

Балка на упругом основании

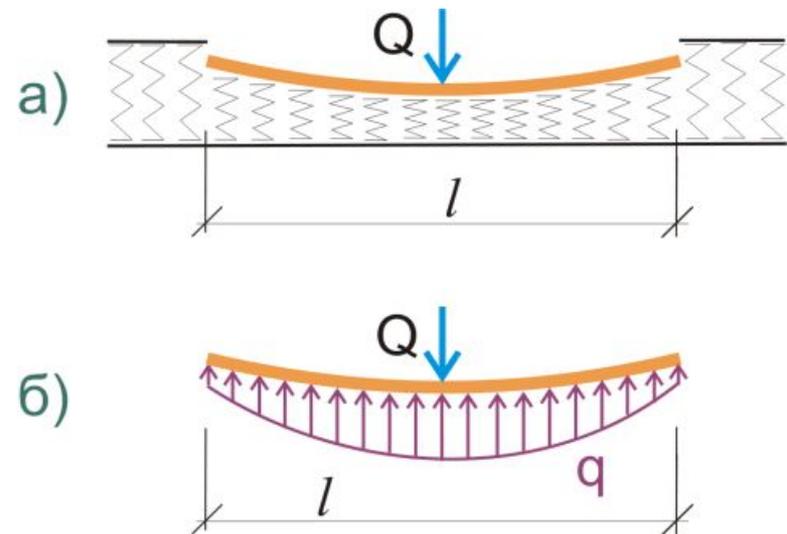
Доцент кафедры
Самолетостроения
К.т.н. Мухин Д.В.

1. БАЛКИ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

В инженерной практике часто встречаются балочные элементы конструкций, лежащие на сплошном **упругом основании**.

К таким конструкциям могут быть отнесены шпалы железнодорожного пути, ленточные фундаменты зданий, фундаменты плотин, опирающиеся на грунты и др. К таким конструкциям относятся также и рельсы, у которых число опор бесконечно велико, а расстояние между ними мало по сравнению с длиной.

Таким образом, основание балки представляет собой как бы некоторую сплошную упругую среду, представляющую собой множество несвязанных между собой пружин. Балка, расположенная на такого рода сплошной среде, называется балкой на упругом основании.



Расчет балки на упругом основании в строгой постановке сводится к решению контактной задачи между конструкцией и основанием.

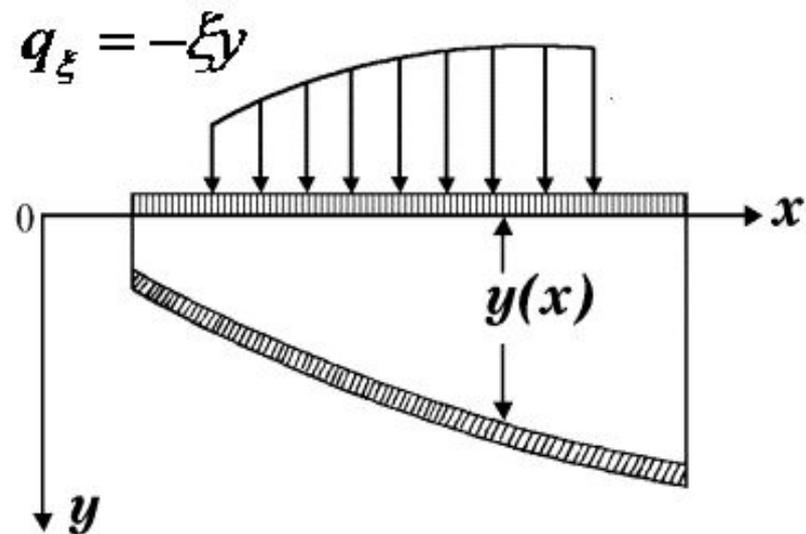
Сложность решения контактных задач в строгой постановке общеизвестна. Поэтому для решения инженерных задач, связанных с расчетом балки применяются приближенные подходы, суть которых заключается в следующем.

Предварительно устанавливается зависимость между реактивным отпором и осадкой поверхности основания. Одной из наиболее распространенных гипотез является гипотеза о пропорциональной зависимости между реакцией и осадкой - **гипотеза Винклеровского основания**.

Согласно гипотезе Фусса – Винклера, реакция упругого основания в каждой точке пропорциональна прогибу балки

$$q_{\xi} = -\xi y$$

Коэффициент ξ (греческая кси) называется **коэффициентом упругого основания** или **коэффициентом постели** (Па/м).



Простое предположение, что непрерывная реакция основания пропорциональна прогибу, приводит к вполне удовлетворительным результатам во многих практических случаях, например, в случае бетонного покрытия или железнодорожного пути. В некоторых случаях фундаменты под различного рода машины рассматриваются как балки на упругом основании.

Задача расчета балок на упругом основании относится к классу статически неопределимых задач, так как из самой модели винклеровского основания следует, что значения силовых факторов в такой балке не могут быть определены без решения задачи об определении прогиба, то есть определения упругой линии.

Дифференциальное уравнение упругой линии балки:
$$EJ_z \frac{d^4 y}{dx^4} = q_\Sigma$$

где q_Σ представляет итоговую интенсивность распределенной нагрузки, действующей на балку.

Поскольку для балки на упругом основании интенсивность распределенной нагрузки представляет собой сумму, то получаем

$$q_\Sigma = q + q_\xi = q - \xi y$$

$$EJ_z \frac{d^4 y}{dx^4} + \xi y = q$$

2. Расчет бесконечных балок на упругом основании

Дифференциальное уравнение упругой линии балки – линейное неоднородное ДУ 4 порядка, приведем его к каноническому виду.

Введем обозначение :

$$\beta = \sqrt{\frac{\xi}{4EJ_z}} \quad \text{-коэффициент относительной жесткости основания}$$

Дифференциальное уравнение принимает вид:
$$\frac{d^4 y(x)}{dx^4} + 4\beta^4 y(x) = \frac{q(x)}{EJ_z}$$

Общее решение линейного неоднородного ДУ выражается зависимостью:

$$y_{он}(x) = y_{оо}(x) + y_{чн}(x)$$

$y_{он}(x)$ - общее решение неоднородного ДУ

$y_{оо}(x)$ - общее решение однородного ДУ, получаемого из данного приравниванием правой части к нулю

$y_{чн}(x)$ - частное решение неоднородного уравнения, получаемое подбором

Рассмотрим решение однородного дифференциального уравнения :

$$\frac{d^4 y(x)}{dx^4} + 4\beta^4 y(x) = 0$$

Решаем через характеристическое уравнение: $\lambda^4 + 4\beta^4 = 0$

Корни характеристического уравнения:

$$\lambda_1 = \beta\sqrt{2} \cdot (-\sqrt{-i}), \quad \lambda_2 = \beta\sqrt{2} \cdot (\sqrt{-i}), \quad \lambda_3 = \beta\sqrt{2} \cdot (-\sqrt{i}), \quad \lambda_4 = \beta\sqrt{2} \cdot (\sqrt{i}).$$

где i – мнимая единица.

С учетом того что
$$\sqrt{i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i), \quad \sqrt{-i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$$

Получаем
$$\lambda_1 = -\beta(1-i), \quad \lambda_2 = \beta(1-i), \quad \lambda_3 = -\beta(1+i), \quad \lambda_4 = \beta(1+i).$$

Решение ДУ будет иметь вид:

$$y_{00}(x) = C_1^{**} e^{-\beta(1-i)x} + C_2^{**} e^{\beta(1-i)x} + C_3^{**} e^{-\beta(1+i)x} + C_4^{**} e^{\beta(1+i)x}$$

С учетом формулы Эйлера: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

$$y_{00}(x) = e^{-\beta x} (C_1^* \cos \beta x + C_2^* \sin \beta x) + e^{\beta x} (C_3^* \cos \beta x + C_4^* \sin \beta x)$$

Анализируя полученный результат, приходим к выводу, что общее решение включает выражения для затухающей и возрастающей гармоник или, иными словами, для двух затухающих гармоник, одна из которых затухает по направлению к правому концу балки, а другая - к левому. Затухание здесь довольно быстрое.

В случае длинной балки члены уравнения, содержащие множитель $e^{\beta x}$, для правого ее конца становятся очень большими. Так как в действительности там деформации и внутренние силы имеют конечную величину, то коэффициенты C_3^* и C_4^* в членах, содержащих множитель $e^{\beta x}$, должны быть очень малыми и для достаточно длинной балки практически обращаются в нуль. В этом случае общее решение упрощается и получает вид

$$y_{00}(x) = e^{-\beta x} (C_1^* \cos \beta x + C_2^* \sin \beta x)$$

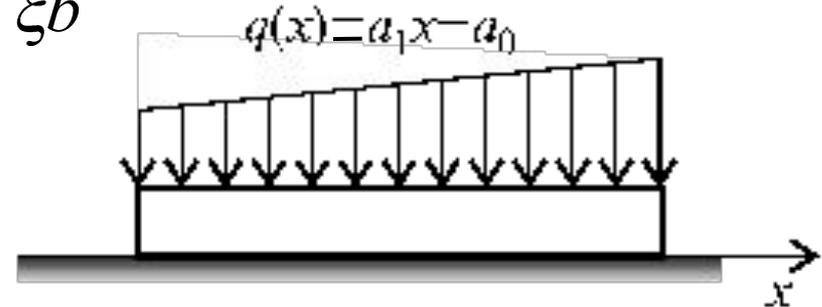
На расстоянии трех полуволн $3s = 3\pi/\beta$ от левого конца балки члены общего решения с постоянными интегрирования C_1^* и C_2^* практически исчезнут. Поэтому балку длиной $L \geq 3\pi/\beta$ рассчитывать, как бесконечно длинную, поскольку уже в середине ее влияние концевых граничных условий будет сказываться очень мало.

К полученному общему решению $y_{00}(x)$ надо добавить частное решение $y_{чн}(x)$, зависящее от нагрузки $q(x)$. Если нагрузка $q(x)$ представляет собой алгебраический полином от x , то частное решение можно найти в виде полинома той же степени методом неопределенных коэффициентов. В частности, для линейной функции вида $q(x) = a_1x + a_0$, частное решение уравнения имеет вид

$$y_{чн}(x) = \frac{a_1x + a_0}{\xi b}$$

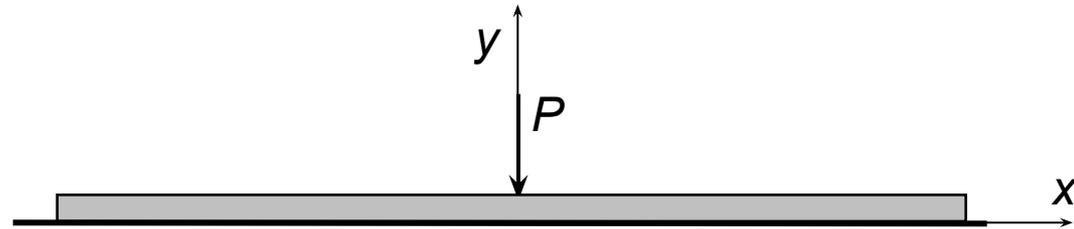
ξ – коэффициент постели,

b – ширина основания балки.



Рассмотрим расчет бесконечно длинной балки на упругом основании, загруженной одной силой P

Начало координат расположим под силой. Вследствие симметрии рассмотрим только правую часть балки. Так как распределенной нагрузки нет возьмем решение в виде:



$$y(x) = e^{-\beta x} (C_1^* \cos \beta x + C_2^* \sin \beta x) \quad \text{где } \beta = \sqrt[4]{\frac{\xi}{4EJ_z}}$$

Соотношение между постоянными C_1^* и C_2^* находится из условия, что в начале координат касательная к оси балки горизонтальна, т.е

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 0$$

Дифференцируем и приравниваем к нулю уравнение упругой линии

$$\frac{dy}{dx} = -\beta e^{-\beta x} [\cos \beta x (C_1^* - C_2^*) + \sin \beta x (C_1^* + C_2^*)] = 0$$

отсюда $C_1^* = C_2^* = C$

Следовательно $y = e^{-\beta x} C (\cos \beta x + \sin \beta x); \quad \frac{dy}{dx} = -2e^{-\beta x} C \beta \sin \beta x$

Для определения постоянной C воспользуемся начальными условиями по центру балки, согласно им поперечная сила в правом сечении балки в начале координат равна $P/2$, то есть

$$Q|_{x=0} = -\frac{P}{2}$$

Но с другой стороны $EJ_z \frac{d^3 y}{dx^3} = Q(x)$ следовательно $EJ_z \frac{d^3 y}{dx^3} \Big|_{x=0} = -\frac{P}{2}$

Вычисляем $\frac{d^2 y}{dx^2}$ и $\frac{d^3 y}{dx^3}$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -2C\beta^2 e^{-\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x);$$
$$\frac{d^3 y}{dx^3} = 4C\beta^3 e^{-\beta x} \cos \beta x.$$

С учетом начальных условий по центру:

$$EJ_z 4C\beta^3 = -\frac{P}{2}$$

$$C = -\frac{P}{8EJ_z \beta^3}$$

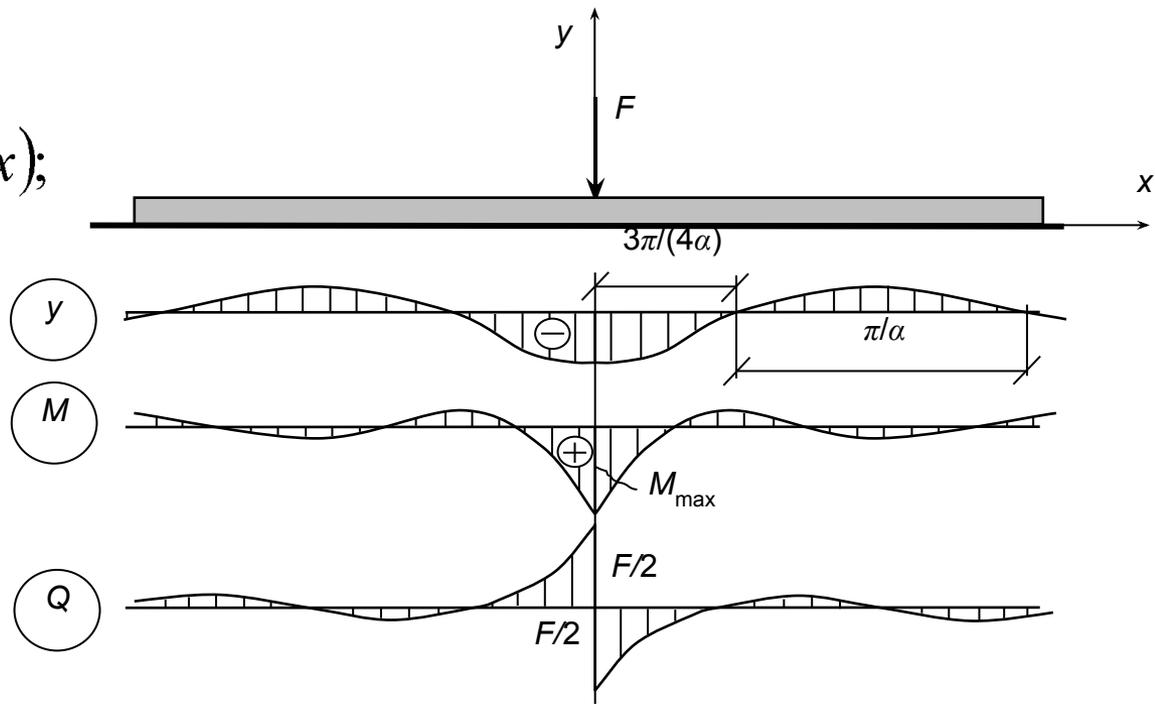
Итоговые уравнения

$$y = -\frac{P}{8EJ_z\beta^3} e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x);$$

$$y' = \frac{P}{4EJ_z\beta^2} e^{-\beta x} \sin \beta x;$$

$$M = \frac{P}{4\beta} e^{-\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x);$$

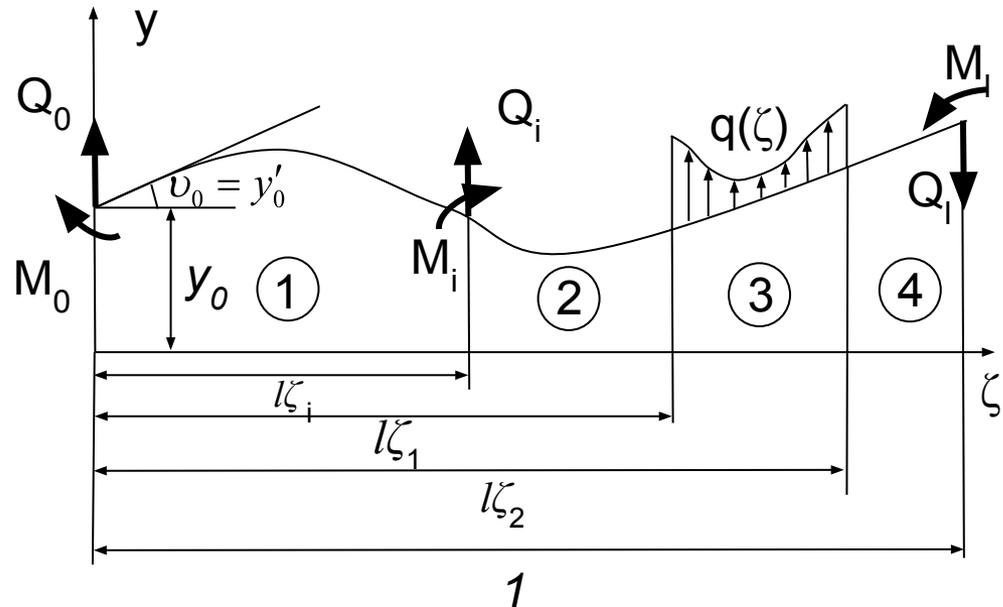
$$Q = -\frac{P}{2} e^{-\beta x} \cos \beta x.$$



РАСЧЕТ БАЛОК КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Введем вместо переменной x безразмерную переменную ζ (дзета) по формуле $x = \zeta l$, где l - длина балки. Тогда уравнение переписывается в виде:

$$\frac{d^4 y}{d\zeta^4} + \frac{l^4 \xi}{EJ_z} y = \frac{l^4}{EJ_z} q$$



Для угла поворота сечения, изгибающего момента и поперечной силы получим следующие выражения:

$$y' = \frac{1}{l} \frac{dy}{d\zeta}; \quad M = \frac{EJ_z}{l^2} \frac{d^2 y}{d\zeta^2}; \quad Q = \frac{EJ_z}{l^3} \frac{d^3 y}{d\zeta^3}$$

Рассмотрим решение однородного дифференциального уравнения :

$$\frac{d^4 y}{d\zeta^4} + fy = 0 \quad \text{где} \quad f = \frac{l^4 \xi}{EJ_z}$$

его характеристическое уравнение: $\lambda^4 + f = 0$

Корни характеристического уравнения: $\lambda_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} (1+i)\sqrt[4]{f}$, $\lambda_{3,4} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} (1-i)\sqrt[4]{f}$

Введем обозначения: $\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt[4]{f} = l \cdot \sqrt[4]{\frac{\xi}{4EJ_z}}$

Тогда формулы для корней характеристического уравнения переписутся в виде:

$$\lambda_{1,2} = \pm(1+i)\gamma, \lambda_{3,4} = \pm(1-i)\gamma$$

Соответствующее решение однородного уравнения можно записать:

$$\begin{aligned} y &= C_1^{**} e^{(1+i)\gamma\zeta} + C_2^{**} e^{-(1+i)\gamma\zeta} + C_3^{**} e^{(1-i)\gamma\zeta} + C_4^{**} e^{-(1-i)\gamma\zeta} = \\ &= e^{\gamma\zeta} (C_1^* \cos \gamma\zeta + C_2^* \sin \gamma\zeta) + e^{-\gamma\zeta} (C_3^* \cos \gamma\zeta + C_4^* \sin \gamma\zeta) = \\ &= C_1 \operatorname{ch} \gamma\zeta \cos \gamma\zeta + C_2 \operatorname{ch} \gamma\zeta \sin \gamma\zeta + C_3 \operatorname{sh} \gamma\zeta \sin \gamma\zeta + C_4 \operatorname{sh} \gamma\zeta \cos \gamma\zeta \end{aligned}$$

Согласно данной формуле решение однородного уравнения записывается в трех эквивалентных формах.

Первая форма комплексная, что неудобно на практике.

Вторая форма содержит растущую по величине и стремящуюся к нулю составляющие. Эта форма решения удобна при рассмотрении балок бесконечной длины, так как растущая составляющая должна быть равна нулю.

Третья форма решения удобна для балок ограниченной длины. В данном случае возможно получение формул метода начальных параметров, подобно тому, как это было сделано в случае поперечного изгиба балки со свободным пролетом.

Метод начальных параметров для балок на упругом основании

Исходная система уравнений будет иметь вид:

$$\left\{ \begin{aligned} y &= C_1 \operatorname{ch} \gamma \zeta \cos \gamma \zeta + C_2 \operatorname{ch} \gamma \zeta \sin \gamma \zeta + C_3 \operatorname{sh} \gamma \zeta \sin \gamma \zeta + C_4 \operatorname{sh} \gamma \zeta \cos \gamma \zeta ; \\ y' &= \frac{\gamma}{l} [C_1 (\cos \gamma \zeta \operatorname{sh} \gamma \zeta - \sin \gamma \zeta \operatorname{ch} \gamma \zeta) + C_2 (\sin \gamma \zeta \operatorname{sh} \gamma \zeta + \cos \gamma \zeta \operatorname{ch} \gamma \zeta) + \\ &+ C_3 (\sin \gamma \zeta \operatorname{ch} \gamma \zeta + \cos \gamma \zeta \operatorname{sh} \gamma \zeta) + C_4 (\cos \gamma \zeta \operatorname{ch} \gamma \zeta - \sin \gamma \zeta \operatorname{sh} \gamma \zeta)]; \\ M &= \frac{2EJ_z \gamma^2}{l^2} (-C_1 \sin \gamma \zeta \operatorname{sh} \gamma \zeta + C_2 \cos \gamma \zeta \operatorname{sh} \gamma \zeta + C_3 \cos \gamma \zeta \operatorname{ch} \gamma \zeta - C_4 \sin \gamma \zeta \operatorname{ch} \gamma \zeta); \\ Q &= \frac{2EJ_z \gamma^3}{l^3} [-C_1 (\sin \gamma \zeta \operatorname{ch} \gamma \zeta + \cos \gamma \zeta \operatorname{sh} \gamma \zeta) + C_2 (\cos \gamma \zeta \operatorname{ch} \gamma \zeta - \sin \gamma \zeta \operatorname{sh} \gamma \zeta) + \\ &+ C_3 (\cos \gamma \zeta \operatorname{sh} \gamma \zeta - \sin \gamma \zeta \operatorname{ch} \gamma \zeta) - C_4 (\sin \gamma \zeta \operatorname{sh} \gamma \zeta + \cos \gamma \zeta \operatorname{ch} \gamma \zeta)]; \end{aligned} \right.$$

При постановке задачи в форме Коши данные соотношения должны удовлетворять условиям:

$$\begin{aligned} y|_{\zeta=0} &= y_0 = C_1; & y'|_{\zeta=0} &= y'_0 = \frac{\gamma}{l} (C_2 - C_4); \\ M|_{\zeta=0} &= M_0 = \frac{2EJ_z \gamma^2}{l^2} C_3; & Q|_{\zeta=0} &= Q_0 = \frac{2EJ_z \gamma^3}{l^3} (C_2 + C_4). \end{aligned}$$

Из НУ определяем постоянные интегрирования

$$C_1 = y_0; \quad C_2 = \frac{y_0' l}{2\gamma} + \frac{Q_0 l^3}{4EJ_z \gamma^3}; \quad C_3 = \frac{M_0 l^2}{2EJ_z \gamma^2}; \quad C_4 = \frac{y_0' l}{2\gamma} - \frac{Q_0 l^3}{4EJ_z \gamma^3}.$$

Для упрощения записи введем функции Крылова:

$$s = \cos \gamma \zeta \operatorname{sh} \gamma \zeta, \quad t = \frac{1}{2} (\sin \gamma \zeta \operatorname{ch} \gamma \zeta + \cos \gamma \zeta \operatorname{sh} \gamma \zeta), \quad u = \frac{1}{2} \sin \gamma \zeta \operatorname{sh} \gamma \zeta, \quad v = \frac{1}{4} (\sin \gamma \zeta \operatorname{ch} \gamma \zeta - \cos \gamma \zeta \operatorname{sh} \gamma \zeta).$$

Функции Крылова обладают свойствами

$$\frac{ds}{d\zeta} = -4\gamma v; \quad \frac{dt}{d\zeta} = \gamma s; \quad \frac{du}{d\zeta} = \gamma t; \quad \frac{dv}{d\zeta} = \gamma u.$$

С учетом НУ и свойств функций Крылова исходная система уравнений может быть представлена:

$$y = sy_0 + \frac{l}{\gamma} ty_0' + \frac{l^2}{EJ_z \gamma^2} u M_0 + \frac{l^3}{EJ_z \gamma^3} v Q_0;$$

$$y' = -\frac{4\gamma}{l} v y_0 + sy_0' + \frac{l}{EJ_z \gamma} t M_0 + \frac{l^2}{EJ_z \gamma^2} u Q_0;$$

$$M = \frac{4EJ_z \gamma^2}{l^2} u y_0 - \frac{4EJ_z \gamma}{l} v y_0' + s M_0 + \frac{l}{\gamma} t Q_0;$$

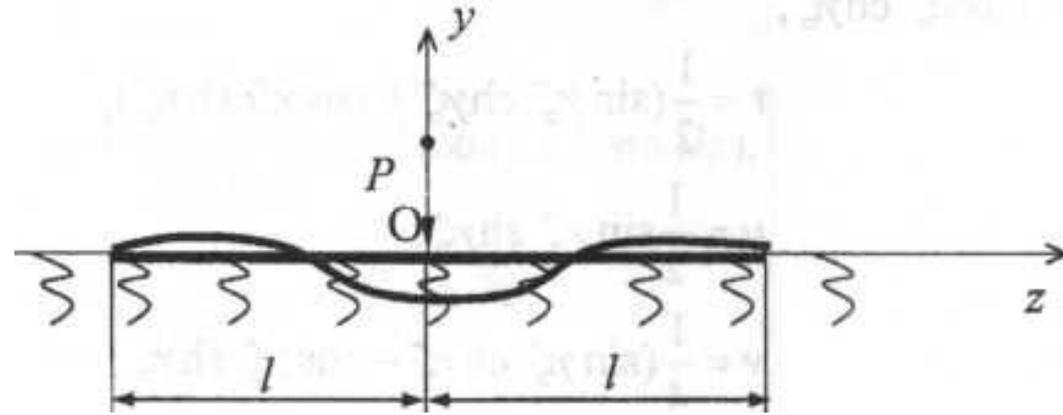
$$Q = -\frac{4EJ_z \gamma^3}{l^3} t y_0 - \frac{4EJ_z \gamma^2}{l^2} u y_0' - \frac{4\gamma}{l} v M_0 + s Q.$$

Для балок с несколькими приложенными сосредоточенными силами, моментами и грузовыми площадками соотношения проще записать в матричной форме.

$$\begin{aligned}
 V^T(\zeta) &= |y(\zeta), y'(\zeta), M(\zeta), Q(\zeta)|; \\
 V_0^T &= |y_0, y'_0, M_0, Q_0|; \\
 V_i^T &= |0, 0, M_i, Q_i|; \\
 V^T(\alpha) &= |0, 0, 0, q(\alpha)|;
 \end{aligned}
 \quad
 K(x) = \begin{vmatrix}
 s & \frac{lt}{\gamma} & \frac{l^2 u}{\gamma^2 EJ_z} & \frac{l^3 v}{EJ_z 3!} \\
 -\frac{4\gamma v}{l} & s & \frac{lt}{\gamma EJ_z} & \frac{l^2 u}{\gamma^2 EJ_z} \\
 \frac{4\gamma^2 EJ_z u}{l^2} & -\frac{4\gamma EJ_z v}{l} & s & \frac{lt}{\gamma} \\
 -\frac{4\gamma^3 EJ_z t}{l^3} & -\frac{4\gamma^2 EJ_z u}{l^2} & -\frac{4\gamma v}{l} & s
 \end{vmatrix}$$

$$V(\zeta) = K(\zeta)V_0|_1 + \sum K(\zeta - \zeta_i)V_i|_2 + \sum l \cdot \left(\int_{\alpha_1}^{\zeta} K(\zeta - \alpha)V(\alpha)d\alpha|_3 + \int_{\zeta}^{\alpha_2} K(\zeta - \alpha)V(\alpha)d\alpha|_4 \right)$$

В качестве примера рассмотрим балку на упругом основании конечной длины, нагруженную сосредоточенной силой в середине.



С учетом симметрии имеем следующие граничные условия:

$$y'_0 = \left. \frac{dy}{ld\zeta} \right|_{\zeta=0} = 0; \quad Q_0 = \left. \frac{EJ_z}{l^3} \frac{d^3 y}{d\zeta^3} \right|_{\zeta=0} = -\frac{P}{2};$$

$$M_l = \left. \frac{EJ_z}{l^2} \frac{d^2 y}{d\zeta^2} \right|_{\zeta=l} = 0; \quad Q_l = \left. \frac{EJ_z}{l^3} \frac{d^3 y}{d\zeta^3} \right|_{\zeta=l} = 0.$$

Воспользовавшись соотношениями метода начальных параметров, получаем уравнения для нахождения y_0 и M_0 :

$$-\frac{4EJ_z \gamma^2}{l^2} u(1)y_0 + s(1)M_0 = \frac{l}{\gamma} t(1) \frac{P}{2},$$

$$-\frac{4EJ_z \gamma^3}{l^3} t(1)y_0 - \frac{4\gamma}{l} v(1)M_0 = s(1) \frac{P}{2}$$

Решая систему получаем

$$y_0 = -\frac{P}{8} \frac{l^3}{EJ_z \gamma^3} \frac{4t(1)v(1) + s^2(1)}{4u(1)v(1) + s(1)t(1)},$$

$$M_0 = \frac{P}{2} \frac{l}{\gamma} \frac{[-u(1)s(1) + t^2(1)]}{4u(1)v(1) + s(1)t(1)}$$

Записываем формулу прогиба балки

$$y(\zeta) = -\frac{P}{2} \frac{l^3}{EJ_z \gamma^3} \left[\frac{1}{4u(1)v(1) + s(1)t(1)} \times \right. \\ \left. \times \left\{ \frac{1}{4} [4t(1)v(1) + s^2(1)] \cdot s(\zeta) + [u(1)s(1) - t^2(1)] u(\zeta) \right\} + v(\zeta) \right];$$