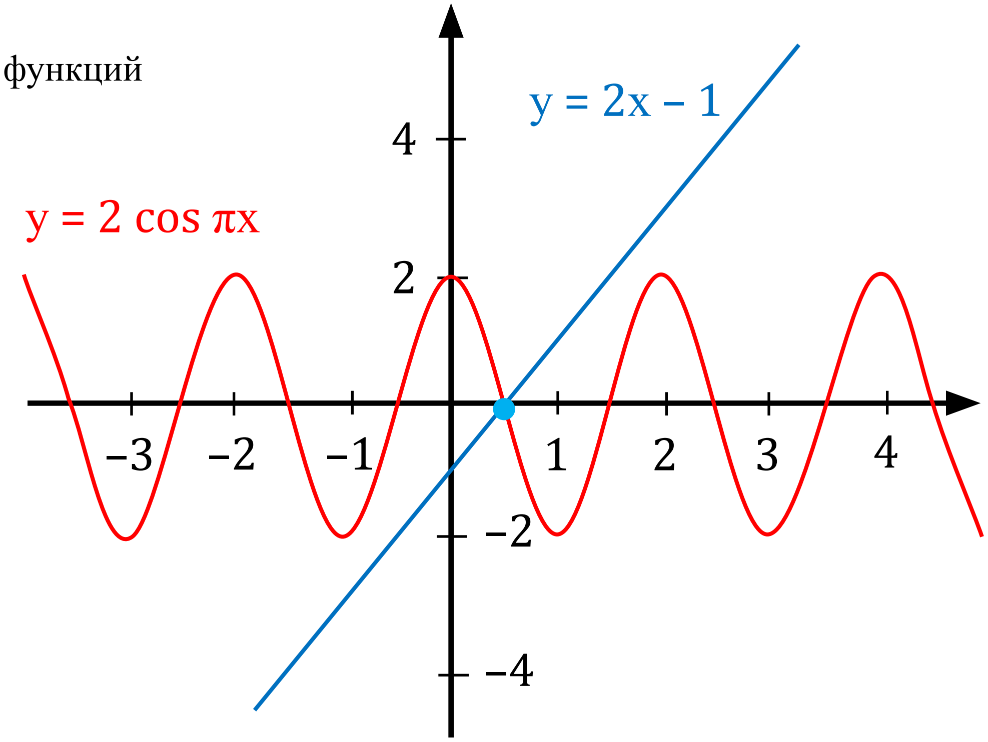
Они и являются корнями данного уравнения.
Этот метод позволяет определить число корней, их приближенные, а иногда и точные значения.

Пример 7. Решить уравнение $2\cos \pi x = 2x - 1$.

Решение.

Построим в одной системе координат графики функций $y=2\cos\pi x$ и $y=2x-1$.

Точка пересечения графиков (0,5;0)
Значит, уравнение имеет один корень $x=0{,}5$.



Ответ: $x = 0{,}5$.

Не всякое уравнение вида f(x)=g(x) в результате преобразований может быть приведено к уравнению того или иного стандартного вида, для которого подходят обычные методы решения. В таких случаях имеет смысл использовать такие свойства функций f(x) и g(x) ,как

— Монотонность;
— ограниченность;
— чётность;
— периодичность;
— если одна из функций возрастает, а другая убывает на определённом промежутке, то уравнение $f(x) = g(x)$ не может иметь более одного корня который, в принципе, можно найти подбором;
— если функция $f(x)$ ограничена сверху, а функция $g(x)$ – снизу так, что $f(x)_{мах}= A$ $g(x)_{мin}= A$, то уравнение $f(x) = g(x)$ равносильно системе уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = A \\ g(x) = A. \end{array}\right.$$

Замена уравнения
$h(f(x)) = h(g(x))$
уравнением $f(x) = g(x)$

Решение.

Данное уравнение рационально решать функциональным методом. Рассмотрим функцию

Замена уравнения
$h(f(x)) = h(g(x))$
уравнением $f(x) = g(x)$

Замена уравнения
$h(f(x)) = h(g(x))$
уравнением $f(x) = g(x)$

Замена уравнения
$h(f(x)) = h(g(x))$
уравнением $f(x) = g(x)$

В силу ограниченности функции косинуса. Наибольшее значение функции f(x) равно A=1.

Очевидно, функция $g(x)= x^2+1$ наименьшее значение равно A=1.

Поэтому данное уравнение равносильно системе уравнений

Замена уравнения
$h(f(x)) = h(g(x))$
уравнением $f(x) = g(x)$

Ответ: 0.

Очевидно, что корень второго уравнения равен x=0.
проверка x=0 удовлетворяет и первому уравнению. Следовательно, система уравнений (а также исходное уравнение) имеет единственный корень x=0.
Ответ:0.