Функция.
Способы задания функции.

Определение: Величина y называется *функцией* переменной величины x, если каждому числовому значению x, принадлежащему некоторой области его изменения X, соответствует единственное определенное числовое значение величины $y \in Y$.

Говорят, что на множестве задана функция

$$y = f(x)$$

x – независимая переменная (аргумент);

X – область определения функции;

y – зависимая переменная;

Y – множество значений функции.

Определение: *Графиком функции* $y = f(x)$ называется множество точек плоскости xOy с координатами $(x; f(x))$.

Определение: Функция $y = f(x)$ называется *четной*, если для любого $x \in X$ выполняется равенство $f(-x) = f(x)$ и *нечетной*, если выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси ординат (Oy), а график нечетной функции симметричен относительно начала координат $O(0; 0)$.

Определение: Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если существует такое число $T \neq 0$, что для любых $x \in X$ выполняется равенство:

$$f(x \pm T) = f(x) .$$

Определение: Функция $y = f(x)$ называется ограниченной на промежутке X, если существует такое число $M > 0$, что $|f(x)| \leq M$ для любого $x \in X$.

Определение: Если уравнение $y = f(x)$ может быть однозначно разрешено относительно переменной x, то существует функция $x = g(y)$, которая называется *обратной* по отношению к функции $y = f(x)$. При этом $y = f[g(y)]$.

Определение: Если функция задана в виде $y = f(u)$ где $u = \varphi(x)$, то функция $y = f(\varphi(x))$ называется *сложной функцией* (функцией от функции). Функция

$u = \varphi(x)$ называется промежуточным аргументом.

Определение: Функция, заданная уравнением $F(x;y)=0$, неразрешённым относительно зависимой переменной y, называется *неявной функцией*.

Термины «явная функция» и «неявная функция характеризуют способ задания функции.

Каждая явная функция может быть представлена в неявном виде: $y-f(x)=0$.

Но не каждая неявно заданная функция может быть представлена явно. Например, $y^6-y-x^2=0$ не выражается через элементарные функции, то есть это уравнение невозможно разрешить относительно y.

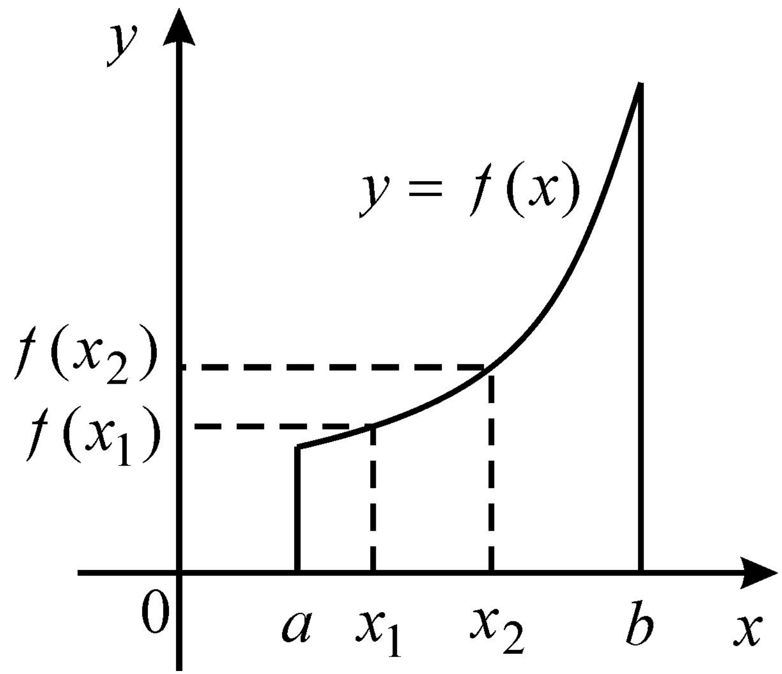
Определение: Если значения переменных x и y зависят от параметра t, значения которого изменяются в интервале $[T_1; T_2]$, то говорят, что *функция задана параметрически*:

$$\begin{cases} x = \varphi(t); \\ y = \psi(t). \end{cases}$$

Каждому значению t соответствуют значения x и y. Если x и y рассматривать как координаты точек на координатной плоскости Oxy, то каждому значению t будет соответствовать определенная точка плоскости.

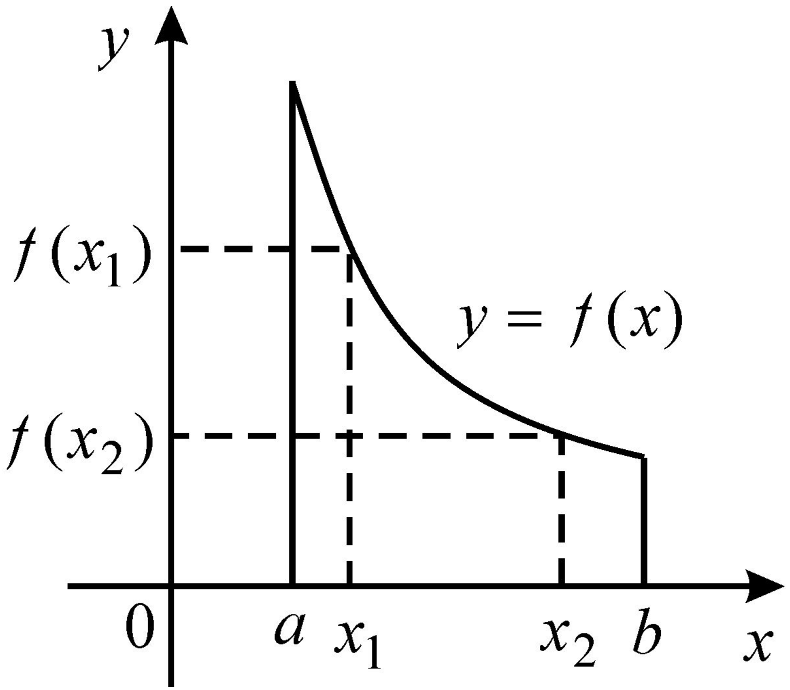
Когда t изменяется от T_1 до T_2, эти точки на плоскости описывают некоторую кривую.

Определение: Функция называется возрастающей на промежутке X, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее значение функции.



Если $x_1 < x_2$, то $f(x_1) < f(x_2)$.

Определение: Функция называется убывающей на промежутке X, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует меньшее значение функции.



Если $x_1 < x_2$, то $f(x_1) > f(x_2)$.

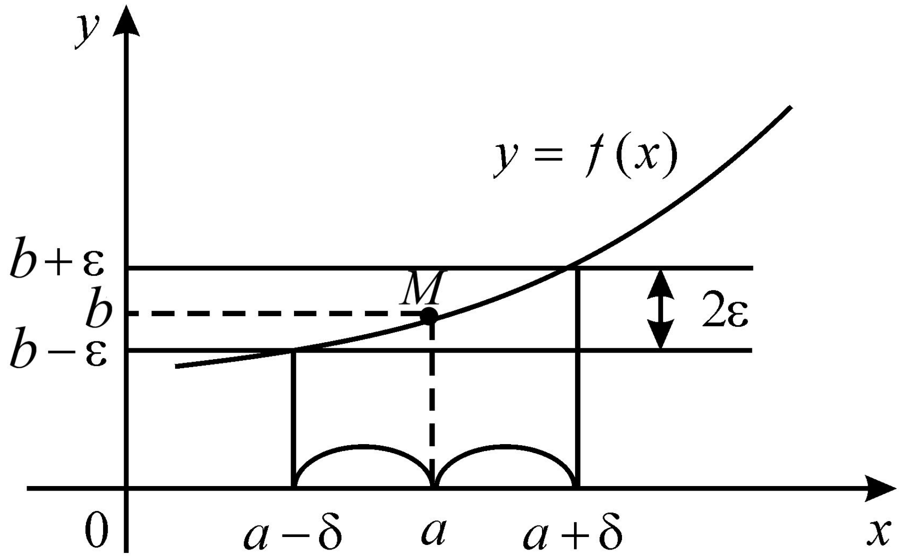
Предел функции

Определение: Функция $y = f(x)$ стремится к пределу b при x стремящимся к a, если для любого $\varepsilon > 0$, как бы мало оно не было, можно указать такое число $\delta > 0$ $(\delta = \delta(\varepsilon))$, что для всех значений x, отличных от a, и удовлетворяющего условию $|x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Обозначают предел функции: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Математически определение предела функции записывают в виде:

$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta(\varepsilon) > 0,$ ÷òî ïðè $|x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - b| < \varepsilon$



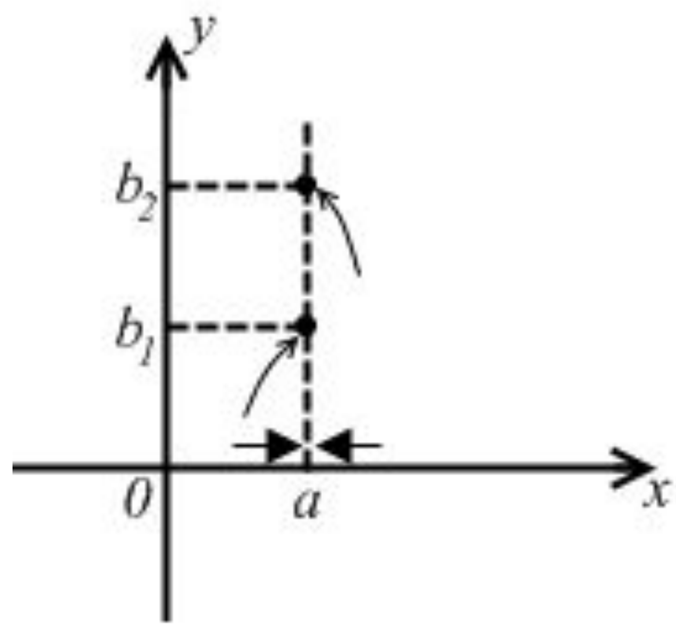
Геометрически число b есть предел функции $f(x)$ при $x \to a$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая δ-окрестность точки a, что для всех $x \neq a$ из этой δ-окрестности соответствующие точки графика функции $y = f(x)$ лежат внутри полосы шириной 2ε, ограниченной прямыми $y = b - \varepsilon$ и $y = b + \varepsilon$.

Односторонние пределы

Если $f(x)$ стремится к пределу b_1 при x стремящимся к a так, что x принимает только значения из интервала $(a-\delta;\, a)$, то b_1 называют пределом функции $f(x)$ в точке a слева, и пишут:

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = b_1$$

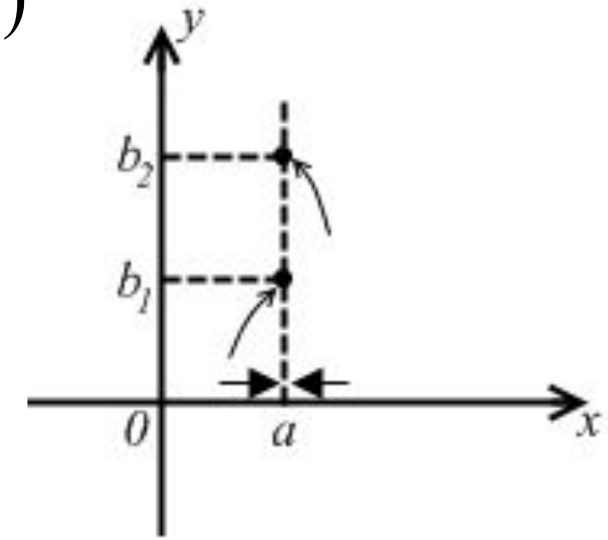
.



Если $f(x)$ стремится к пределу b_2 при x стремящимся к a так, что x принимает только значения из интервала $(a; a+\delta)$, то b_2 называют пределом функции $f(x)$ в точке a справа, и пишут:

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = b_2$$

.



Пределы $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ называются *односторонними пределами*.

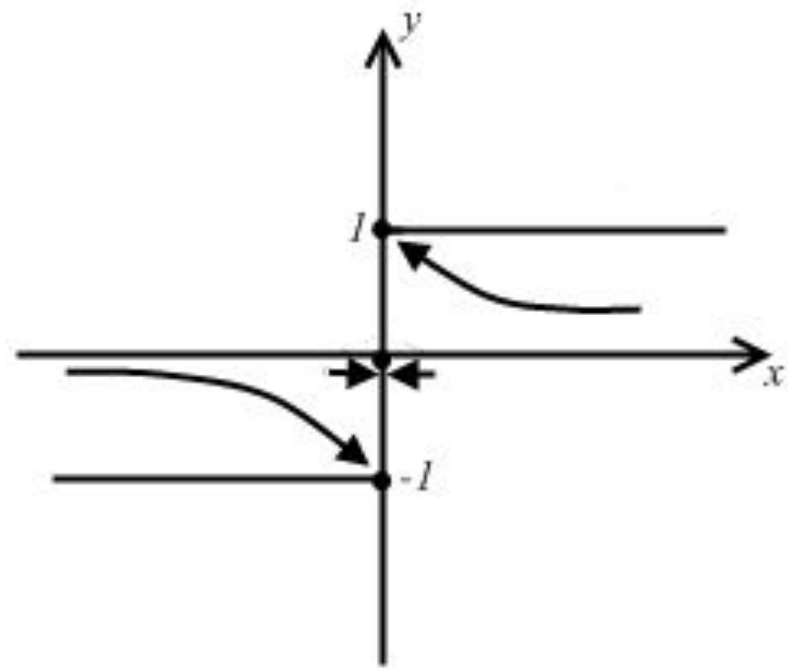
Пример: Рассмотрим функцию знака:

$$y = sign\, x = \begin{cases} 1, & \text{ïðè õ} > 0; \\ 0, & \text{ïðè õ} = 0; \\ -1, & \text{ïðè õ} < 0. \end{cases}$$

Функция в точке x=0 имеет левый и правый пределы:

$$\lim_{x \to +0} sign\, x = 1$$

$$\lim_{x \to -0} sign\, x = -1$$



Теорема: Функция $f(x)$ имеет предел в точке $x = a$ тогда и только тогда, когда в этой точке существуют как левый, так и правый конечные пределы и они равны между собой, то есть

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a} f(x) = b.$$

Замечание: Для существования предела функции при x стремящимся к a не требуется, чтобы функция была определена в точке $x = a$. Необходимо, чтобы функция была определена в окрестности точки a.

Пример: Доказать, что $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=.4$

Решение:

Функция $\frac{x^2-4}{x-2}$ не определена при x=2. Докажем, что при произвольном ε найдется δ, что будет выполняться неравенство:

$$\left|\frac{x^2-4}{x-2}-4\right|<\varepsilon,\quad \text{åñëè}\quad |x-2|<\delta$$

При $x\neq 2$ неравенство эквивалентно неравенству:

$$\left|\frac{x^2-4}{x-2}-4\right|=\left|\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}-4\right|=|x+2-4|=|x-2|<\varepsilon$$

Поэтому $\delta=\varepsilon$ и, следовательно, $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4.$

Определение: Функция $f(x)$ стремится к бесконечности при x стремящимся к a, если для каждого $M > 0$, как бы велико оно не было, можно указать такое число $\delta > 0$, что для всех значений x, удовлетворяющих условию $|x-a|<\delta$, имеет место неравенство $|f(x)|>M$.

Обозначается $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$

В этом случае функция $f(x)$ называется бесконечно большой (б. б.) при $x\to a$.

Бесконечно малые функции

Определение: Функция $\alpha = \alpha(x)$ называется бесконечно малой (б. м.) при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0.$

Из определения следует, что для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta > 0$, что для всех значений x, отличных от a, и удовлетворяющего условию $|x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon.$

Между бесконечно малыми и бесконечно большими величинами существует связь:

$\frac{C}{\text{á. ì.}} = \text{á. á.}, \quad \frac{C}{\text{á. á.}} = \text{á. ì.},$ где C – постоянное число.

Основные теоремы о пределах

1. Предел суммы двух функций равен сумме пределов от каждой функции:

$$\lim_{x\to a}\left[f_1(x)\pm f_2(x)\right]=\lim_{x\to a}f_1(x)\pm\lim_{x\to a}f_2(x).$$

2. Постоянное число можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x\to a}\left[C\,f(x)\right]=C\lim_{x\to a}f(x).$$

3. Предел произведения двух функций равен произведению пределов от каждой функции:

$$\lim_{x\to a}\left[f_1(x)\cdot f_2(x)\right]=\lim_{x\to a}f_1(x)\cdot\lim_{x\to a}f_2(x).$$

Следствие: $\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)^n=\left(\lim_{x\to a}f(x)\right)^n.$

4. Предел частного двух функций равен частному пределов от каждой функции:

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f_1(x)}{\lim_{x\to a}f_2(x)},\quad \left(\lim_{x\to a}f_2(x)\neq 0\right).$$

Если не возникает никаких неопределенностей, то предел функции вычисляется непосредственной подстановкой вместо *x* предельного значения.

Например:

$$\lim_{x\to -1}\frac{5x-1}{x^2+1}=\frac{5(-1)-1}{(-1)^2+1}=\frac{-6}{2}=-3;$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{2x+1}=\frac{9-9}{2\cdot 3+1}=\frac{0}{7}=0;$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x-1}{x^2-4}=\frac{3\cdot 2-1}{4-4}=\frac{5}{б.м.}=б.б.=\infty.$$

Неопределенности. Способы разрешения неопределенностей.

Разрешение неопределенностей

Существует несколько видов неопределенностей:

$$\left[\frac{0}{0}\right] \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \quad [\infty-\infty] \quad \left[1^{\infty}\right] \quad [0\cdot\infty] \quad \left[\infty^{0}\right]$$

1. Неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$.

При возникновении такой неопределенности возможны два случая:

а) *выражение, стоящее под знаком предела, представляет собой дробно-рациональную функцию;*

б) *выражение, стоящее под знаком предела, содержит дробно-иррациональную функцию.*

а) *выражение, стоящее под знаком предела, представляет собой дробно-рациональную функцию*

Если числитель и знаменатель такой функции обращаются в 0, это означает, что число, к которому стремится аргумент является корнем многочленов числителя и знаменателя.

Поэтому числитель и знаменатель необходимо разложить на множители и сократить на общий множитель. Многочлены второй степени раскладывают на множители по корням x_1 и x_2:

$$ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right).$$

Пример. Вычислить предел: $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 4x - 5}{x^2 + 3x + 2}$.

Решение:

Разложим числитель и знаменатель на множители, для этого определим корни многочленов:

$$D = b^2 - 4ac, \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0, \quad D = 36, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 5.$$

$$x^2 + 3x + 2 = 0, \quad D = 1, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = -2.$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 + 3x + 2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to -1} \frac{\cancel{(x+1)}(x-5)}{\cancel{(x+1)}(x+2)} = \lim_{x \to -1} \frac{x-5}{x+2} = \frac{-6}{1} = -6$$

Пример. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+2x-5}{2x^2-7x+5}$

Решение:

При разложении числителя и знаменателя на множители можно производить деление многочлена на многочлен в столбик:

$$\begin{array}{r|l} 3x^2+2x-5 & x-1 \\ \underline{3x^2-3x} & \overline{3x+5} \\ 5x-5 & \\ \underline{5x-5} & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2x^2-7x+5 & x-1 \\ \underline{2x^2-2x} & \overline{2x-5} \\ -5x+5 & \\ \underline{-5x+5} & \\ 0 & \end{array}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+2x-5}{2x^2-7x+5}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(3x+5)}{\cancel{(x-1)}(2x-5)}=\lim_{x\to 1}\frac{3x+5}{2x-5}=\frac{8}{-3}=-\frac{8}{3}$$

б) *выражение, стоящее под знаком предела, содержит дробно-иррациональную функцию*

В этом случае для раскрытия неопределенности и числитель и знаменатель дроби умножают на сопряженное выражение к иррациональному выражению, используя формулу разности квадратов:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

Пример. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{5x+1}-4}$

Решение:

Здесь знаменатель дроби является иррациональным выражением, поэтому домножим и числитель и знаменатель дроби на выражение сопряженное к знаменателю:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{5x+1}-4}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(\sqrt{5x+1}+4)}{(\sqrt{5x+1}-4)(\sqrt{5x+1}+4)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(\sqrt{5x+1}+4)}{5x+1-16}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(\sqrt{5x+1}+4)}{5x-15}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}(\sqrt{5x+1}+4)}{5\cancel{(x-3)}}=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{5x+1}+4}{5}=\frac{8}{5}$$

Пример. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3-\sqrt{1-4x}}{x+2}$

Решение:

Здесь числитель дроби является иррациональным выражением, поэтому домножим и числитель и знаменатель дроби на выражение сопряженное к числителю:

$$\lim_{x\to -2}\frac{3-\sqrt{1-4x}}{x+2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to -2}\frac{(3-\sqrt{1-4x})(3+\sqrt{1-4x})}{(x+2)(3+\sqrt{1-4x})}=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{9-(1-4x)}{(x+2)(3+\sqrt{1-4x})}=\lim_{x\to -2}\frac{8+4x}{(x+2)(3+\sqrt{1-4x})}=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{4\cancel{(2+x)}}{\cancel{(x+2)}(3+\sqrt{1-4x})}=\lim_{x\to -2}\frac{4}{3+\sqrt{1-4x}}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

Пример. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$

Решение:

Здесь и числитель и знаменатель дроби являются иррациональными выражениями, поэтому домножим и числитель и знаменатель дроби на выражения сопряженные и к числителю и к знаменателю:

$$\lim_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 4}\frac{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})(3+\sqrt{2x+1})}{(3-\sqrt{2x+1})(3+\sqrt{2x+1})(2+\sqrt{x})}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)(3+\sqrt{2x+1})}{(9-(2x+1))(2+\sqrt{x})}=\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)(3+\sqrt{2x+1})}{(8-2x)(2+\sqrt{x})}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)(3+\sqrt{2x+1})}{2(4-x)(2+\sqrt{x})}=\lim_{x\to 4}\frac{3+\sqrt{2x+1}}{2(2+\sqrt{x})}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$$

2. Неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ (бесконечность делить на бесконечность).

В этом случае выражение, стоящее под знаком предела, представляет собой частное многочленов.

$$\frac{P_n(x)}{P_m(x)}.$$

Для разрешения такого вида неопределенности необходимо разделить все слагаемые числителя и знаменателя на переменную $\boldsymbol{x}$ в старшей степени и рассмотреть предел каждого слагаемого в отдельности.

Пример. Вычислить предел: $$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+10x-8}{x^2+5x+4}$$

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+10x-8}{x^2+5x+4}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{10x}{x^2}-\frac{8}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}+\frac{4}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{10}{x}-\frac{8}{x^2}}{1+\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}}=3$$

Пример. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x-1}{5x+1}$

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x-1}{5x+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^2}{x^2}+\dfrac{3x}{x^2}-\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{5x}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\frac{2}{б.м.}=\infty$$

Пример. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{x^3+x+4}$

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5}{x^3+x+4}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3x^2}{x^3}+\dfrac{5}{x^3}}{\dfrac{x^3}{x^3}+\dfrac{x}{x^3}+\dfrac{4}{x^3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{б.м.}{1+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{4}{x^3}}=0$$

3. Неопределенность вида $[\infty - \infty]$.

Для разрешения неопределенности такого вида, необходимо умножить и разделить на выражение сопряженное иррациональному выражению.

Пример. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to\infty}(2x-\sqrt{4x^2+3x})$

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}(2x-\sqrt{4x^2+3x})=[\infty-\infty]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-\sqrt{4x^2+3x})(2x+\sqrt{4x^2+3x})}{(2x+\sqrt{4x^2+3x})}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-(4x^2+3\ \ )}{2x+\sqrt{4x^2+3x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x}{2x+\sqrt{4x^2+3x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x}{2x+\sqrt{4x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x}{4x}=-\frac{3}{4}$$

I замечательный предел

Первый замечательный предел разрешает неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ и имеет вид:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

Первый замечательный предел используют в тех случаях, когда выражение, стоящее под знаком предела содержит тригонометрические функции.

Частные случаи первого замечательного предела:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin kx}{kx} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{kx}{\sin kx} = 1$$

Пример. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,x}{x}$

Решение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg\,x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cdot\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1$$

Пример. Вычислить предел: $\lim\limits_{x \to 0} \sin 3x \cdot ctg\, 5x$

Решение:

$$\lim_{x \to 0} \sin 3x \cdot ctg\, 5x = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \to 0} \sin 3x \cdot \frac{\cos 5x}{\sin 5x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{3x \cdot \sin 3x \cdot \cos 5x \cdot 5x}{3x \cdot \sin 5x \cdot 5x} = \lim_{x \to 0} \frac{3x \cdot \cos 5x}{5x} = \frac{3}{5}$$

Пример. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{x\cdot\sin x}$

Решение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{x\cdot\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 3x}{x\cdot\sin x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 3x\cdot\sin 3x\cdot x\cdot 3x\cdot 3x}{3x\cdot 3x\cdot x\cdot\sin x\cdot x}=\lim_{x\to 0}\frac{18x^2}{x^2}=18$$

Пример. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg4x}{3x}$

Решение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{arctg4x}{3x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left|\begin{array}{l} y=arctg4x \\ 4x=tgy \\ x=\dfrac{1}{4}tgy \\ x\to 0\ \ y\to 0 \end{array}\right|=\lim_{y\to 0}\frac{y}{3\cdot\dfrac{1}{4}tgy}=$$

$$=\frac{4}{3}\lim_{y\to 0}\frac{y\cdot\cos y}{\sin y}=\frac{4}{3}\lim_{y\to 0}\cos y=\frac{4}{3}$$

II замечательный предел

Второй замечательный предел разрешает неопределенность вида $\left[1^{\infty}\right]$ и имеет вид:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e \qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$ где $e\approx 2,7$

Показательная функция с основанием e имеет вид: $y=e^{x}$ и называется экспонентой.

Логарифм с основанием e имеет вид: $\log_{e}x=\ln x$ и называется натуральным.

Если $e^{y}=x$, то $y=\ln x.$

Пример. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{3x}$

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x} = \left[1^{\infty}\right] = \left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{3} = e^{3}$$

Пример. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{2x+1}\right)^{3-x}$

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{2x+1}\right)^{3-x}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-3}{2x+1}\right)^{3-x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\dfrac{2x+1}{-3}}\right)^{3-x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\dfrac{2x+1}{-3}}\right)^{\frac{2x+1}{-3}}\right]^{\frac{-3}{2x+1}\cdot(3-x)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-9+3x}{2x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x}{2x}}=e^{\frac{3}{2}}$$

Пример. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+5}\right)^{2x-1}$

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+5}\right)^{2x-1}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(2x+5)-5-3}{2x+5}\right)^{2x-1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x+5}+\frac{-8}{2x+5}\right)^{2x-1}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{2x+5}{-8}}\right)^{\frac{2x+5}{-8}}\right]^{\frac{-8}{2x+5}\cdot(2x-1)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-16x+8}{2x+5}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-16x}{2x}}=e^{-8}$$

Пример. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 2}(5-2x)^{\frac{3x}{2-x}}$.

Решение:

$$\lim_{x\to 2}(5-2x)^{\frac{3x}{2-x}}=\left[1^{\infty}\right]=\left|\begin{matrix} y=x-2 \\ x=y+2 \\ x\to 2\ y\to 0\end{matrix}\right|=$$

$$=\lim_{y\to 0}(5-2(y+2))^{\frac{3(y+2)}{2-(y+2)}}=\lim_{y\to 0}(5-2y-4)^{\frac{3y+6}{-y}}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\left[(1+(-2y))^{\frac{1}{-2y}}\right]^{\frac{-2y}{1}\cdot\frac{3y+6}{-y}}=e^{\lim\limits_{y\to 0}(6y+12)}=e^{12}.$$

Пример. Вычислить предел:

$$\lim_{x\to\infty}(2x+3)\left[\ln(x+2)-\ln x\right]$$

Решение:

Преобразуем выражение стоящее под знаком предела, используя свойства логарифмической функции:

$$\log_a b-\log_a c=\log_a\frac{b}{c} \qquad \log_a b^n=n\log_a b$$

$$\lim_{x\to\infty}(2x+3)\left[\ln(x+2)-\ln x\right]=\lim_{x\to\infty}(2x+3)\ln\frac{x+2}{x}=$$

Сначала разрешим неопределенность, а затем вычислим логарифм полученного числа.

$$=\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)^{2x+3}=\ln\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^{2x+3}=$$

$$=\ln\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{2x+3}=\ln\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{\frac{2}{x}\cdot(2x+3)}=$$

$$=\ln e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x+6}{x}}=\ln e^{4}=4.$$

Пример. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{4x+3}\right)^{3x+1}$

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{4x+3}\right)^{3x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{4x}\right)^{3x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+1}$$

В дальнейшем решении возможны два случая:

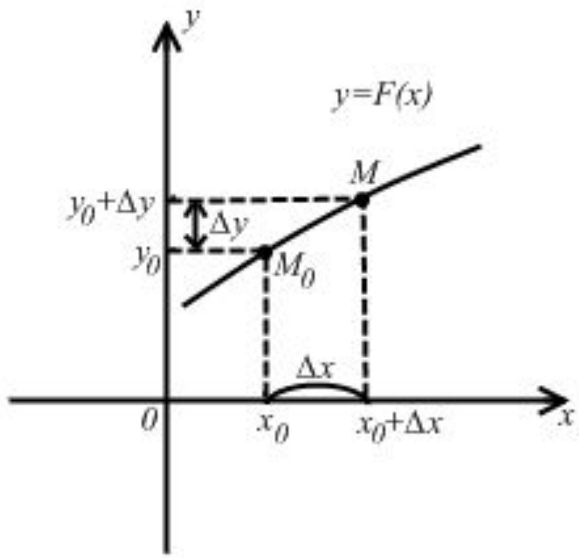
$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+1}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{-\,.\,.}=2^{+б.б.}=б.б.=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+1}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{+\,.\,.}=\frac{1}{2^{+б.б.}}=\frac{1}{+б.б.}=0$$

Непрерывность функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена при некотором значении x_0 и в некоторой окрестности с центром в точке x_0. Пусть $y_0 = f(x_0)$.

Аргументу *x* придадим некоторое приращение Δx



x_0 $\quad y_0 = f(x_0)$

$x_0 + \Delta x$ $\quad y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$

Тогда приращение функции выразится формулой:

$$\Delta y = f\left(x_0 + \Delta x\right) - f(x_0)$$

Определение: Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если она определена в точке x_0 и некоторой ее окрестности, и если

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \text{ или } \lim_{\Delta x \to 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0$$

Условие непрерывности записывают в виде:

$$\lim_{\Delta x \to 0} f\left(x_0 + \Delta x\right) = f(x_0).$$

Геометрически непрерывность функции в точке означает, что разность ординат графика функции $y = f(x)$ в точках $x_0 + \Delta x$ и x_0 будет по абсолютной величине малой, если только Δx будет достаточно малой.

Условия непрерывности:

1. Функция должна быть определена в точке $x=x_0$, то есть $f(x_0)$.
2. В этой точке должны существовать конечные односторонние пределы $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ è $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$.
3. Эти пределы должны быть равны между собой:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x).$$

4. Эти пределы должны быть равны значению функции в этой точке:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0).$$

Если в какой-либо точке $x=x_0$ для функции не выполняется по крайней мере одно из условий непрерывности, то в точке $x=x_0$ функция имеет разрыв, а точка $x=x_0$ называется точкой разрыва функции $y=f(x)$.

Классификация точек разрыва:

Устранимый разрыв

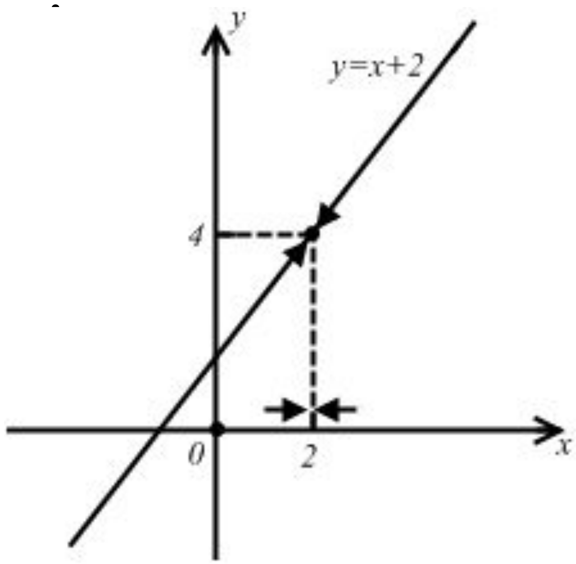
Определение: Точка $x = x_0$ называется точкой устранимого разрыва функции $y = f(x)$, если в данной точке существуют конечные односторонние пределы и они равны между собой, но функция в данной точке неопределена.

Пример. Найти точки разрыва функции $y = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ и указать характер разрыва.

Решение:

Данная функция определена на всей числовой прямой, за исключением точки $x = 2$.

Найдем односторонние пределы:



$$\lim_{x\to 2-0}\frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2-0}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = \lim_{x\to 2-0}(x+2) = 4.$$

$$\lim_{x\to 2+0}\frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2+0}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = \lim_{x\to 2+0}(x+2) = 4.$$

Таким образом, точка $x = 2$ является точкой устранимого разрыва.

Разрыв первого рода

Определение: Точка $x = x_0$ называется точкой разрыва I рода для функции $y = f(x)$, если в данной точке существуют конечные односторонние пределы, но они не равны между собой.

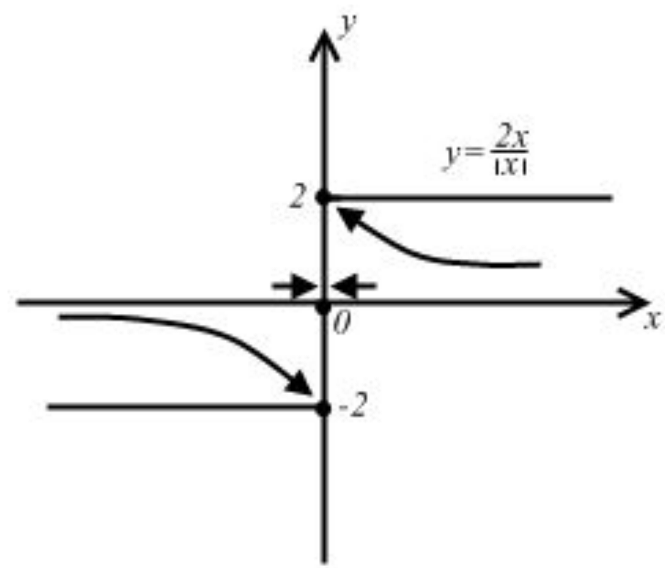
Пример. Найти точки разрыва функции $y = \dfrac{2x}{|x|}$ и указать характер разрыва.

Решение:

Данная функция определена на всей числовой прямой, за исключением точки $x = 0$.

Найдем односторонние пределы.

$$\lim_{x \to -0} \frac{2x}{|x|} = \lim_{x \to -0} \frac{2x}{-x} = -2, \quad \lim_{x \to +0} \frac{2x}{|x|} = \lim_{x \to +0} \frac{2x}{x} = 2,$$



Так как $|x| = \begin{cases} x, & \text{åñëè } x \geq 0 \\ -x, & \text{åñëè } x < 0 \end{cases}$

Таким образом, точка $x = 0$ является точкой разрыва I рода.

Разрыв второго рода

Определение: Точка $x = x_0$ называется точкой разрыва II рода для функции $y = f(x)$, если в данной точке хотя бы один из односторонних пределов обращается в бесконечность.

Пример. Найти точки разрыва функции $y = 2^{\frac{1}{x}}$ и указать характер разрыва.

Решение:

Точка $x = 0$ является точкой разрыва II рода, так как находя односторонние пределы, получим:

$$\lim_{x\to-0} 2^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to-0} 2^{\frac{1}{-\acute{a}.\grave{\imath}.}} = 2^{-\acute{a}.\acute{a}.} = \frac{1}{2^{+\acute{a}.\acute{a}.}} = \frac{1}{+\acute{a}.\acute{a}.} = +\acute{a}.\grave{\imath}. = 0,$$

$$\lim_{x\to+0} 2^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to-0} 2^{\frac{1}{+\acute{a}.\grave{\imath}.}} = 2^{+\acute{a}.\acute{a}.} = +\acute{a}.\acute{a}. = +\infty.$$