Методы решения тригонометрических уравнен
(урок-лекция)

Методическая разработка учителя математики
МБОУ "Средняя общеобразовательная школа№
им.Г.В.Кравченко"г.Вуктыл

1. Решение уравнений разложением на множител

$$2\cos 2x\cos x = \cos x$$

$$2\cos 2x\cos x - \cos x = 0$$

$$\cos x(2\cos 2x - 1) = 0$$

$$\cos x = 0$$

или

$$2\cos 2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n \quad , n \in Z$$

$$\cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$2x = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi k\,, k \in Z$$

$$2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k\,, k \in Z$$

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k\,, k \in Z$$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{6} + \pi k\,,\ \frac{\pi}{2} + \pi n,\ k, n \in Z$

$$tgx(\sin x - 1) = 0$$

Произведение равно 0, когда хотя бы один из множителей равен 0, а другой при этом имеет смысл

$$tgx = 0$$

или

$$\begin{cases} \sin x - 1 = 0 \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \end{cases}$$

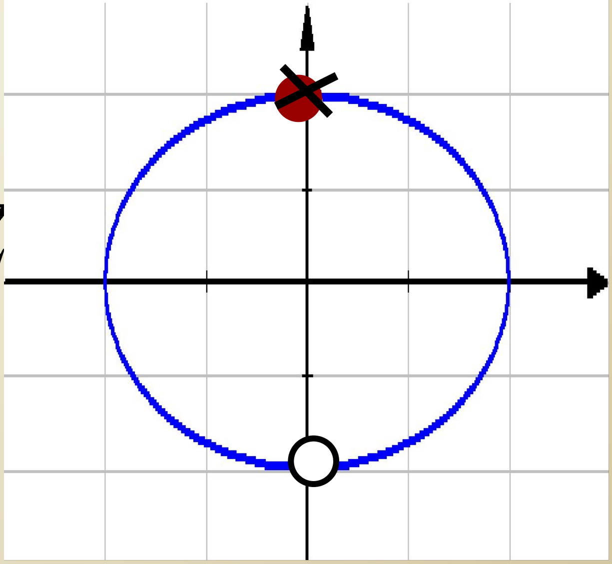
Ответ: $\dfrac{\pi}{2} + \pi n; \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, n, k \in Z$

$$x = \pi k, k \in Z$$

$$\sin x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in Z$$

не соотв. условию



Ответ: $\pi k, k \in Z$

Решение уравнений, сводящихся к квадратным уравнен

$$3\cos^2 x - 10\cos x + 3 = 0$$

$$\cos x = t, t \in [-1;1]$$

$$3t^2 - 10t + 3 = 0$$

$$t_1 = \frac{1}{3}, t_2 = 3$$ не соот условию

$$\cos x = \frac{1}{3}$$

$$x = \pm\arccos\frac{1}{3} + 2\pi n$$

Ответ: $\pm\arccos\frac{1}{3} + 2\pi n, n \in Z$

Решение однородных уравнений и сводящихся к н

$$\cos 3x + \sin 3x = 0 \quad \Big|: \cos x \neq 0$$

$$\frac{\cos 3x}{\cos 3x} + \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = 0$$

$$1 + tg 3x = 0$$

$$tg 3x = -1$$

$$3x = arctg(-1) + \pi n$$

$$3x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}$$

Ответ: $-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z$

$$2\cos^2 x - 3\sin x\cos x + \sin^2 x = 0 \qquad \Big| : \cos^2 x \neq 0$$

$$\frac{2\cos^2 x}{\cos^2 x} - \frac{3\sin x\cos x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 0$$

$$2 - \frac{3\sin x}{\cos\ \ x} + tg^2 x = 0$$

$$2 - 3tgx + tg^2 x = 0$$

$$tg^2 x - 3tgx + 2 = 0$$

$$tgx = t$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$t_1 = 2 \qquad t_2 = 1$$

$$tgx = 2 \qquad tgx = 1$$

$$x = arctg\, 2 + \pi n$$

$$x = arctg\, 1 + \pi n$$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{4} + \pi n}$$

$$6\sin^2 x - \sin x\cos x - \cos^2 x = 3$$

$$6\sin^2 x - \sin x\cos x - \cos^2 x - 3\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right) = 0$$

$$3\sin^2 x - \sin x\cos x - 4\cos^2 x = 0 \quad \Big|: \cos x \neq 0$$

$$3tg^2 x - tgx - 4 = 0$$

$$tgx = \frac{4}{3}, x = arctg\frac{4}{3} + \pi n$$

$$tgx = -1, x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$$

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi k, arctg\frac{4}{3} + \pi n (n, k \in Z)$

Решение уравнений с помощью введения вспомогательного ар

$$3\sin x + 4\cos x = 5$$

Вынесем за скобку число $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$$5\left(\frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x\right) = 5$$

$$\frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x = 1$$

$$\cos\varphi \sin x + \sin\varphi \cos x = 1$$

$$\sin(x + \varphi) = 1$$

$$x + \varphi = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$x = -\varphi + \frac{\pi}{2} + \pi n = -\arccos\frac{3}{5} + \frac{\pi}{2} + \pi n =$$

$$-\arcsin\frac{4}{5} + \frac{\pi}{2} + \pi n$$

Ответ:

$$-\arccos\frac{3}{5} + \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$$

Решение уравнений с помощью универсальной подстан

Проверить в исходном уравнении

$x = \pi + 2\pi n$

$$\sin x = \frac{2tg^2 \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}}, \cos x = \frac{1 - tg^2 \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}}$$

$$3\sin x + 4\cos x = 5$$

$$3\frac{2tg \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}} + 4\frac{1 - tg^2 \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}} = 5$$

Пусть $tg\frac{x}{2} = t$

$$3\frac{2t}{1+t^2} + 4\frac{1-t^2}{1+t^2} = 5$$

$$\frac{6t}{1+t^2} + \frac{4(1-t^2)}{1+t^2} = 5$$

$$6t + 4 - 4t^2 = 5(1+t^2)$$

$$t = \frac{1}{3}, tg\frac{x}{2} = \frac{1}{3}$$

$$x = 2arctg\frac{1}{3} + 2\pi n$$

Ответ: $2arctg\frac{1}{3} + 2\pi n, n \in Z$

Решение уравнений преобразованием суммы тригонометрических функций в произведен

$$\cos 3x + \sin 2x - \sin 4x = 0$$

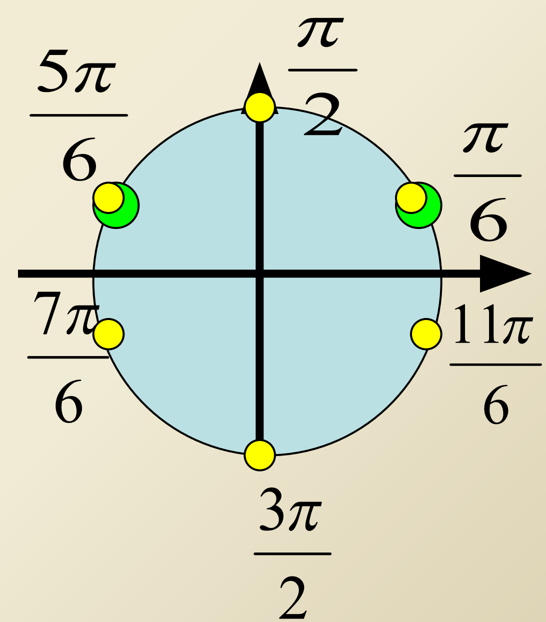
$$\cos 3x + (\sin 2x - \sin 4x) = 0$$

$$\cos 3x + 2\sin\frac{2x-4x}{2}\cos\frac{2x+4x}{2} = 0$$

$$\cos 3x - 2\sin x\cos 3x = 0$$

$$\cos 3x(1 - 2\sin x) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos 3x = 0\\ 1 - 2\sin x = 0\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{3}\\ x = (-1)^k\dfrac{\pi}{6} + \pi k\end{array}\right.$$



Ответ: $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{3}, n \in Z$

Решение уравнений преобразованием произведения тригонометрических функций в сум

$$\sin 5x \cos 3x = \sin 6x \cos 2x$$

$$\frac{1}{2}(\sin 8x + \sin 2x) = \frac{1}{2}(\sin 8x + \sin 4x)$$

$$\sin 2x - \sin 4x = 0$$

$$2\sin\frac{2x-4x}{2}\cos\frac{2x+4x}{2} = 0$$

$$-2\sin x \cos 3x = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos 3x = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi n \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3} \end{array}\right.$$

Ответ: $\pi n, \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3} \; (n, k \in Z)$

Решение уравнений с помощью формул понижения степе

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\sin^2 x + \sin^2 2x = 1$$

$$\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1-\cos 4x}{2} = 1$$

$$1-\cos 2x + 1 - \cos 4x = 2$$

$$\cos 2x + \cos 4x = 0$$

$$2\cos\frac{2x+4x}{2}\cos\frac{2x-4x}{2} = 0$$

$$2\cos 3x \cos x = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos 3x = 0 \\ \cos x = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3} \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z$

Решение уравнений с помощью замены переменн

Уравнение содержит набор sinx, cosx и sinx $\pm$ cosx

$$\sin x + \cos x = 1 + \sin x \cos x$$

$$\sin x + \cos x = t \Rightarrow (\sin x + \cos x)^2 = t^2 \Rightarrow$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x = t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + 2\sin x \cos x = t^2 \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$$

$$t = 1 + \frac{t^2 - 1}{2} \Rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow (t-1)^2 = 0 \Rightarrow t = 1$$

$$\sin x + \cos x = 1$$

$$\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right) = 1$$

$$\cos\frac{\pi}{4}\sin x + \sin\frac{\pi}{4}\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = (-1)^n\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \pi n$$

Решение уравнений с использованием ограниченнос

$$\sin\frac{5x}{4}+\cos x=2$$

$$\begin{cases}\sin\frac{5x}{4}=1\\ \cos x=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{5x}{4}=\frac{\pi}{2}+2\pi n\\ x=2\pi k \qquad ,(n,k\in Z)\end{cases}$$

$$2\pi k=\frac{2\pi}{5}+\frac{8\pi n}{5}$$

$$k=\frac{1+4n}{5}$$

т.к. к – целое число,то

$$n=1+5m \quad (m\in Z)$$

$$x=2\pi+8\pi m \quad (m\in Z)$$

Решение уравнений вида $f(x)=\sqrt{g(x)}$

Равносильный переход:

$$\begin{cases} g(x)\ge 0 \\ f^2(x)=g(x) \end{cases}$$

$$\sqrt{1-\cos x}=\sin x$$

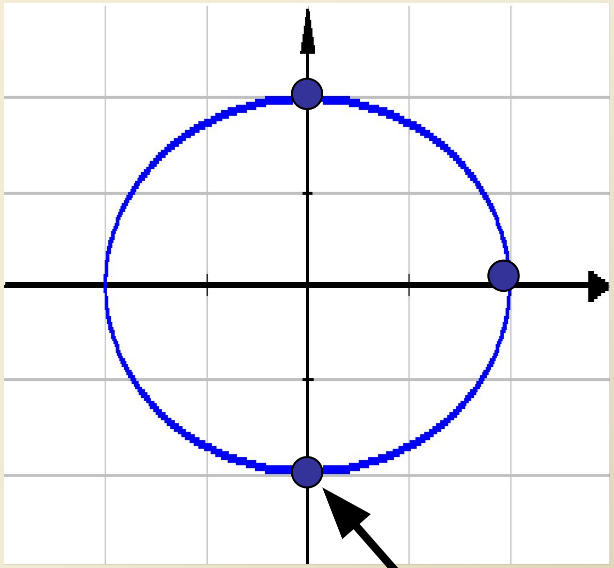
$$\begin{cases} \sin x\ge 0 \\ 1-\cos x=\sin^2 x \end{cases}$$

$$\sin^2 x+\cos x-1=0$$

$$1-\cos^2 x+\cos x-1=0$$

$$\cos x(\cos x-1)=0$$

$$x=\frac{\pi}{2}+\pi k \qquad x=2\pi n$$



не соотв усл

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ 2\pi n, k, n\in Z$