ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

ПРАКТИКУМ

Мацкевич И.Ю.
Петрова Н.П.
Тарусина Л.И.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Практикум
для учащихся средних специальных заведений

Рекомендовано к изданию экспертным советом
Республиканского института профессионального образования

АВТОРЫ:

Мацкевич Ирина Юрьевна, ст. преподаватель Института информационных технологий БГУИР,

Петрова Наталья Павловна, преподаватель Минского радиотехнического колледжа,

Тарусина Лилия Ивановна, преподаватель Минского радиотехнического колледжа

РЕЦЕНЗЕНТ:

Майсеня Людмила Иосифовна, зав. кафедрой физико-математических дисциплин ИИТ БГУИР, д-р пед. наук, канд. физ.-мат. наук, доцент

Оглавление

Предисловие

Пособие «Теория вероятностей и математическая статистика: практикум» предназначено для обучения учащихся колледжей, получающих среднее специальное образование, и служит для закрепления теоретического материала, формирования практических навыков решения задач по теории вероятностей и освоения статистических методов обработки данных с использованием современных информационных технологий. Практикум ориентирован на применение математических методов в задачах прикладного характера и представляет собой руководство к выполнению десяти лабораторно-практических работ по следующим разделам дисциплины:

– «Классическое, геометрическое и статистическое определения вероятностей событий»;

– «Теоремы сложения и умножения вероятностей независимых событий»;

– «Условная вероятность. Формула полной вероятности и формулы Байеса»;

– «Дискретные случайные величины. Биномиальный закон распределения»;

– «Повторение независимых испытаний»;

– «Непрерывные случайные величины»

– «Вариационные ряды, их графическое изображение»;

– «Точечные и интервальные оценки параметров распределения»;

– «Проверка параметрических гипотез»;

– «Проверка непараметрических гипотез».

Каждая лабораторно-практическая работа содержит краткие теоретические сведения, образец решения и оформления типового варианта задания, 30 вариантов практического задания одинаковой степени сложности и контрольные вопросы. В разобранных задачах приведены образцы решения типовых заданий как расчетными методами, так и с использованием электронных таблиц Excel. В пособии также содержатся все необходимые исходные данные, рекомендуемая литература и справочные материалы (в виде приложений).

Отметим, что лабораторно-практические работы 1-3 написаны И.Ю. Мацкевич, работы 4-6 – Л.И. Тарусиной, а работы 7-10 – Н.П. Петровой.

Авторский коллектив выражает благодарность Л.И. Майсене за внимательное рецензирование данной работы и корректные замечания

ЛАБОРАТОРНО-ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 1

КЛАССИЧЕСКОЕ, ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ И СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОБЫТИЙ

Цель работы:

-изучение основных понятий теории вероятностей;

-ознакомление с различными методами вычисления вероятностей событий;

-практическое применение элементов комбинаторики для вычисления вероятностей событий.

Оглавление.

Краткие теоретические сведения

Теория вероятностей – это раздел математики, в котором изучаются закономерности, присущие массовым случайным явлениям.

Комбинаторика – это раздел математики, в котором изучаются вопросы, связанные с рассмотрением множеств и подсчётом числа различных комбинаций из элементов этих множеств.

Пусть дано множество E, содержащее n элементов. Число n называют *объемом множества* E.

Извлечение k ($k \le n$) элементов из множества E называется *выбором k элементов*, а сам извлеченный набор – *выборкой объема* k.

Правило произведения: если множество E_1 объёма n_1, множество E_2 объёма n_2, …, множество $E_к$ объёма $n_к$, то число способов выбора по одному элементу из каждого множества $E_1, E_2, \ldots, E_к$ равно $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.

Правило суммы: если множество E_1 объёма n_1, множество E_2 объёма n_2, …, множество $E_к$ объёма $n_к$, то число способов выбора всех элементов из каждого множества $E_1, E_2, \ldots, E_к$ равно $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.

Следствие: если множества E_1, E_2, …, $E_к$ содержат по n элементов каждое, то число способов выбора по одному элементу из этих множеств равняется n^k.

Перестановкой n элементов называется расположение этих элементов в определенном порядке. Число перестановок из n элементов определяется формулой

$$P_n = n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1 = n!$$

Любой выбор k элементов, взятых в определенном порядке, из n элементов, называется *размещением* из n по k. Число размещений из n по k элементов равно

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Любой выбор k элементов из n элементов без учета порядка выбора называется *сочетанием* из n по k. Число сочетаний из n по k равно

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \qquad (1.1)$$

Будем называть *опытом*, или *экспериментом*, осуществление определенного комплекса условий или действий. Возможный результат опыта называется *событием*.

Событие называется *достоверным* в данном опыте, если в этом опыте оно обязательно произойдет.

Событие называется *невозможным*, если в данном опыте оно произойти не может (обозначение: $\varnothing$).

Случайным событием называется событие, которое в данном опыте может произойти, а может и не произойти (обозначение: A, B, C, D, …).

Множество всех возможных и взаимоисключающих исходов опыта называется *пространством элементарных событий* (обозначение: Ω), связанных с данным опытом. Элементы пространства Ω называются *элементарными событиями*.

События называются *несовместными,* если появление одного из них исключает появление других событий в условиях одного и того же эксперимента.

Два события называются *противоположными*, если появление одного из них равносильно непоявлению другого. Событие, противоположное событию А, будем обозначать $\bar{A}$.

Два события называются *совместными* в данном опыте, если появление одного из них не исключает появление другого в этом же опыте.

Группа несовместных событий называется *полной группой событий*, если в результате опыта обязательно наступит одно из событий, входящих в эту группу.

События называются *равновозможными*, если нет оснований полагать, что одно событие является более возможным, чем другие.

Пусть Ω – пространство элементарных событий некоторого эксперимента. Подмножества $A \subset \Omega$ и $B \subset \Omega$ представляют собой случайные события. Пустое множество $\varnothing$ соответствует невозможному событию, а все пространство Ω – достоверному событию.

Суммой событий A и B называется такое событие, которое состоится при появлении либо события A, либо события B, либо обоих событий вместе. Обозначение: $A + B$ или $A \cup B$.

Произведением событий A и B называется такое событие, которое происходит при одновременном наступлении обоих событий. Обозначение: $A \cdot B$ или $A \cap B$.

Разностью событий A и B называется событие, которое состоится, если событие A произойдет, а событие B не произойдет. Обозначение: $A - B$ или $A \setminus B$.

Если события A и B несовместны, то $A \cdot B = \varnothing$.

Классической вероятностью события $P(A)$ называется отношение числа благоприятствующих этому событию исходов k к общему числу всех равновозможных исходов n, образующих полную группу:

$$P(A) = \frac{k}{n}. \tag{1.2}$$

Свойства классической вероятности:

1) $0 \le P(A) \le 1$,

2) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$,

3) $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Пусть имеется *N* деталей, из которых *M* – стандартных $(M < N)$. Из этой партии случайным образом выбирается *n* деталей на проверку. Вероятность того, что среди *n* отобранных деталей, будет *k* стандартных, находится по формуле:

$$P_n(k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$$

Относительной частотой события А называется отношение числа опытов *k* ,в которых событие А наступило, к общему числу проведенных опытов:

$$W(A) = \frac{k}{n}.$$

В качестве *статистической вероятности* события принимают число, вокруг которого колеблются значения относительной частоты при неограниченном возрастании числа испытаний. Для существования статистической вероятности события A требуется возможность производить неограниченное число испытаний и устойчивость относительных частот появления события A в различных сериях достаточно большого числа испытаний.

Пусть A – событие, состоящее в попадании точки, брошенной в область G, в область $g \subset G$.

Если g и G – отрезки, то *геометрической вероятностью события A* называется отношение

$$P(A) = \frac{l(g)}{l(G)}, \qquad (1.5)$$

где $l(g)$ и $l(G)$ – длины отрезков g и G соответственно.

Если [illegible] и [illegible] – плоские области, то *геометрической вероятностью события A* называется отношение

$$[illegible] = \frac{[illegible]([illegible])}{[illegible]([illegible])} \qquad (1.6)$$

где [illegible] и [illegible] − площади областей [illegible] и [illegible] соответственно

Если [illegible] и [illegible] – плоские или пространственные области то *геометрической вероятностью события A* называется отношение

$$[illegible] = \frac{[illegible]([illegible])}{[illegible]([illegible])} \qquad (1.7)$$

где [illegible] и [illegible] − объёмы областей [illegible] и [illegible] соответственно.

Решение типовых заданий

Задание 1. Из коробки, содержащей 25 деталей, среди которых 6 бракованных, наудачу выбраны три детали. Найти вероятность того, что среди них ровно две бракованные.

Решение. По формулам (1.3) и (1.1), имеем

$$P_6(3) = \frac{C_6^2 C_{19}^1}{C_{25}^3} = \frac{285}{2300} = 0,12.$$

Задание 2. Сколькими способами можно расселить 9 студентов по трем комнатам: двухместной, трехместной, четырехместной?

Решение. Согласно правилу произведения и формуле (1.1), найдём необходимое число способ расселения студентов:

$$N = C_9^2 \cdot C_7^3 \cdot C_4^4 = \frac{9!}{(9-2)!2!} \cdot \frac{7!}{(7-3)!3!} \cdot \frac{4!}{0!} = \frac{9 \cdot 8}{2} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} \cdot 1 = 1260.$$

Ответ: 1260.

Задание 3. В урне 10 лотерейных билетов, из них 4 выигрышных. Из урны наугад извлекаются два билета. Найти вероятность того, что: а) оба билета выигрышные (событие A); б) оба билета без выигрыша (событие B); в) один билет выигрышный, а другой нет (событие C).

Решение.

Применим формулу классической вероятности (1.2) и правило подсчёта числа сочетаний (1.1).

а) Выбор двух билетов из 10 можно осуществить $n = C_{10}^2 = 45$ способами, а двух выигрышных билетов из четырех $k_1 = C_4^2 = 6$ способами. Получим, что в данном случае $P(A) = k_1/n = 6/45 = 2/15$.

б) Имеются $k_2 = C_6^2 = 15$ возможностей выбора билета без выигрыша. В таком случае вероятность $P(B) = k_2/n = 15/45 = 1/3$.

в) Существуют 4 возможности вытащить выигрышный билет и 6 возможностей – билет без выигрыша. Имеются $k_3 = 6 \cdot 4 = 24$ возможности вытащить один билет с выигрышем, а другой без выигрыша. Тогда $P(C) = k_3/n = 24/45 = 8/15$.

Ответ: а) 2/15; б) 1/3; в) 8/15.

Задание 4. На плоскости начерчены две концентрические окружности, радиусы которых 5 см и 10 см соответственно. Найти вероятность того, что точка, брошенная наудачу в больший круг, попадет в кольцо, образованное данными окружностями.

Решение. Событие A состоит в том, что точка, брошенная наудачу в больший круг, попадет в кольцо между данными окружностями.

Площадь кольца (фигуры G) равна $S(G) = \pi(10^2 - 5^2) = 75\pi$.

Площадь большого круга (фигуры D) $S(D) = \pi 10^2 = 100\pi$.

Искомую вероятность найдём по формуле (1.6). Тогда $P(A) = 75\pi/(100\pi) = 0{,}75$.

Ответ: 0,75.

Практические задания

Задание 1.1.-1.4.

Найти вероятности событий, используя определение классической вероятности и комбинаторику.

Задание 2 (для вариантов 1-25).

Найти вероятность события, используя определения геометрической вероятности (1.5), (1.6) или (1.7).

Задание 2 (для вариантов 26-30).

Найти вероятность события, используя определение статистической вероятности (1.4).

Вариант 1

1.1. На склад универмага поступило 30 телевизоров. Из них 20 – марки «Витязь» и 10 – марки «Горизонт». Наудачу взяли 10 телевизоров и доставили в торговый зал на продажу. Какова вероятность того, что ровно 4 из них марки «Витязь»?

1.2. Какова вероятность того, что произведение очков, выпавших на двух игральных костях, четное число?

1.3. На одинаковых карточках написаны буквы *И, К, М, Н, С*. Карточки перемешиваются и наугад раскладываются в ряд. Какова вероятность того, что получится слово МИНСК?

1.4. В городе каждую неделю происходит семь автомобильных катастроф. Найти вероятность того, что каждая неделя будет содержать дни, когда происходили катастрофы. (Считать, что распределение катастроф по дням недели равновероятно).

2.1. После бури на участке между 40-м и 70-м километрами телефонной линии произошел обрыв провода. Установить, какова вероятность того, что обрыв произошел между 50-м и 55-м километрами телефонной линии.

Ко всем вариантам.

←　　→

Вариант 2

1.1. В пакете 15 конфет «Красная шапочка» и 20 конфет «Мишка косолапый». Из пакета наудачу извлекают 8 конфет. Какова вероятность того, что среди них ровно 5 конфет «Мишка косолапый»?

1.2. Подбрасываются два игральных кубика и отмечается число очков на верхней грани каждого кубика. Найти вероятность того, что на обеих гранях выпадет одинаковое число очков.

1.3. Оля и Коля договорились встретить праздник в компании из 10 человек. Они оба хотели сидеть за круглым столом рядом. Найти вероятность исполнения их желания, если среди гостей принято распределять места по жеребьевке.

1.4. Восемь шаров случайным образом размещаются по восьми ящикам. Найти вероятность того, что каждый ящик будет занят.

2.1. В прямоугольник с вершинами A (0; 0), B (3; 0), C (3; 10), D (0; 10) наугад брошена точка. Найти вероятность того, что ее координаты (x; y) удовлетворяют неравенствам $0 \le \boxtimes \le \frac{1}{3}\boxtimes$.

Ко всем вариантам.

Вариант 3

Задание 1. Найти вероятности событий, используя определение классической вероятности и комбинаторику.

1.1. Хозяйка купила 2 пакетика семян: один – с семенами тыквы, а второй – с семенами кабачка. Известно, что в каждом из пакетиков по 20 зерен. По дороге домой пакетики разорвались, и семена перемешались между собой. Хозяйка посадила наудачу 7 семян. Какова вероятность того, что ровно 4 из них семена тыквы?

1.2. Бросают две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков на обеих гранях является нечетным числом.

1.3. Из пяти букв разрезной азбуки составлено слово КНИГА. Ребенок, не умеющий читать, рассыпал эти буквы, а затем собрал в произвольном порядке. Найти вероятность того, что у него снова получилось слово КНИГА.

1.4. Гардеробщица одновременно выдала номерки пяти лицам, сдавшим свои шляпы в гардероб, и повесила их наугад. Найти вероятность того, что она выдаст каждому его собственную шляпу.

2.1. Вероятность попадания в любую часть плоской треугольной пластинки пропорциональна ее площади. Найти вероятность попадания наугад брошенной на пластинку точки в треугольник, образованный средними линиями исходногс треугольника.

Ко всем вариантам. ← →

Вариант 4

1.1. В магазине на витрине выставлены 10 барабанов красного цвета и 5 синего. Наудачу для детского сада куплено 9 барабанов. Какова вероятность того, что ровно 6 из них красного цвета?

1.2. Бросают две игральные кости. Найти вероятность того, что произведение числа очков не превосходит 6.

1.3. Из коробки, содержащей 4 пронумерованных жетона, вынимают один за другим все находящиеся в ней жетоны и укладывают рядом. Найти вероятность того, что номера вынутых жетонов будут идти по порядку.

1.4. Четыре зенитных пулемета ведут огонь по трем самолетам. Каждый пулемет выбирает объект обстрела наугад. Найти вероятность того, что все четыре пулемета ведут огонь по одному и тому же самолету.

2.1. На отрезке L длиной 20 см помещен меньший отрезок l длиной 10 см. Найти вероятность того, что точка, наудачу поставленная на больший отрезок, попадет на меньший отрезок.

Ко всем вариантам.

Вариант 5

1.1. В пакете находятся фрукты: 8 яблок и 10 груш. Из пакета случайным образом извлекают 6 фруктов. Какова вероятность того, что среди них 2 яблока и 4 груши?

1.2. Бросают две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма очков, выпавших на верхних гранях, больше 8.

1.3. На 5 карточках разрезной азбуки изображены буквы Е, Е, Л, П, П. Ребенок случайным образом выкладывает их в ряд. Какова вероятность того, что у него получится слово ПЕПЕЛ?

1.4. Цифровой замок содержит на общей оси 4 диска, каждый из которых разделен на 6 секторов, отмеченных цифрами. Замок может быть открыт только в том случае, когда диски занимают определенное положение относительно его корпуса и, следовательно, цифры образуют определенную комбинацию, составляющую «секрет» замка. Какова вероятность открыть замок, установив правильную комбинацию цифр?

2.1. После артобстрела связь со штабом прервалась на участке между 20-м и 50-м километрами телефонной линии. Какова вероятность того, что обрыв кабеля произошел между 30-м и 35-м километрами линии?

[Ко всем вариантам.](#)

← →

Вариант 6

1.1. В спортивном зале находились 20 гирь, среди которых 12 – по 16 кг и 8 – по 32 кг. На урок физкультуры случайным образом взяты 8 гирь. Какова вероятность того, что ровно 5 из них – по 16 кг?

1.2. Бросают две игральные кости. Найти вероятность того, что абсолютная величина разности выпавших очков равна 2.

1.3. Четырехтомное собрание сочинений Н.В. Гоголя расположено на полке в случайном порядке. Какова вероятность того, что тома стоят по порядку номеров?

1.4. Общество из 10 человек садится на скамейку. Найти вероятность того, что два определенных лица окажутся рядом.

2.1. В круг вписан квадрат. В круг наудачу бросается точка. Какова вероятность того, что точка попадет в квадрат?

[Ко всем вариантам.](#)

← →

Вариант 7

1.1. В партии из 50 изделий 5 бракованных. Из партии выбирают наугад 6 изделий. Найти вероятность того, что из шести изделий два окажутся бракованными.

1.2. Бросают две игральные кости. Найти вероятность того, что на верхних гранях появятся одно четное, а другое нечетное число очков.

1.3. Даны 6 карточек с буквами Н, М, И, Я, Л, О. Найти вероятность того, что получится слово ЛОМ, если наугад одна за другой выбираются три карточки.

1.4. Шесть шаров случайным образом размещаются по шести ящикам. Найти вероятность того, что каждый ящик будет занят.

2.1. На отрезке AB длиной 3 случайно появляется точка C. Определить вероятность того, что расстояние от точки C до B превосходит 1.

Ко всем вариантам.

Вариант 8

1.1. В партии из 20 радиоприемников имеются 5 неисправных. Для проверки наугад отбираются 3 радиоприемника. Найти вероятность того, что в число выбранных войдут один неисправный и два исправных радиоприемника.

1.2. Бросают две игральные кости. Найти вероятность того, что на верхних гранях выпадет только четное число очков.

1.3. В книге 500 страниц. Найти вероятность того, что наугад открытая страница будет содержать номер, кратный 7.

1.4. В филателистическом магазине предлагаются для продажи 50 почтовых марок, 10 из которых являются редкими. Покупатель, плохо разбирающийся в филателии, приобретает 5 понравившихся ему марок. Какова вероятность того, что среди приобретенных марок нет ни одной редкой?

2.1. Внутрь круга радиусом 4 наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг правильного треугольника.

[Ко всем вариантам.](#)

← →

Вариант 9

1.1. Зеленхоз отправил на продажу в цветочный магазин 50 гвоздик. Из них 30 – красного цвета, 20 – белого. Покупатель наудачу купил 5 цветков. Какова вероятность того, что ровно 3 из них будут красного цвета?

1.2. Подбрасываются два игральных кубика, подсчитывается сумма очков на верхних гранях. Найти вероятность события, состоящего в том, что на верхних гранях кубиков в сумме будет меньше 9 очков.

1.3. 32 буквы русского алфавита написаны на карточках разрезной азбуки. 5 карточек вынимаются одна за другой и укладываются на стол в порядке появления. Найти вероятность того, что получится слово ПЕСОК.

1.4. Наудачу взятый телефонный номер состоит из 5 цифр. Найти вероятность того, что все цифры этого номера кратны 3.

2.1. Два приятеля независимо друг от друга имеют равную вероятность прийти в метро с 15 до 16 часов. Найти вероятность того, что ожидание одним другого будет меньше 10 минут.

Ко всем вариантам.

Вариант 10

1.1. Родители пришли в супермаркет купить детям подарки к Рождеству, но они еще не определились в выборе. Продавец ставит перед ними 8 коробок, в пяти из которых находится игра «Бильярд», а в трех оставшихся – конструктор. Родители берут наудачу три коробки. Какова вероятность того, что они купят ровно два конструктора?

1.2. Подбрасываются два игральных кубика, подсчитывается число очков в сумме на верхних гранях. Что вероятнее – получить в сумме 7 или 8?

1.3. При наборе телефонного номера абонент забыл две последние цифры и набрал их наудачу, помня только, что эти цифры нечетные и разные. Найти вероятность того, что номер набран правильно.

1.4. На девяти карточках написаны цифры 1, 2, …, 9. Карточки раскладываются на столе случайным образом в одну линию. Какова вероятность того, что между карточками с номерами 1 и 2 будут находиться ровно три другие карточки?

2.1. Внутрь круга радиусом 6 наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг правильного шестиугольника.

Ко всем вариантам.

Вариант 11

1.1. На прием к врачу пришли 15 больных. Шестерым из них доктор поставил диагноз «грипп», остальным – ОРВИ. Какова вероятность того, что в группе из 7 случайно выбранных больных ровно двоим был поставлен диагноз «грипп»?

1.2. Бросают две игральные кости. Найти вероятность того, что на верхних гранях появятся нечетные числа.

1.3. Какова вероятность того, что наудачу вырванный листок из нового календаря 2005 года соответствует первому числу месяца?

1.4. Какова вероятность того, что в наугад взятом марте 4 субботы?

2.1. Студент и студентка договорились о встрече между 18 и 19 часами, причем каждый из них приходит к месту встречи случайным образом и ждет другого не более 15 минут. Найти вероятность того, что встреча состоится.

Ко всем вариантам.

← →

Вариант 12

1.1. На подарки к Новому году куплены 11 плиток шоколада, причем 7 из них – пористый шоколад, 4 – с начинкой. Какова вероятность того, что из наудачу выбранных 5 плиток ровно 2 плитки окажутся пористым шоколадом?

1.2. Бросают две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма очков, выпавших на верхних гранях, меньше 7.

1.3. Телефонный номер состоит из шести цифр. Найти вероятность того, что все цифры различны.

1.4. На шахматную доску из 64 клеток ставят наудачу 2 ладьи белого и черного цветов. С какой вероятностью они будут «бить» друг друга?

2.1. На отрезке [0; 5] случайно выбирается точка. Найти вероятность того, что расстояние от нее до правого конца отрезка не превосходит 1,6 единиц.

Ко всем вариантам.

Вариант 13

1.1. К концу дня в магазине осталось 60 арбузов, из которых – 50 спелых. Покупатель выбирает 5 арбузов. Какова вероятность того, что ровно два из них – спелые?

1.2. Бросают две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма очков, выпавших на верхних гранях, меньше 10.

1.3. В коробке 6 одинаковых пронумерованных кубиков. Найти вероятность того, что при извлечении по одному всех шести кубиков их номера появятся в возрастающем порядке.

1.4. Шары, занумерованные цифрами 0, 1, 2, …, 9, помещены наугад в 10 расположенных вдоль одной прямой лунок – по одному шару в каждую лунку. Определить вероятность того, что между шарами с номерами 1 и 2 будут находиться ровно 2 других шара.

2.1. Найти вероятность того, что точка, наугад брошенная в шар, попадет в вписанный в него куб.

[Ко всем вариантам.](#)

← →

Вариант 14

1.1. Мама купила ребенку 10 надувных шариков, 3 из которых – синего цвета, остальные – желтого. Ребенок берет наудачу 5 шариков и надувает их. Какова вероятность того, что среди надутых шариков ровно 3 желтого цвета?

1.2. Бросают две игральные кости. Найти вероятность того, что на верхних гранях одно число будет на единицу больше другого.

1.3. Экзаменационные билеты занумерованы числами от 1 до 35. Какова вероятность того, что номер выбранного билета четный?

1.4. При перевозке ящика, в котором содержались 21 стандартная и 10 нестандартных деталей, утеряна одна деталь. Деталь, наудачу извлеченная из ящика после перевозки, оказалась стандартной. Найти вероятность того, что была утеряна нестандартная деталь.

2.1. В круг вписан правильный треугольник. Какова вероятность того, что точка, наудачу поставленная в круг, окажется вне треугольника.

[Ко всем вариантам.](#)

← →

Вариант 15

1.1. На складе хранятся в нерассортированном виде 20 изделий первого сорта и 10 – второго. Найти вероятность того, что среди взятых наудачу 5 изделий 2 будут второго сорта.

1.2. Бросают две игральные кости. Найти вероятность того, что произведение очков, выпавших на верхних гранях, больше 6.

1.3. Наугад взятый телефонный номер состоит из пяти цифр. Найти вероятность того, что в нем все цифры нечетные.

1.4. Найти вероятность того, что абонент наберет правильно двузначный номер, если он знает, что данный номер не делится на пять.

2.1. Двое друзей условились встретиться в определенном месте между 12 и 13 часами. Пришедший первым ждет второго в течение 15 минут, после чего уходит. Определить вероятность встречи друзей, если моменты их прихода в указанном промежутке времени равновозможны.

Ко всем вариантам.

← →

Вариант 16

1.1. На складе находилось 20 ящиков яблок, причем в 12 ящиках были яблоки зеленого цвета и в 8 ящиках красного. Наудачу взяли 7 ящиков и отвезли в магазин на продажу. Какова вероятность того, что ровно в 4 ящиках яблоки зеленого цвета?

1.2. Участники жеребьевки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 100. Найти вероятность того, что номер первого наудачу извлеченного жетона не содержит цифры 5.

1.3. Из 9 жетонов, занумерованных разными однозначными цифрами, выбирается 3. Найти вероятность того, что последовательная запись их номеров покажет возрастание значений цифр.

1.4. Наудачу выбранный номер состоит из 7 цифр. Определить вероятность того, что все цифры в нем различны.

2.1. В квадрат с вершинами в точках O (0; 0), K (0; 1), L (1; 1), M (1; 0) наудачу брошена точка (x; y). Найти вероятность того, что координаты этой точки удовлетворяют неравенству $\text{[illegible]} \geq \frac{\text{[illegible]}}{2}$.

[Ко всем вариантам.](#)

← →

Вариант 17

1.1. Из партии втулок, изготовленных за смену токарем, случайным образом отбирается для контроля 10 штук. Найти вероятность того, что среди отобранных втулок 2 – второго сорта, если во всей партии 25 втулок первого сорта и 5 – второго.

1.2. В первом ящике находятся шары с номерами от 1 до 5, а во втором – с номерами от 6 до 10. Из каждого ящика вынули по одному шару. Какова вероятность того, что сумма номеров вынутых шаров не меньше 7?

1.3. Пусть 5 человек размещены случайным образом за круглым столом. Какова вероятность того, что два определенных человека окажутся рядом?

1.4. Наудачу взятый телефонный номер состоит из 7 цифр. Найти вероятность того, что все цифры этого номера нечетные.

2.1. В шар вписан куб. Точка наудачу зафиксирована в шаре. Найти вероятность того, что точка попадет в куб.

Ко всем вариантам.

←　　　→

Вариант 18

1.1. В группе спортсменов 7 лыжников и 3 конькобежца. Из нее случайным образом выделены 3 спортсмена. Найти вероятность того, что из выбранных спортсменов двое окажутся лыжниками.

1.2. Все натуральные числа от 1 до 30 записаны на одинаковых карточках и помещены в урну. После тщательного перемешивания карточек из урны извлекается одна карточка. Какова вероятность того, что число на взятой карточке окажется кратным 5?

1.3. В коробке 5 синих, 4 красных и 3 зеленых карандаша. Наудачу вынимают 3 карандаша. Найти вероятность того, что все они одного цвета.

1.4. Наудачу набранный номер состоит из 5 цифр. Определить вероятность того, что все цифры в нем различны.

2.1. На отрезке [0; 2] наудачу выбраны два числа x и y. Найти вероятность того, что эти числа удовлетворяют неравенству [illegible] ≤ 4[illegible] ≤ 4[illegible]

Ко всем вариантам.

Вариант 19

1.1. В урне 3 белых и 7 черных шаров. Какова вероятность того, что извлеченные наугад два шара окажутся черными?

1.2. В первом ящике находятся шары с номерами от 6 до 10, а во втором – с номерами от 1 до 6. Из каждого ящика вынули по одному шару. Какова вероятность того, что сумма номеров вынутых шаров не меньше девяти?

1.3. Наудачу выбрано натуральное число, не превосходящее 30. Какова вероятность того, что число кратно 3?

1.4. В лифт 9-этажного дома вошли 4 человека. Каждый из них независимо друг от друга может выйти на любом (начиная со второго) этаже. Какова вероятность того, что все вышли на разных этажах?

2.1. Внутри круга радиуса 15 см проведена окружность радиуса 10 см. Найти вероятность того, что точка, взятая наудачу внутри большого круга, окажется лежащей вне малого круга.

Ко всем вариантам.

Вариант 20

1.1. В мастерскую для ремонта поступило 20 телевизоров. Известно, что 7 из них нуждаются в настройке. Мастер берет любые 5 телевизоров. Какова вероятность того, что 2 из них нуждаются в настройке?

1.2. Загадано двузначное число. С какой вероятностью это наугад загаданное число будет кратно шести?

1.3. Найти вероятность того, что абонент наберет правильный двузначный номер, если он знает, что данный номер не делится на пять.

1.4. Какова вероятность того, что наудачу вырванный листок из нового календаря соответствует первому числу месяца? (Год считается не високосным).

2.1. В круг радиуса R помещен круг радиуса r. Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в больший круг, попадет также и в малый круг.

Ко всем вариантам.

Вариант 21

1.1. В партии, состоящей из 20 радиоприемников, 5 неисправных. Наугад берут 3 радиоприемника. Какова вероятность того, что в число выбранных войдут 1 неисправный и 2 исправных радиоприемника?

1.2. Загадано двузначное число. С какой вероятностью это наугад загаданное число будет простым?

1.3. Из шести одинаковых карточек разрезной азбуки: А, Е, М, Н, О, Р наудачу выбирают четыре карточки и складывают их в ряд в порядке извлечения. Какова вероятность получить при этом слово МОРЕ?

1.4. Шесть человек сдали в гардероб свои пальто. Гардеробщица выдала всем номерки наугад. Найти вероятность того, что она выдаст каждому его собственное пальто.

2.1. В прямоугольник $KLMN$, где $K(-1;\,0)$, $L(-1;\,5)$, $M(2;\,5)$, $N(2;\,0)$, брошена точка. Какова вероятность того, что ее координаты $(x;\; y)$ удовлетворяют неравенству [illegible]+ 1 ≤ [illegible]≤ [illegible]+ 3?

Ко всем вариантам.

Вариант 22

1.1. В магазине из 100 пар зимних сапог одного фасона 10 пар коричневого цвета, а остальные – черного. Произвольно отбирают 8 пар сапог. Какова вероятность того, что из выбранных сапог две пары черного цвета, а остальные – коричневого?

1.2. Загадано трехзначное число. С какой вероятностью это наугад загаданное число будет содержать одинаковые числа?

1.3. Найти вероятность того, что в декабре наудачу взятого года 4 воскресенья.

1.4. Какова вероятность того, что наудачу вырванный листок из нового календаря соответствует тринадцатому числу месяца, если год считается високосным?

2.1. Дуэли в некотором городе редко кончаются печальным исходом. Дело в том, что каждый дуэлянт прибывает на место встречи между 5 и 6 часами утра, и, прождав соперника 5 минут, удаляется. В случае же прибытия последнего в эти 5 минут дуэль состоится. Какая часть дуэлей действительно заканчивается поединком?

Ко всем вариантам.

← →

Вариант 23

1.1. Собрание, на котором присутствует 25 человек, в том числе 7 женщин, выбирает делегацию из 5 человек. Найти вероятность того, что в делегацию войдут три женщины.

1.2. Загадано двузначное число. С какой вероятностью это наугад загаданное число будет содержать разные цифры?

1.3. Наудачу взятый телефонный номер состоит из 5 цифр. Найти вероятность того, что все цифры этого номера кратны 3.

1.4. В лифт 7-этажного дома вошли пять человек. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом из этажей, начиная со второго. Найти вероятность того, что все пассажиры выйдут на пятом этаже.

2.1. Найти вероятность того, что точка, появляющаяся произвольным образом в кубе, окажется внутри вписанного в этот куб шара.

[Ко всем вариантам.](#)

← →

Вариант 24

1.1. Среди 20 студентов группы, в которой 10 девушек, разыгрываются 5 билетов в театр. Найти вероятность того, что среди обладателей билетов окажутся 3 девушки.

1.2. Загадано двузначное число. С какой вероятностью это наугад загаданное число будет содержать одинаковые числа?

1.3. Найти вероятность того, что дни рождения 12 человек не придутся на разные месяцы года.

1.4. Код сейфа состоит из 5 цифр от 0 до 9. Клиент забыл последние 2 цифры и набрал их наугад, помня, что они различны. Какова вероятность открыть сейф?

2.1. На плоскости начерчены две концентрические окружности, радиусы которых соответственно равны 5 и 7 см. Найти вероятность того, что точка, брошенная наудачу в больший круг, попадет в кольцо.

[Ко всем вариантам.](#)

← →

Вариант 25

1.1. На полке стоят 12 учебников, из них 7 по математике. Взяты наудачу 5 учебников. Какова вероятность того, что среди них три учебника по математике?

1.2. В первом ящике находятся шары с номерами от 1 до 5, а во втором – с номерами от 6 до 10. Из каждого ящика вынули по одному шару. Какова вероятность того, что сумма номеров вынутых шаров не больше 11?

1.3. В лифт 9-этажного дома вошли 4 человека. Каждый из них независимо друг от друга может выйти на любом (начиная со второго) этаже. Какова вероятность того, что все вышли на одном этаже?

1.4. Наудачу набранный номер состоит из 5 цифр. Определить вероятность того, что все цифры в нем одинаковые.

2.1. В квадрат с вершинами в точках A (0; 0), B (1; 0), C (1; 1), D (0; 1) наугад брошена точка. Найти вероятность того, что её координаты (x; y) удовлетворяют неравенствам $\frac{1}{2}$ [illegible] $<$ [illegible] $<$ [illegible] .

Ко всем вариантам.

Вариант 26

1.1. В партии готовой продукции из 10 изделий имеется 7 изделий повышенного качества. Наудачу выбирается 6 изделий. Какова вероятность того, что 4 из них будут повышенного качества?

1.2. Подбрасываются два игральных кубика, подсчитывается число очков в сумме на верхних гранях. Что вероятнее – получить в сумме 6 или 7?

1.3. В забеге участвуют 5 спортсменов: А, Б, В, Г, Д, каждый из которых имеет одинаковый шанс на успех. Какова вероятность того, что первые три места соответственно займут бегуны А, Б, В?

1.4. Десять шаров с цифрами от 0 до 9 помещают случайным образом в 10 расположенных вдоль окружности лунок – по одному шару в каждую лунку. Определить вероятность того, что между шарами с номерами 1 и 2 будут находиться ровно четыре других шара.

2.1. Относительная частота работников офиса, имеющих высшую квалификацию, равна 0,25. Определить число работников, имеющих высшую квалификацию в данном офисе, если всего в нём работает 100 человек.

[Ко всем вариантам.](#)

Вариант 27

1.1. В партии из 8 деталей имеется 6 стандартных. Какова вероятность того, что среди пяти взятых наугад деталей ровно три стандартных?

1.2. Бросают две игральные кости. Найти вероятность того, что абсолютная величина разности выпавших очков равна 3.

1.3. На отдельных одинаковых карточках написаны цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Все девять карточек перемешивают, после чего наугад берут четыре карточки и раскладывают их в порядке появления. Какова вероятность того, что получится четное число?

1.4. В барабане револьвера 7 гнезд, из них в 5 заложены патроны. Барабан приводится во вращение, потом нажимается спусковой курок. Какова вероятность того, что, повторив такой опыт 3 раза подряд, револьвер один раз дает осечку?

2.1. Относительная частота работников предприятия, имеющих высшее образование, равна 0,15. Определить число работников, имеющих высшее образование, если всего на предприятии работает 40 человек.

[Ко всем вариантам.](#)

← →

Вариант 28

1.1. В группе из 15 человек 6 занимаются спортом. Найти вероятность того, что из случайно отобранных 7 человек 5 занимаются спортом.

1.2. Подбрасываются два игральных кубика и отмечается число очков на верхней грани каждого кубика. Найти вероятность того, что на обеих гранях выпадет разное число очков.

1.3. Десять различных книг расставляют наудачу на одной полке. Найти вероятность того, что три определенные книги окажутся поставленные рядом.

1.4. Производственно-торговая фирма решила на одном из стеллажей витрины выставить предлагаемую ими продукцию типов А, Б, В, Г и Д, расположив ее случайным образом. Какова вероятность того, что продукция типов А и Г окажется рядом?

2.1. Из 100 посаженных семян проросло 78. Какова статистическая вероятность прорастания семян?

[Ко всем вариантам.]

Вариант 29

1.1. В организации работают 12 мужчин и 8 женщин. Для них выделены 3 премии. Найти вероятность того, что премию получат двое мужчин и одна женщина.

1.2. Какова вероятность того, что произведение очков, выпавших на двух игральных костях, – нечетное число?

1.3. Слово составлено из карточек, на каждой из которых написана одна из букв О, Б, С, Т, Ы, Е, И. Затем карточки смешивают и вынимают одну за другой. Найти вероятность того, что получится слово СОБЫТИЕ.

1.4. На девяти карточках написаны цифры 1, 2, …, 9. Карточки раскладываются на столе случайным образом в одну линию. Какова вероятность того, что между карточками с номерами 3 и 4 будут находиться ровно три другие карточки?

2.1. Среди 250 деталей, изготовленных на автоматическом станке, оказалось 5, не отвечающих стандарту. Определить относительную частоту появления деталей, не отвечающих стандарту.

Ко всем вариантам.

← →

Вариант 30

1.1. В магазине имеется в продаже 20 пар обуви, из которых 7 пар 43 размера. Найти вероятность того, что из восьми покупателей трое выберут обувь 43 размера.

1.2. Бросают две игральные кости. Найти вероятность того, что на верхних гранях появятся четные числа.

1.3. Из 50 вопросов, входящих в экзаменационные билеты, студент знает 40. Найти вероятность того, что среди трех наугад выбранных вопросов студент не знает ни одного из них.

1.4. Наудачу взятый телефонный номер состоит из 6 цифр. Найти вероятность того, что все цифры этого номера четные.

2.1. Среди 5000 взятых наудачу деталей оказалось 32 бракованные. Найти относительную частоту бракованных изделий в данной партии.

Ко всем вариантам.

Контрольные вопросы

1. Что называют перестановками? По какой формуле вычисляют число перестановок из n элементов?
2. Что называют размещениями? По какой формуле вычисляют число размещений из n различных элементов по k элементов?
3. Что называют сочетаниями? По какой формуле вычисляют число сочетаний из n элементов по k элементов?
4. Чем сочетания отличаются от размещений?
5. Какое событие в данном опыте называют: а) достоверным; б) невозможным; в) случайным?
6. Какие события в данном опыте называют: а) совместными; б) несовместными?
7. Какие события в данном опыте называют противоположными? Какие события в данном опыте считают равновозможными?
8. Каково определение классической вероятности? Чему равна вероятность достоверного события? Чему равна вероятность невозможного события?
9. В каких пределах заключена вероятность случайного события?
10. Что называют относительной частотой события? Каково определение статистической вероятности?

ЛАБОРАТОРНО-ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 2

ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ НЕЗАВИСИМЫХ СОБЫТИЙ

Цель работы:

- изучение действий над случайными событиями;
- ознакомление с различными методами вычисления вероятностей событий с использованием теорем сложения и умножения вероятностей независимых событий.

Краткие теоретические сведения

Событие A называется ***независимым*** от события B, если вероятность события A не зависит от того, произошло событие B или не произошло.

Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению их вероятностей:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B). \qquad (2.1)$$

Если A и B – независимые события, то независимы также события: $\bar{A}$ и B, A и $\bar{B}$, $\bar{A}$ и $\bar{B}$.

Если события A и B являются несовместными, то

$$P(A+B) = P(A) + P(B). \qquad (2.2)$$

Если события A и B являются совместными, то

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) \qquad (2.3)$$

События $A_1, A_2, \dots, A_n$ называются *попарно независимыми*, если любая их пара независима, т. е.

$$P(A_i A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j),\ i \neq j,\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}.$$

События $A_1, A_2, \dots, A_n$ называются *независимыми в совокупности*, если при любом выборе k различных событий $(k = \overline{1, n-1})$ $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}$ из данной совокупности выполняется равенство

$$P(A_{i_1} \cdot A_{i_2} \cdot \ldots \cdot A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k}).$$

Например, если события A, B и C независимы в совокупности, то независимы события A и B, B и C, A и C, B и AC, A и BC, C и AB.

Из независимости событий в совокупности следует их попарная независимость. Однако попарная независимость событий не гарантирует их независимости в совокупности.

Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимы в совокупности, то верны равенства

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n) \qquad (2.4)$$

и

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot \ldots \cdot P(\bar{A}_n). \qquad (2.5)$$

Решение типовых заданий

Задание 1

Задание 2

Задание 3

Задание 1. Имеется 2 урны, в первой – 2 белых и 3 черных шара, во второй – 4 белых и 2 черных шара. Из каждой урны вынимается по одному шару. Найти вероятность того, что они будут одного и того же цвета.

Решение. Рассмотрим событие A – оба шара одного цвета – как сумму двух событий, то есть $A = A_1 + A_2$, где A_1 – оба шара белые, A_2 – оба шара черные. При этом событие A_1 можно представить как произведение двух независимых событий B_1 и B_2, где Bi – из i-й урны вынут белый шар (i=1,2), то есть $A_1 = B_1 \cdot B_2$. Аналогично, $A_2 = C_1 \cdot C_2$, где события Ci – из i-й урны вынут черный шар (i=1,2), также являются независимыми. Применяя правило умножения вероятностей двух независимых событий (2.1), получим следующее:

$$P(A_1) = P(B_1 \cdot B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{6} = \frac{4}{15};$$

$$P(A_2) = P(C_1 \cdot C_2) = P(C_1) \cdot P(C_2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{5}.$$

Так как события A_1 и A_2 несовместны, то применим правило сложения вероятностей (2.3):

$$P(A) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{4}{15} + \frac{1}{5} = \frac{7}{15}.$$

Ответ: $\frac{7}{15}$.

Задание 2. Вероятность того, что будет снег, равна 0,7, а того, что будет дождь – 0,35. Определить вероятность осадков, если вероятность дождя со снегом равна 0,15.

Решение. Рассмотрим следующие события: A – будет снег; B – будет дождь. Тогда событие AB – будет снег с дождем, а событие $A + B$ – будет либо дождь, либо снег, либо то и другое одновременно, т. е. будут осадки. Так как A и B – совместные события, $P(AB) \neq 0$, поэтому применим формулу (2.3) и получим $P(A + B) = 0{,}7 + 0{,}35 - 0{,}15 = 0{,}9$.

Ответ: 0,9.

Задание 3. Добавить разобранный пример на применение формул (2.4) и (2.5).

Практическое задание

Задания 1.1-1.2. Найти вероятности событий, используя теоремы сложения и умножения вероятностей независимых событий.

Задания 2. Добавить задание на замыкание электрической цепи.

Вариант 1

1.1. В блок входят три радиолампы. Вероятности выхода из строя в течение гарантийного срока для них соответственно равны: 0,3; 0,2; 0,4. Какова вероятность того, что в течение гарантийного срока выйдут из строя:

а) не менее двух радиоламп;

б) ни одной радиолампы;

в) хотя бы одна радиолампа?

1.2. У выходной двери висят 2 зонта – черного и коричневого цветов. Каждое утро перед выходом на улицу хозяин берет с собой один из зонтов: черный – с вероятностью 0,7, коричневый с вероятностью 0,3. Какова вероятность того, что за три выхода из дома хозяин брал с собой черный зонт ровно 2 раза?

Ко всем вариантам.

Вариант 2

1.1. В первом ящике имеется 20 деталей, из них 15 стандартных; во втором ящике – 30 деталей, из них 25стандартных. Из каждого ящика наугад берут по одной детали. Какова вероятность того, что:

а) обе детали будут стандартными;

б) хотя бы одна деталь стандартная;

в) обе детали нестандартные?

1.2. Турбюро организовывает ежедневные экскурсии по Минску. Каждый из троих осмотревших достопримечательности Минска экскурсантов независимо от остальных либо благодарит экскурсовода с вероятностью 0,2, либо молча уходит с вероятностью 0,8. Какова вероятность того, что ровно 2 экскурсанта из трех ушли молча?

Ко всем вариантам.

Вариант 3

1.1. Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,9, вторым – 0,7. Оба стрелка сделали по одному выстрелу. Какова вероятность того, что цель поражена:

а) ровно один раз;

б) два раза;

в) хотя бы один раз?

1.2. В трех цветочных горшках посажены три цветка, которые могут прижиться с вероятностями 0,7; 0,8 и 0,6 соответственно. Какова вероятность того, что приживутся ровно 2 цветка?

Ко всем вариантам.

Вариант 4

1.1. При одном цикле обзора радиолокационных станций, следящих за космическим кораблем, вероятности его обнаружения соответственно равны 0,7; 0,8; 0,9. Найти вероятность того, что при одном цикле обзора корабль будет обнаружен:

а) тремя станциями;

б) не менее, чем двумя станциями;

в) ни одной станцией.

1.2. В городе находятся две фирмы, оказывающие юридические услуги. Некоторое предприятие при необходимости прибегает к услугам либо первой (вероятность этого события 0,6), либо второй фирмы (вероятность этого события 0,4). Предприятие обратилось за помощью три раза. Какова вероятность того, что ровно 2 из них оно имело дело с первой фирмой?

Ко всем вариантам.

Вариант 5

1.1. Вычислительная машина состоит из четырех блоков. Вероятность безотказной работы в течение времени T первого блока равна 0,4, второго – 0,5, третьего – 0,6, четвертого – 0,4. Найти вероятность того, что в течение времени T проработают:

а) все четыре блока;

б) три блока;

в) не менее трех блоков.

1.2. В отдел маркетинга в течение часа звонят 3 клиента. Первый клиент дозванивается с вероятностью 0,8, для второго и третьего эти вероятности соответственно равны 0,9 и 0,7. Каждый клиент сделал по одному звонку. Какова вероятность того, что дозвонится ровно один клиент?

Ко всем вариантам.

← →

Вариант 6

1.1. Трое рабочих собирают подшипники. Вероятность того, что подшипник, собранный первым рабочим, – высшего качества, равна 0,7, вторым – 0,8, третьим – 0,6. Для контроля взято по одному подшипнику из собранных каждым рабочим. Какова вероятность того, что высшего качества будут:

а) все подшипники;

б) два подшипника;

в) хотя бы один подшипник?

1.2. Студент хранит книги на столе и книжной полке. Когда он собирается взять очередную книгу, то берет ее со стола или с книжной полки с вероятностями 0,3 и 0,7 соответственно. Студент взял три книги (некоторые, возможно, из одного и того же места, причем при повторном взятии книги указанные вероятности не меняются). Какова вероятность того, что ровно две из них взяты с книжной полки?

Ко всем вариантам.

Вариант 7

1.1. На сборку поступают детали с трех станков с ЧПУ. Первый станок дает 20%, второй – 30 %, третий – 50% однотипных деталей, поступающих на сборку. Найти вероятность того, что из трех наугад взятых деталей:

а) три с разных станков;

б) три с третьего станка;

в) две с третьего станка.

1.2. Студент во время сессии может получить неудовлетворительную оценку по высшей математике с вероятностью 0,2, по физике с вероятностью 0,3 и по истории с вероятностью 0,1. Какова вероятность того, что студент не сдаст ровно один экзамен?

Ко всем вариантам.

Вариант 8

1.1. Первый станок-автомат дает 1 % брака, второй – 1,5%, а третий – 2 %. Случайным образом отобрали по одной детали с каждого станка. Какова вероятность того, что стандартными окажутся:

а) три детали;

б) две детали;

в) хотя бы одна деталь?

1.2. Имеются три партии деталей: в первой партии бракованные детали составляют 5% от общего числа, во второй – 3 %, в третьей – 4 %. Из каждой партии берут для контроля по одной детали. Какова вероятность того, что среди взятых деталей ровно одна бракованная?

Ко всем вариантам.

Вариант 9

1.1. В цехе имеется три резервных электродвигателя. Для каждого из них вероятности того, что в данный момент он включен, соответственно равны 0,2; 0,3; 0,1. Найти вероятность того, что включены:

а) два электродвигателя;

б) три электродвигателя;

в) хотя бы один электродвигатель.

1.2. Машинистка отпечатала 3 экземпляра литературного произведения. В первом экземпляре листы с ошибками составляют 2 %, во втором – 3%, в третьем – 5 % от общего числа. Какова вероятность того, что литератор, взявший по одному листу из каждого экземпляра, обнаружит хотя бы один с ошибками?

Ко всем вариантам.

Вариант 10

1.1. На участке кросса для мотоциклиста имеются три препятствия. Вероятность успешного прохождения первого препятствия равна 0,4, второго – 0,5, третьего – 0,6. Найти вероятность успешного прохождения:

а) трех препятствий;

б) не менее двух препятствий;

в) двух препятствий.

1.2. Некоторое устройство состоит из четырёх блоков, причем надежности (т.е вероятности безотказной работы в течение какого-то промежутка времени T) этих блоков соответственно равны 0,8; 0,7; 0,9 и 0,5. Какова вероятность того, что за промежуток времени T откажет ровно один блок?

[Ко всем вариантам.](#)

← →

Вариант 11

1.1. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,9, второй – 0,7, третий – 0,6. Вычислить вероятность того, что студент сдаст:

а) два экзамена;

б) не менее двух экзаменов;

в) не более двух экзаменов.

1.2. Коммивояжер поочередно посетил ровно по одному разу четыре предприятия города, предлагая свою продукцию. Если его продукция вызывает интерес, то с ним заключают контракт, в противном случае ему вежливо отказывают. Продукция коммивояжера может заинтересовать руководство указанных предприятий с вероятностями 0,1; 0,2; 0,15 и 0,08 соответственно. Какова вероятность заключения контракта не менее одного раза?

Ко всем вариантам.

Вариант 12

1.1. Самолет противника обнаруживается тремя радиолокаторами с вероятностями 0,8; 0,7; 0,5 соответственно. Какова вероятность обнаружения самолета:

а) одним радиолокатором;

б) двумя радиолокаторами;

в) хотя бы одним радиолокатором?

1.2. В магазин поступило 3 партии трикотажных изделий. В первой партии брак составлял 0,5 %, во второй – 0,1 % и в третьей – 0,05%. Из каждой партии наудачу берут по одному изделию. Какова вероятность того, что среди взятых изделий не менее одного окажется с браком?

[Ко всем вариантам.](#)

← →

Вариант 13

1.1. Два бомбардировщика преодолевают зону ПВО. Вероятность того, что будет сбит первый бомбардировщик, равна 0,7, второй – 0,8. Найти вероятность:

а) уничтожения одного бомбардировщика;

б) поражения двух бомбардировщиков;

в) всех промахов.

1.2. Три гроссмейстера играют в шахматы против одного и того же виртуального противника. Первый гроссмейстер выигрывает у этого противника с вероятностью 0,4, второй – с вероятностью 0,8, а третий – с вероятностью 0,6 .Каждый сыграл по одной партии. Какова вероятность того, что гроссмейстеры в совокупности выиграли не менее двух партий?

[Ко всем вариантам.](#)

← →

Вариант 14

1.1. Стрелок произвел четыре выстрела по удаляющейся от него цели, причем вероятность попадания в цель в начале стрельбы равна 0,7, а после каждого выстрела уменьшается на 0,1. Вычислить вероятность того, что цель будет поражена:

а) четыре раза;

б) три раза;

в) не менее трех раз.

1.2. Четыре стрелка делают по одному выстрелу (каждый по своей мишени). За один выстрел первый стрелок поражает мишень с вероятностью 0,2, второй – с вероятностью 0,5, третий – с вероятностью 0,6, четвертый – с вероятностью 0,4. Какова вероятность того, что суммарно окажется не более двух попаданий?

[Ко всем вариантам.](#)

Вариант 15

1.1. Первый рабочий изготавливает 40 % изделий второго сорта, а второй – 30%. У каждого рабочего взято наугад по два изделия. Какова вероятность того, что:

а) все четыре изделия второго сорта;

б) хотя бы три изделия второго сорта;

в) хотя бы одно изделие второго сорта?

1.2. Студент разыскивает нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятности того, что формула содержится в первом, втором и третьем справочниках, соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятность того, что формула содержится хотя бы в одном справочнике.

Ко всем вариантам.

Вариант 16

1.1. При некоторых определенных условиях вероятность сбить самолет противника из первого зенитного орудия равна 0,4, из второго – 0,5. Сделано по одному выстрелу. Найти вероятность того, что:

а) самолет уничтожен двумя снарядами;

б) самолет поражен хотя бы одним снарядом;

в) ни один снаряд не попал в цель.

1.2. Вероятность выигрыша по лотерейному билету равна 0,1. Приобретено четыре билета. Какова вероятность выиграть хотя бы по одному из них?

Ко всем вариантам.

Вариант 17

1.1. Вероятность выигрыша по лотерейному билету первого выпуска равна 0,2, второго – 0,3. Имеется по два билета каждого выпуска. Найти вероятность того, что выиграют:

а) три билета;

б) не менее трех билетов;

в) менее трех билетов.

1.2. Круговая мишень состоит из трех зон. Вероятности попадания в эти зоны при одном выстреле соответственно равны 0,1; 0,35; 0,4. Найти вероятность попадания в первую или третью зоны.

[Ко всем вариантам.](#)

Вариант 18

1.1. Три команды спортивного общества А состязаются соответственно с тремя командами общества В. Вероятности выигрышей первой, второй и третьей команд из общества А у соответствующих команд из общества В равны: 0,7; 0,6; 0,4. Команды провели по одной встрече. Какова вероятность того, что команды общества А выиграют:

а)две встречи;

б) хотя бы две встречи;

в) три встречи?

1.2. В магазин вошли три покупателя. Вероятность того, что каждый что-нибудь купит, равна 0,3. Найти вероятность того, что хотя бы два покупателя совершат покупки.

Ко всем вариантам.

Вариант 19

1.1. Вероятность поражения цели первым стрелком при одном выстреле равна 0,7, вторым – 0,5. Найти вероятность того, что цель будет поражена:

а) двумя стрелками;

б) только одним стрелком;

в) хотя бы одним стрелком.

1.2. Вероятность хотя бы одного попадания в мишень при четырех выстрелах равна 0,9984. Найти вероятность попадания при одном выстреле?

[Ко всем вариантам.](#)

← →

Вариант 20

1.1. В коробках находятся детали: в первой – 20, из них 13 стандартных; во второй – 30, из них 26 стандартных. Из каждой коробки наугад берут по одной детали. Найти вероятность того, что:

а) обе детали окажутся нестандартными;

б) одна деталь нестандартная;

в) обе детали стандартные.

1.2. В трех залах кинотеатра идут три различных фильма. Вероятность того, что на определенный час в кассе первого зала есть билет, равна 0,3, в кассе второго зала – 0,2, а в кассе третьего зала – 0,4. Какова вероятность того, что на данный час имеется возможность купить билет хотя бы на один фильм?

Ко всем вариантам.

Вариант 21

1.1.Три станка работают независимо друг от друга. Вероятность того, что первый станок в течение смены выйдет из строя, равна 0,1 второй – 0,2 и третий – 0,3. Найти вероятность того, что в течение смены выйдут из строя:

а) не менее двух станков;

б) два станка;

в) три станка.

1.2. В течение года три фирмы могут обанкротиться с вероятностями соответственно 0,01; 0,02 и 0,04. Найти вероятность того, что в течение года не обанкротятся, по крайней мере, две фирмы.

Ко всем вариантам.

Вариант 22

1.1. В ящике 50% деталей, изготовленных на заводе I, 20% – на заводе II и 30 % – на заводе III. Наугад взято три детали. Найти вероятность того, что:

а) все три детали с завода I;

б) две детали с завода I;

в) все три детали с разных заводов.

1.2. Вероятность одного попадания в цель при одновременном залпе из двух орудий равна 0,44. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым орудием, если для второго орудия эта вероятность равна 0,8.

Ко всем вариантам.

Вариант 23

1.1. Для аварийной сигнализации установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сработает первый сигнализатор, равна 0 ,9, второй – 0,7. Найти вероятность того, что при аварии:

а) сработают оба сигнализатора;

б) не сработает ни один сигнализатор;

в) сработает хотя бы один сигнализатор.

1.2. Вероятность хотя бы одного попадания в мишень при трех выстрелах равна 0,784. Найти вероятность попадания при одном выстреле.

Ко всем вариантам.

Вариант 24

1.1. На двух станках обрабатываются однотипные детали. Появление бракованной детали для станка I составляет 3%, для станка II – 4%. С каждого станка взяли по одной детали. Найти вероятность того, что:

а) обе детали стандартные;

б) одна деталь стандартная;

в) обе детали нестандартные.

1.2. Для разрушения моста достаточно попадания хотя бы одной авиационной бомбы. Найти вероятность того , что мост будет разрушен, если на него будет сброшено 4 бомбы, вероятности попадания которых соответственно равны 0,3; 0,4; 0,6; 0,7.

Ко всем вариантам.

←　　→

Вариант 25

1.1. Три автомата изготавливают детали. Вероятность того, что деталь, изготовленная первым автоматом, – высшего качества, равна 0,9, вторым – 0,7, третьим – 0,6. Наугад берут по одной детали с каждого автомата. Найти вероятность того, что из взятых деталей:

а) все высшего качества;

б) две высшего качества;

в) хотя бы одна высшего качества.

1.2. Для сигнализации об аварии установлены три независимо работающих устройства. Вероятность срабатывания при аварии первого устройства равна 0,9, второго – 0,85, третьего – 0,8. Найти вероятность того, что при аварии сработают, по крайней мере, два сигнализатора.

Ко всем вариантам.

←   →

Вариант 26

1.1. Вычислительный центр, который должен производить непрерывную обработку поступающей информации, располагает двумя вычислительными устройствами. Известно, что вероятность отказа за некоторое время T у каждого из них равна 0,2. Найти вероятность безотказной работы за время T:

а) каждого устройства;

б) ровно одного устройства;

в) хотя бы одного устройства.

1.2. Первый студент из 20 вопросов программы выучил 17, второй – 12. Каждому студенту задают по одному вопросу. Найти вероятность того, что хотя бы один ответит верно.

Ко всем вариантам.

Вариант 27

1.1. Инженер выполняет расчет, пользуясь тремя справочниками. Вероятности того, что интересующие его данные находятся в первом, втором и третьем справочниках соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятность того, что интересующие инженера данные содержатся:

а) только в одном справочнике;

б) только в двух справочниках;

в) во всех трех справочниках.

1.2. Вероятность поражения цели при одном выстреле у первого орудия неизвестна, а у второго орудия эта вероятность равна 0,8. Известно также, что при одном залпе из двух орудий вероятность одного попадания составляет 0,38. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым орудием.

Ко всем вариантам.

← →

Вариант 28

1.1. На сессии студенту предстоит сдать экзамены по трем предметам. Студент освоил 90% вопросов по первому предмету, 95% – по второму и 50% – по третьему. Какова вероятность того, что студент:

а) сдаст ровно два экзамена;

б) сдаст хотя бы один экзамен;

в) не сдаст ни одного экзамена.

1.2. На предприятии имеется три автомобиля. Вероятность безотказной работы первого из них в течение определенного времени равна 0,9, второго – 0,7, третьего – 0,8. Найти вероятность того, что в течение зафиксированного промежутка времени сломается хотя бы один автомобиль

Ко всем вариантам.

Вариант 29

1.1. На железобетонном заводе изготовляют панели, 90% из которых высшего сорта. Какова вероятность того, что из трех наугад выбранных панелей высшего сорта будут:

а) три панели;

б) хотя бы одна панель;

в) не более одной панели?

1.2. Четыре товарища решили пойти в кино. Вероятности того, что демонстрируемый в данном кинотеатре фильм их заинтересует, равны для первого, второго, третьего и четвертого товарищей 0,1; 0,2; 0,3 и 0,4 соответственно. Какова вероятность того, что выбранный фильм пойдут смотреть, по крайней мере, трое из них?

Ко всем вариантам.

Вариант 30

1.1. В телестудии три телевизионные камеры. Вероятности того, что в данный момент камера включена, соответственно равны 0,9; 0,8; 0,7. Найти вероятность того, что в данный момент включены:

а) две камеры;

б) не более одной камеры;

в) три камеры.

1.2. Вероятность поражения первой мишени для данного стрелка равна 0,6. Если при первом выстреле зафиксировано попадание, то стрелок получает право на следующий выстрел по второй мишени. Вероятность поражения обеих мишеней при двух выстрелах равна 0,3.Определить вероятность поражения второй мишени.

Ко всем вариантам.

Контрольные вопросы

1. Что называют суммой двух событий? Чему равна сумма событий A={1,2,3} и B={1,3,4}?
2. Что называют произведением двух событий? Чему равно произведение событий A={1,2,3} и B={1,3,4}?
3. Что называют разностью двух событий? Чему равна разность событий A={1,2,3} и B={1,3,4}?
4. Каким событием будет сумма событий A и $\bar{A}$?
5. Чему равна вероятность суммы двух независимых совместных событий?
6. Чему равна вероятность суммы двух независимых несовместных событий?
7. Чему равна вероятность произведения двух независимых событий?
8. Для каких событий вероятность их суммы равна сумме их вероятностей?
9. Чему равна сумма вероятностей противоположных событий?
10. Чему равна сумма вероятностей всех событий, образующих полную группу?

Ко всем вариантам. Оглавление.

← →

ЛАБОРАТОРНО-ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 3 УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ И ФОРМУЛЫ БАЙЕСА

Цель работы:

•формирование различий в понимании независимых и зависимых событий;

•применение условной вероятности для решения задач;

•практическое применение формулы полной вероятности;

•практическое применение формул Байеса.

Краткие теоретические сведения

Событие A называется *независимым* от события B, если вероятность события A не зависит от того, произошло событие B или не произошло.

Событие A называется *зависимым* от события B, если вероятность события A меняется в зависимости от того, произошло событие B или нет.

Условной вероятностью события A при условии, что произошло событие B при $P(B) \neq 0$, называется число $P(A \mid B)$, которое определяется формулой

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

или число $P(B \mid A)$, которое определяется формулой

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

Эта формула имеет смысл, когда события A и B совместны. По определению, событие B не зависит от события A, если $P(B \mid A) = P(B)$. В этом случае также $P(A \mid B) = P(A)$, т. е. событие A не зависит от события B. Рассуждая подобным образом, событие B зависит от события A, если $P(B \mid A) \neq P(B)$.

Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое событие произошло, если события А и В совместны т. е.

[illegible] = [illegible] = [illegible].

Вероятность произведения n совместных событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных в предположении, что все предыдущие события наступили, т. е.

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)P(A_n|A_1 \cdot A_2 \cdot A_{n-1}).$$

Для трех событий A_1, A_2, A_3 эта формула имеет вид:

$$P(A_1A_2\,A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2). \qquad (3.1)$$

Гипотезами называются попарно несовместные события $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образующие полную группу событий, причем $P(H_i) \neq 0, i = \overline{1, n}$.

Пусть вероятности событий $H_i (i = \overline{1, n})$ известны, т. е. известны $P(H_1)$, $P(H_2)$, …, $P(H_n)$. Также известны условные вероятности $P(A|H_1)$, $P(A|H_2)$, …, $P(A|H_n)$. Вероятность события A, которое может наступить только вместе с одним из несовместных событий (гипотез) $H_1, H_2, \ldots, H_n$ вычисляется по формуле полной вероятности:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i). \qquad (3.2)$$

С формулой полной вероятности (3.6) тесно связаны формулы Байеса, позволяющие вычислить условные вероятности гипотез H_i:

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i)}, i = \overline{1, n} \qquad (3.3)$$

Вероятности $P(H_i)$ $(i = \overline{1, n})$ называются *априорными вероятностями*. Вероятности $P(H_i|A)$ $(i = \overline{1, n})$ называются *апостериорными вероятностями*.

Решение типовых задач

[Задание 1](#)

[Задание 2](#)

Задание 1. Студент выучил 30 вопросов из 40. Какова вероятность, что он верно ответит на три подряд заданных вопроса?

Решение. Введём события A_i – студент верно ответил на i-й вопрос (i=1,2,3). Тогда вероятность того, что студент верно ответил на все три подряд заданных вопроса, найдём по формуле (3.1) вероятности произведения зависимых событий:

$$P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P(A_3|A_1 A_2) = \frac{30}{40}\cdot\frac{29}{39}\cdot\frac{28}{38} \approx 0{,}411$$

Ответ: 0,411.

Задание 2. На сборку механизма поступают детали из двух автоматов. Первый автомат в среднем дает 1,5 % брака, второй – 1 %. С первого автомата поступило 2000 деталей, а со второго – 1500.

а) Найти вероятность попадания на сборку бракованной детали.

б) Наугад взятая деталь оказалась бракованной. Найти вероятность того, что она изготовлена на первом автомате.

Решение.

а) Рассмотрим гипотезы: H_1 – деталь, поступившая на сборку механизма, произведена на первом автомате; H_2 – деталь, поступившая на сборку механизма, произведена на втором автомате. Тогда $P(H_1) = \frac{2000}{2000+1500} = \frac{4}{7}$, $P(H_2) = \frac{1500}{2000+1500} = \frac{3}{7}$. Вероятность того, что бракованная деталь произведена на первом автомате, равна $P(A|H_1) = 0{,}015$, так мы учли процент брака для первого автомата.

Аналогично, вероятность того, что бракованная деталь произведена на втором автомате, равна $P(A|H_2) = 0{,}01$. Для того, чтобы найти вероятность события A – выбранная наудачу деталь из числа поступивших на сборку оказалась бракованной – применим формулу полной вероятности (3.2):

$$P(A) = P(H_1)\cdot P(A|H_1) + P(H_2)\cdot P(A|H_2) = \frac{4}{7}\cdot 0{,}015 + \frac{3}{7}\cdot 0{,}01 \approx 0{,}0129.$$

б) Чтобы найти вероятность того, что наугад взятая бракованная деталь, изготовлена на первом автомате, надо применить формулу Байеса (3.3):

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2)} = \frac{\frac{4}{7}\cdot 0{,}015}{\frac{4}{7}\cdot 0{,}015 + \frac{3}{7}\cdot 0{,}01} = \frac{6}{9}.$$

Ответ: а) 0,0129; б) 0,67.

Практическое задание

Задание 1.1. Найти вероятность события, используя условную вероятность.

Задание 2.1.-2.2. Найти вероятности событий, используя формулу полной вероятности и формулы Байеса.

Вариант 1

1.1. Слово «дымоход» составлено из букв разрезной азбуки. Карточки с буквами перемешали. Какова вероятность из наугад выбранных карточек получить слово «дом»?

2.1. 20% приборов монтируется с применением микромодулей, остальные – с применением интегральных схем. Надежность приборов с применением микромодулей – 0,9, интегральных схем– 0,8. Найти:

а) вероятность надежной работы наугад взятого прибора;

б) вероятность того, что прибор – с микромодулем, если он был исправен.

2.2. На заводе, изготавливающем мелкие бытовые приборы, в одном из цехов установлены 5 станков по производству зажимов. Первый станок производит 10%, второй –15%, третий – 20%, четвертый – 25% и пятый – 30% всех изделий. Брак продукции составляет соответственно 2%, 3%, 4%,5% и 6%. Какова вероятность того, что случайно выбранный зажим окажется с дефектом?

Ко всем вариантам.

Вариант 2

1.1. Слово «водоворот» составлено из букв разрезной азбуки. Карточки с буквами перемешали. Какова вероятность из наугад выбранных карточек получить слово «овод»?

2.1. Детали попадают на обработку на один из трех станков с вероятностями, соответственно равными 0,2; 0,3; 0,5. Вероятность брака на первом станке равна 0,02 , на втором – 0,03, на третьем – 0,01. Найти:

а) вероятность того, что случайно взятая после обработки деталь – стандартная;

б) вероятность обработки наугад взятой детали на втором станке, если она оказалась стандартной.

2.2. Некоторая общественная организация для проведения митинга наудачу выбирает одну из трех суббот (обозначим их 1-я, 2-я, 3-я). Вероятности того, что в i-ю субботу пойдет дождь (i=1,2,3), равны соответственно 0,1; 0,2; 0,3. Известно, что во время митинга была ясная и солнечная погода. Какова апостериорная вероятность того, что митинг был в 3-ю субботу?

Ко всем вариантам.

Вариант 3

1.1. Слово «молоковоз» составлено из букв разрезной азбуки. Карточки с буквами перемешали. Какова вероятность из наугад выбранных карточек получить слово «волк»?

2.1. Среди поступивших на сборку деталей 30% – с завода I, остальные – с завода II. Вероятность брака для завода I равна 0,02, для завода II – 0,03. Найти:

а) вероятность того, что наугад взятая деталь стандартная;

б) вероятность изготовления наугад взятой детали на заводе I, если она оказалась стандартной.

2.2. Некий человек решил наудачу купить акции одного из 4-х предприятий. Если бы он купил акции первого предприятия, то вероятность получить дивиденды в течение года с момента покупки равнялась бы 0,8; для второго, третьего и четвертого предприятия эти величины равны соответственно 0,9, 0,7, 0,6. Известно, что человек дивиденды не получил. Какова апостериорная вероятность того, что человек купил акции второго предприятия?

Ко всем вариантам.

Вариант 4

1.1. Слово «колокол» составлено из букв разрезной азбуки. Карточки с буквами перемешали. Какова вероятность из наугад выбранных карточек получить слово «кол»?

2.1. Три автомата изготовляют однотипные детали, которые поступают на общий конвейер. Производительности первого, второго и третьего автоматов соотносятся как 2:3:5. Вероятность того, что деталь с первого автомата – высшего качества, равна 0,8, для второго – 0,6, для третьего – 0,7. Найти вероятность того, что:

а) наугад, взятая с конвейера деталь окажется высшего качества;

б) взятая наугад деталь высшего качества изготовлена первым автоматом.

2.2. Чтобы получить работу в солидной фирме, необходимо знание иностранного языка. Девушка, претендующая на такое место, наудачу выбирает одну из трех методик ускоренного изучения языка. Если бы она изучала язык по первой методике, то вероятность пройти тестирование при устройстве на работу равнялась бы 0,7; по второй и третьей – соответственно 0,8 и 0,6. Известно, что тест она не выдержала. Какова апостериорная вероятность того, что девушка занималась по первой методике?

Ко всем вариантам.

Вариант 5

1.1. Слово «тарарам» составлено из букв разрезной азбуки. Карточки с буквами перемешали. Какова вероятность из наугад выбранных карточек получить слово «рама»?

2.1. Комплектовщик получает для сборки 30 % деталей с завода I, 20%– с завода II, остальные – с завода 3. Вероятность того, что детали с завода I – высшего качества, равна 0,9, для деталей с завода II – 0,8, для деталей с завода III – 0,6. Найти вероятность того, что:

а) случайно взятая деталь – высшего качества;

б) наугад взятая деталь высшего качества изготовлена на заводе II.

2.2. Предприятие объявило конкурс на замещение вакантной должности главного менеджера. На отбор пришли 4 человека, каждого из которых могут взять на работу с равной вероятностью. Если главным менеджером станет первый претендент, то предприятие останется довольно своим выбором с вероятностью 0,9; для 2-го, 3-го и 4-го претендентов эти вероятности равны соответственно 0,6; 0,8; 0,7. Известно, что новый главный менеджер отлично справился со своими обязанностями. Какова апостериорная вероятность того, что им стал третий претендент?

Ко всем вариантам.

Вариант 6

1.1. Слово «панорама» составлено из букв разрезной азбуки. Карточки с буквами перемешали. Какова вероятность из наугад выбранных карточек получить слово «пора»?

2.1. Заготовка может поступить для обработки на один из двух станков с вероятностями 0,4 и 0,6 соответственно. При обработке на первом станке вероятность брака составляет 2 %, на втором – 3 %. Найти вероятность того, что:

а) наугад взятое после обработки изделие – стандартное;

б) наугад взятое после обработки стандартное изделие обработано на первом станке.

2.2. В парке гуляет ребенок с надувным шариком. При этом он может с равной вероятностью встретить одного из своих знакомых. Обозначим их 1, 2, 3 и 4. Если ребенок встретит знакомого, то вероятности того, что он подарит ему шарик, равны 0,1; 0,1; 0,1 и 0,8 соответственно. Известно, что шарик был точно подарен. Какова апостериорная вероятность того, что счастливым обладателем шарика стал четвертый знакомый?

Ко всем вариантам.

Вариант 7

1.1. Слово «театрал» составлено из букв разрезной азбуки. Карточки с буквами перемешали. Какова вероятность из наугад выбранных карточек получить слово «тара»?

2.1. На двух станках обрабатываются однотипные детали. Вероятность брака для станка I составляет 0,03, для станка II – 0,02. Обработанные детали складываются в одном месте, причем деталей, обработанных на станке I, вдвое больше, чем на станке II. Найти вероятность того, что:

а) взятая наугад деталь будет стандартной;

б) наугад взятая стандартная деталь изготовлена на первом станке.

2.2. Хозяйка идет покупать фрукты. Она с равной вероятностью может пойти на базар или в магазин. Если хозяйка пойдет на базар, то купит фрукты с вероятностью 0,8, а если в магазин, то с вероятностью 0,2. Известно, что хозяйка купила фрукты. Какова апостериорная вероятность того, что хозяйка пошла в магазин?

[Ко всем вариантам.](#)

← →

Вариант 8

1.1. Слово «критик» составлено из букв разрезной азбуки. Карточки с буквами перемешали. Какова вероятность из наугад выбранных карточек получить слово «крик»?

2.1. В дисплейном классе имеется 10 персональных компьютеров первого типа и 15 второго типа. Вероятность того, что за время работы на компьютере первого типа не произойдет сбоя, равна 0,9, а на компьютере второго типа – 0,7. Найти вероятность того, что:

а) на случайно выбранном компьютере не произойдет сбоя;

б) компьютер, во время работы на котором не произошло сбоя, – первого типа.

2.2. Служащий некоторого предприятия решил в неофициальной обстановке во время обеда обсудить важный вопрос со своим начальником. С этой целью он может пойти в ближайшее кафе, в заводскую столовую или буфет. Встретить начальника в указанных местах можно соответственно с вероятностями 0,6; 0,3; 0,1. Служащий идет в наудачу выбранное место и встречает там начальника. Какова апостериорная вероятность того, что служащий пошел в ближайшее кафе?

Ко всем вариантам.

Вариант 9

1.1. Слово «полиглот» составлено из букв разрезной азбуки. Карточки с буквами перемешали. Какова вероятность из наугад выбранных карточек получить слово «лото»?

2.1. В пяти ящиках с тридцатью шарами в каждом содержится по 5 красных шаров, в шести других ящиках с двадцатью шарами в каждом – по 4 красных шара. Найти вероятность того, что:

а) из наугад взятого ящика наудачу взятый шар будет красным;

б) наугад взятый красный шар содержится в одном из первых пяти ящиках.

2.2. Фирма проводит выставку - продажу своей продукции, причем все экспонаты представлены в единственном экземпляре. Четыре клиента приходят на выставку-продажу последовательно, причем всех клиентов интересует один и тот же экспонат. Вероятности того, что каждый из них купит этот экспонат, равны 0,1; 0,2; 0,3 и 0,4 соответственно. Известно, что экспонат был куплен. Какова апостериорная вероятность того, что его обладателем стал четвертый клиент?

Ко всем вариантам.

Вариант 10

1.1. Слово «кашалот» составлено из букв разрезной азбуки. Карточки с буквами перемешали. Какова вероятность из наугад выбранных карточек получить слово «каша»?

2.1. По линии связи передано два сигнала типа A и B с вероятностями соответственно 0,8 и 0,2. В среднем принимаются 60% сигналов типа A и 70% – типа B. Найти вероятность того, что:

а) посланный сигнал будет принят;

б) принятый сигнал типа A.

2.2. Комиссия проверяет работу торговой сети города. С этой целью она наудачу выбирает одну из торговых точек: A, B и C. Обнаружить погрешности в работе указанных точек можно с вероятностями 0,1; 0,2 и 0,3 соответственно. Известно, что нарушений в работе обнаружено не было. Какова апостериорная вероятность того, что комиссия посетила торговую точку C?

Ко всем вариантам.

Вариант 11

1.1. Слово «волкодав» составлено из букв разрезной азбуки. Карточки с буквами перемешали. Какова вероятность из наугад выбранных карточек получить слово «лов»?

2.1. Для сигнализации о том, что режим работы автоматической линии отклоняется от нормального, используются индикаторы двух типов. Вероятности того, что индикатор принадлежит к одному из двух типов, соответственно равны 0,4 и 0,6. При нарушении работы линии вероятность срабатывания индикатора первого типа равна 0,9, индикатора второго типа – 0,7. Найти вероятность того, что:

а) наугад выбранный индикатор сработает при нарушении нормальной работы линии;

б) индикатор сработал. К какому типу он вероятнее всего принадлежит?

2.2. На субботу назначено мероприятие по уборке территории. Субботник может быть отменен, если пойдет дождь (вероятность этого 0,5); пойдет снег (вероятность этого 0,1); будет сильный ветер (вероятность этого 0,2). Известно, что субботник в намеченный день не состоялся. Какова апостериорная вероятность того, что это случилось из-за дождя?

Ко всем вариантам.

Вариант 12

1.1. Слово «водоворот» составлено из букв разрезной азбуки. Карточки с буквами перемешали. Какова вероятность из наугад выбранных карточек получить слово «ворот»?

2.1. Резистор, поставленный в телевизор, может принадлежать к одной из двух партий с вероятностями 0,6 и 0,4. Вероятности того, что резистор проработает гарантийное число часов, для этих партий соответственно равны 0,8 и 0,7. Найти вероятность того, что:

а) взятый наугад резистор проработает гарантийное число часов;

б) резистор проработал гарантийное число часов. К какой партии он вероятнее всего принадлежит?

2.2. Семья решила поехать летом отдохнуть в Крым или на Кавказ, но окончательно в выборе не определилась. В городе три турфирмы, предлагающие путевки для отдыха: в первой фирме есть 10 путевок в Крым и 5 на Кавказ; во второй – 7 в Крым, 5 на Кавказ; в третьей соответственно – 5 путевок в Крым и 3 на Кавказ. Семья покупает наудачу путевку в наудачу выбранной турфирме. Какова вероятность того, что семья будет отдыхать в Крыму?

Ко всем вариантам.

Вариант 13

1.1. Слово «поворот» составлено из букв разрезной азбуки. Карточки с буквами перемешали. Какова вероятность из наугад выбранных карточек получить слово «тор»?

2.1. При отклонении от штатного режима работы поточной линии срабатывает сигнализатор типа Т-1 с вероятностью 0,9 и сигнализатор типа Т-2 с вероятностью 0,8. Вероятности того, что линия снабжена сигнализаторами типов Т-1 и Т-2 соответственно равны 0,7 и 0,3. Найти вероятность того, что:

а) при отклонении от штатного режима работы сигнализатор сработает;

б) сигнализатор сработал. К какому типу он вероятнее всего принадлежит?

2.2. Организация приобрела для сотрудников две коробки шариковых ручек. В первой коробке имеется 25 ручек с черным стержнем и 5 ручек с синим, во второй – соответственно 20 ручек с черным стержнем и 10 с синим. Секретарь наудачу взял ручку из наудачу выбранной коробки. Какова вероятность того, что в этой ручке окажется черный стержень?

[Ко всем вариантам.](#)

← →

Вариант 14

1.1. Слово «минимум» составлено из букв разрезной азбуки. Карточки с буквами перемешали. Какова вероятность из наугад выбранных карточек получить слово «мим»?

2.1. Для участия в студенческих спортивных соревнованиях выделено 10 человек из первой группы и 8 – из второй. Вероятность того, что студент первой группы попадает в сборную института, равна 0,8, а для студента второй группы – 0,7. Найти вероятность того, что:

а) случайно выбранный студент попал в сборную института;

б) студент попал в сборную института. В какой группе он вероятнее всего учится?

2.2. Два стрелка независимо один от другого стреляют по одной мишени, делая по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,8, для второго – 0,4. Один из стрелков в мишень попал. Найти вероятность того, что попал первый стрелок.

[Ко всем вариантам.](#)

← →

Вариант 15

1.1. Слово «максимум» составлено из букв разрезной азбуки. Карточки с буквами перемешали. Какова вероятность из наугад выбранных карточек получить слово «мак»?

2.1. На сборку поступают детали с трех конвейеров. Первый дает 25%, второй – 30% и третий – 45% деталей, поступающих на сборку. С первого конвейера в среднем поступает 2% брака, со второго – 3%, с третьего – 1%. Найти вероятность того, что:

а) на сборку поступила бракованная деталь;

б) поступившая на сборку бракованная деталь – со второго конвейера.

2.2. В магазин на продажу поступили две партии однотипных курток по 50 штук в каждой. Процент курток со скрытым дефектом в первой партии равен 2%, во второй – 4%. Одну куртку из первой партии вывесили на витрину. Покупатель, купивший одну куртку из оставшихся из наудачу выбранной партии, обнаружил дефект. Какова апостериорная вероятность того, что эта куртка была из первой партии?

[Ко всем вариантам.](#)

Вариант 16

1.1. Слово «равенство» составлено из букв разрезной азбуки. Карточки с буквами перемешали. Какова вероятность из наугад выбранных карточек получить слово «ров»?

2.1. В двух коробках имеются однотипные конденсаторы. В первой – 20 конденсаторов, из них 2 неисправных, во второй – 10, из них 3 неисправных. Найти вероятность того, что:

а) наугад взятый конденсатор из случайно выбранной коробки годен к использованию;

б) наугад взятый конденсатор оказался годным. Из какой коробки он вероятнее всего взят?

2.2. Требуется успокоить капризного ребенка. Вероятности того, что ребенок успокоится с помощью погремушки, мягкой игрушки или конфеты соответственно равны 0,1; 0,2 и 0,7. Няня берет первый попавшийся предмет из имеющихся у нее трех погремушек, двух мягких игрушек и двух конфет и успокаивает ребёнка. Какова апостериорная вероятность того, что няня взяла конфету?

Ко всем вариантам.

Вариант 17

1.1. Слово «математика» составлено из букв разрезной азбуки. Карточки с буквами перемешали. Какова вероятность из наугад выбранных карточек получить слово «тема»?

2.1. В телевизионном ателье имеется два кинескопа первого типа и 8 второго. Вероятность выдержать гарантийный срок для кинескопов первого типа равна 0,9, а для второго типа – 0,6. Найти вероятность того, что:

а) взятый наугад кинескоп выдержит гарантийный срок;

б) взятый наугад кинескоп, выдержавший гарантийный срок, первого типа.

2.2. Двое рабочих производят детали, которые поступают в отдел контроля, причем производительность первого рабочего в 4 раза больше производительности второго. Вероятность получения бракованной детали для первого рабочего равна 0,15, для второго – 0,05. Найти вероятность того, что наудачу выбранная стандартная деталь изготовлена вторым рабочим.

Ко всем вариантам.

Вариант 18

1.1. Слово «кибернетика» составлено из букв разрезной азбуки. Карточки с буквами перемешали. Какова вероятность из наугад выбранных карточек получить слово «берет»?

2.1. У сборщика 16 деталей, изготовленных на заводе I, и 10 деталей, изготовленных на заводе II. Вероятность того, что изготовленные на заводах детали выдержат гарантийный срок, соответственно равны 0,8 и 0,9. Найти вероятность того, что:

а) взятая наугад деталь проработает гарантийный срок;

б) взятая наугад деталь проработала гарантийный срок. На каком из заводов она вероятнее всего изготовлена?

2.2. Чтобы выбрать, по какой из трех ведущих в город дорог, поехать, водитель бросает игральную кость. Если выпадает одно очко, он выбирает первую дорогу, если 2 или 3 – вторую, в остальных случаях – третью. Вероятности попасть под дождь для указанных дорог равны соответственно 1/2, 1/3, 1/4. Водитель попал под дождь. Какова вероятность того, что он поехал по третьей дороге?

[Ко всем вариантам.](#)

← →

Вариант 19

1.1. Слово «философия» составлено из букв разрезной азбуки. Карточки с буквами перемешали. Какова вероятность из наугад выбранных карточек получить слово «философ»?

2.1. Телеграфное сообщение состоит из сигналов ТОЧКА и ТИРЕ, они встречаются в передаваемых сообщениях в отношении 5:3. Статистические свойства помех таковы, что искажаются в среднем 2/5 сообщений ТОЧКА и 1/3 сообщений ТИРЕ. Найти вероятность того, что:

а) передаваемый сигнал принят;

б) принятый сигнал – ТИРЕ.

2.2. Некоторое изделие выпускается двумя заводами. Продукция второго завод по объему в 3 раза превосходит продукцию первого. Доля брака у первого завода – 2%, у второго – 3%. Изделия, выпущенные заводами за определенный промежуток времени перемешали и направили в продажу. Какова вероятность того, что приобретенное испорченное изделие изготовлено на первом заводе?

Ко всем вариантам.

Вариант 20

1.1. Слово «историк» составлено из букв разрезной азбуки. Карточки с буквами перемешали. Какова вероятность из наугад выбранных карточек получить слово «тир»?

2.1. Для поиска спускаемого аппарата космического корабля выделено 4 вертолета первого типа и 6 вертолетов второго типа. Каждый вертолет первого типа обнаруживает находящийся в районе поиска аппарат с вероятностью 0,6, второго типа – с вероятностью 0,7. Найти вероятность того, что:

а) наугад выбранный вертолет обнаружит аппарат;

б) к какому типу вероятнее всего принадлежит вертолет, обнаруживший спускаемый аппарат?

2.2. Литье в болванках поступает из трех заготовительных цехов, причем производительность первого цеха в два раза меньше, чем второго, а производительность третьего цеха в два раза больше, чем второго. Материал первого цеха имеет 10% брака, второго – 15%, третьего – 20%. Найти вероятность того, что взятая наугад болванка, оказавшаяся без дефектов, поступила из второго цеха.

[Ко всем вариантам.](#)

← →

Вариант 21

1.1. Слово «скороговорка» составлено из букв разрезной азбуки. Карточки с буквами перемешали. Какова вероятность из наугад выбранных карточек получить слово «сорока»?

2.1. Прибор состоит из двух узлов одного типа и трех узлов второго типа. Надежность работы в течение времени T для узла первого типа равна 0,8, а для узла второго типа – 0,7. Найти вероятность того, что:

а) наугад выбранный узел проработает в течение времени T;

б) узел проработал гарантийное время T. К какому типу он вероятнее всего относится?

2.2. В цехе работают100 станков. Из них 50 станков марки A, 30 – марки B и 20 – марки C. Вероятность того, что качество детали окажется отличным, равна для этих станков соответственно 0,6, 0,8 и 0,9. Какой процент бракованных деталей выпускает цех в целом?

Ко всем вариантам.

← →

Вариант 22

1.1. Слово «поговорка» составлено из букв разрезной азбуки. Карточки с буквами перемешали. Какова вероятность из наугад выбранных карточек получить слово «говор»?

2.1. Пассажир может обратиться за получением билета в одну из трех касс вокзала A или в одну из пяти касс вокзала B. Вероятность того, что к моменту прихода пассажира в кассах вокзала A имеются в продаже билеты, равна 0,6, в кассах вокзала B – 0,5. Найти вероятность того, что:

а) в наугад выбранной кассе имеется в продаже билет;

б) пассажир купил билет. В кассе какого вокзала он вероятнее всего куплен?

2.2. На двух автоматических станках изготовляются одинаковые детали. Известно, что производительность первого станка в два раза больше, чем второго, и что вероятность изготовления детали первого сорта на первом станке равна 0,9, а на втором – 0,81. Изготовленные за смену на обоих станках не рассортированные детали находятся на складе. Найти вероятность того, что наудачу взятая деталь первого сорта изготовлена на втором станке.

Ко всем вариантам.

Вариант 23

1.1. Слово «радиотелескоп» составлено из букв разрезной азбуки. Карточки с буквами перемешали. Какова вероятность из наугад выбранных карточек получить слово «лето»?

2.1. В вычислительной лаборатории 40% калькуляторов и 60% дисплеев. Во время расчета 90 % микрокалькуляторов и 80% дисплеев работают безотказно. Найти вероятность того, что:

а) наугад взятая вычислительная машина проработает безотказно во время расчета;

б) выбранная машина проработала безотказно во время расчета. К какому типу вероятнее всего она принадлежит?

2.2. Число сигналов, посылаемых из пункта B, относится к числу сигналов, посылаемых из пункта C, как 3:7. Из пункта B искажается 20% сигналов, а из пункта C искажается 10% всех сигналов. Найти вероятность того, что принятый неискаженный сигнал послан из пункта C.

Ко всем вариантам.

Вариант 24

1.1. Слово «телевизор» составлено из букв разрезной азбуки. Карточки с буквами перемешали. Какова вероятность из наугад выбранных карточек получить слово «тело»?

2.1. В состав блока входят 6 радиоламп первого типа и 10 второго. Гарантийный срок обычно выдерживают 80% радиоламп первого типа и 90% – второго типа. Найти вероятность того, что:

а) наугад взятая радиолампа выдержит гарантийный срок;

б) радиолампа, выдержавшая гарантийный срок, первого типа.

2.2. Двое рабочих производят детали, которые складываются в один ящик. Известно, что производительность первого рабочего в три раза меньше, чем производительность второго. Вероятность получения бракованной детали для первого рабочего равна 0,05, для второго – 0,15. Найти вероятность того, что наудачу выбранная из ящика стандартная деталь произведена вторым рабочим.

Ко всем вариантам.

Вариант 25

1.1. Слово «корректор» составлено из букв разрезной азбуки. Карточки с буквами перемешали. Какова вероятность из наугад выбранных карточек получить слово «ректор»?

2.1. На сборку поступают детали с трех автоматов, причем с первого 30% всех деталей, со второго – 40% и с третьего – 30%. Вероятность брака для первого автомата равна 0,02, для второго – 0,03, для третьего – 0,04. Найти вероятность того, что:

а) взятая наугад деталь – бракованная;

б) взятая наугад деталь оказалась бракованной. С какого автомата она вероятнее всего поступила?

2.2. Запчасти поступают с трех баз, причем на первой базе деталей находится вдвое меньше, чем на второй, а на третьей – в три раза больше, чем на второй. На первой базе доля брака – 10%, на второй –20%, на третьей – 5%. Наудачу взятая запчасть оказалась без дефектов. Найти вероятность того, что она поступила с третьей базы.

Ко всем вариантам.

Вариант 26

1.1. Слово «товарооборот» составлено из букв разрезной азбуки. Карточки с буквами перемешали. Какова вероятность из наугад выбранных карточек получить слово «робот»?

2.1. Имеется 6 коробок диодов типа A и 8 коробок диодов типа B. Вероятность безотказной работы диода типа A равна 0,8, типа B – 0,7. Найти вероятность того, что:

а) взятый наугад диод проработает гарантийное число часов;

б) взятый наугад диод проработал гарантийное число часов. К какому типу он вероятнее всего относится?

2.2. На склад поступает продукция с трех фабрик. Поступления с первой фабрики составляют 20%, со второй – 46%, с третьей – 34%. Вероятность брака для первой фабрики равна 0,03, для второй – 0,02, для третьей – 0,01. Найти вероятность того, что наугад взятое нестандартное изделие поступило со второй фабрики.

Ко всем вариантам.

Вариант 27

1.1. Слово «водопровод» составлено из букв разрезной азбуки. Карточки с буквами перемешали. Какова вероятность из наугад выбранных карточек получить слово «провод»?

2.1. Для участия в студенческих спортивных соревнованиях выделено из первой группы 5 студентов, из второй и третьей соответственно 6 и 10 студентов. Вероятности выполнить норму мастера спорта, соответственно равны для студентов первой группы – 0,3, второй – 0,4, третьей – 0,2. Найти вероятность того, что:

а) наугад взятый студент выполнит норму мастера спорта;

б) студент, выполнивший норму мастера спорта, учится во второй группе.

2.2. В канцелярии работают 3 секретаря, которые обрабатывают по 35%, 25% и 40% исходящих документов за один и тот же промежуток времени. Вероятности неверной адресации документов секретарями соответственно равны 0,02; 0,03 и 0,04. Найти вероятность того, что наудачу взятый неверно адресованный документ был обработан вторым секретарем.

Ко всем вариантам.

Вариант 28

1.1. Слово «транспорт» составлено из букв разрезной азбуки. Карточки с буквами перемешали. Какова вероятность из наугад выбранных карточек получить слово «сорт»?

2.1. На участке, изготовляющем болты, первый станок производит 25% всех изделий, второй – 35%, третий – 40%. В продукции каждого из станков брак составляет соответственно 5%, 4% и 2%. Найти вероятность того, что:

а) взятый наугад болт с дефектом;

б) случайно взятый болт с дефектом изготовлен на третьем станке.

2.2. Была проведена одна и та же контрольная работа в трех параллельных группах. В первой группе, где 30 студентов, оказалось 8 выполненных на «отлично» работ, во второй, где 28 студентов – 6 таких работ; в третьей, где 27 студентов, – 9 таких работ. Все работы перемешали и наугад выбрали одну работу. Она оказалась написанной на «отлично». Найти вероятность того, что эта работа принадлежит студенту второй группы.

[Ко всем вариантам.](#)

← →

Вариант 29

1.1. Слово «локатор» составлено из букв разрезной азбуки. Карточки с буквами перемешали. Какова вероятность из наугад выбранных карточек получить слово «кора»?

2.1. На сборку поступают детали с четырех автоматов. Первый автомат обрабатывает 40% всех деталей, поступающих на сборку, второй – 30%, третий – 20 % и четвертый – 10%. Первый автомат дает 0,1% брака, второй – 0,2%, третий – 0,25%, четвертый – 0,5%. Найти вероятность того, что:

а) на сборку поступит стандартная деталь;

б) поступившая на сборку стандартная деталь изготовлена первым автоматом.

2.2. Перед посевом 90% всех семян было обработано ядохимикатами. Вероятность поражения вредителями для растений из обработанных семян равна 0,04, для растений из необработанных семян – 0,08. Взятое наудачу растение оказалось пораженным. Найти вероятность того, что оно выращено из партии обработанных семян.

Ко всем вариантам.

Вариант 30

1.1. Слово «пеленгатор» составлено из букв разрезной азбуки. Карточки с буквами перемешали. Какова вероятность из наугад выбранных карточек получить слово «лепет»?

2.1. Производится стрельба по мишеням трех типов, из которых 5 мишеней типа A, 3 мишени типа B и 3 мишени типа C. Вероятность попадания в мишень типа A равна 0,4, в мишень типа B – 0,1, в мишень типа C – 0,15. Найти вероятность того, что:

а) мишень будет поражена при одном выстреле, если неизвестно, по мишени какого типа он был произведён;

б) при одном выстреле поражена мишень типа A, если неизвестно, по мишени какого типа был произведён выстрел.

2.2. В районе 24 человека обучаются на заочном факультете университета, из них 6 – на математическом факультете, 12 – на историческом факультете и 6 – на экономическом факультете. Вероятность на предстоящей сессии успешно сдать все экзамены для студентов математического факультета равна 0,6, исторического факультета – 0,76, экономического факультета – 0,8. Найти вероятность того, что наудачу взятый студент, сдавший успешно все экзамены, окажется студентом экономического факультета.

Ко всем вариантам.

Контрольные вопросы

1. Как определить, зависимы или независимы два события?
2. Что называется условной вероятностью?
3. Какие события называют гипотезами?
4. Что называют полной группой событий?
5. Могут ли события ⊠⊠$_1$ и ⊠⊠$_3$ из полной группы событий быть совместными?
6. Могут ли изменяться вероятности гипотез после наступления события?
7. Какую вероятность называют априорной?
8. Какую вероятность называют апостериорной?
9. Какова формула полной вероятности?
10. Каковы формулы Байеса?

Ко всем вариантам.

Оглавление.

ЛАБОРАТОРНО-ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 4

ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. БИНОМИАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Цель работы:

- ознакомление с основными понятиями, касающимися дискретных случайных величин;
- изучение основных числовых характеристик дискретных случайных величин;
- ознакомление с биномиальным законом распределения дискретной случайной величины;
- применение полученных теоретических знаний на практике.

Оглавление.

Краткие теоретические сведения

Случайной величиной X называется функция, определенная на пространстве элементарных событий Ω и принимающая числовые значения, причем для любого действительного $\boldsymbol{x}$ определена вероятность

$$P\,(X < x) = F(x),$$

которая называется *функцией распределения* случайной величины X.

Функция распределения $F(x)$ – неубывающая, непрерывная слева функция, определенная на всей числовой оси.

Свойства функции распределения:

1) $0 \le F(x) \le 1$;

2) $P\,(a \le X \le b) = F(b) - F(a)$;

3) $F\,(-\infty) = 0$, $F\,(+\infty) = 1$.

Случайные величины бывают трех типов: дискретные, непрерывные и смешанные (дискретно-непрерывные).

Случайная величина называется *дискретной*, если она может принимать конечное или бесконечное счетное число значений.

Случайная величина называется *непрерывной*, если она может принимать бесконечное несчетное число значений (например, значения из какого-то интервала на числовой оси).

Если X – дискретная случайная величина (ДСВ), принимающая значения x_1, x_2, … x_n с вероятностями p_1, p_2, … p_n соответственно, то ее функция распределения выражается формулой

$$F(X)=\sum_{x_i<x} p_i \tag{4.1}$$

Формулу (4.1) можно записать в виде

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_1 \\ p_1, & x_1 < x \le x_2 \\ p_1 + p_2, & x_2 < x \le x_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.., & \\ \sum_{i=1}^{n-1} p_i, & x_{n-1} < x \le x_n \\ 1, & x > x_n \end{cases} \tag{4.2}$$

График функции распределения ДСВ представляет собой ступенчатую линию (рис. 4.1).

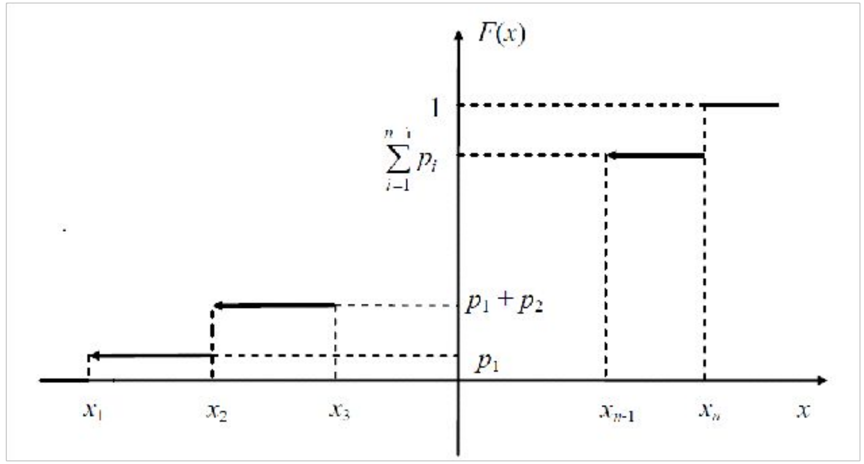

Рис. 4.1 График функции распределения

Законом (рядом) распределения ДСВ X называют таблицу следующего вида:

X	x_1	x_2	x_3	…	x_n
P	p_1	p_2	p_3	…	p_n

Здесь x_i – возможные значения дискретной случайной величины X, $p_i = P(X = x_i)$, при этом $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Графическое изображение закона распределения называется *многоугольником (полигоном) распределения*. Для его построения в прямоугольной системе координат строят точки (x_1,p_1), (x_2,p_2), … и соединяют их отрезками прямых (рис. 4.2).

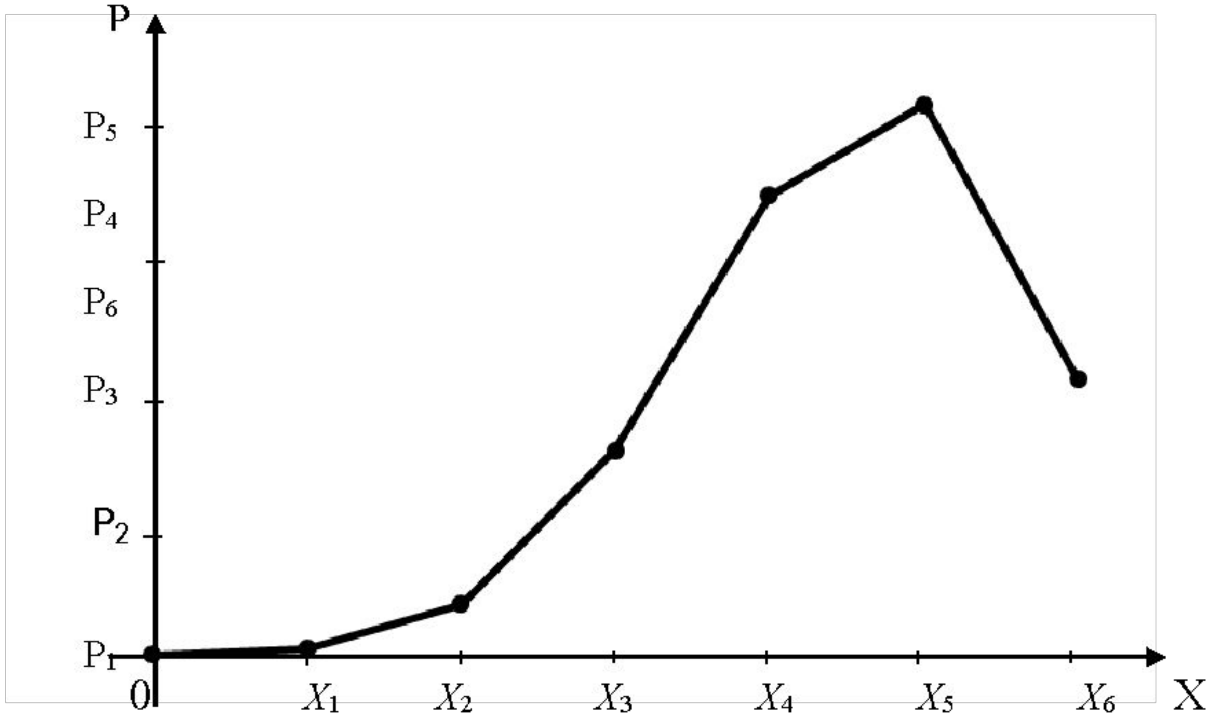

Рис. 4.2. Многоугольник распределения

Основными характеристиками случайной величины являются *математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение, мода и медиана*.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X называют число $M(X)$, определяемое формулой (предполагается, что ряд сходится абсолютно).

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i.$$

Свойства математического ожидания:

1) $M(C) = C$, где $C = const$;

2) $M(C \cdot X) = C \cdot M(X)$;

3) $M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)$, где X и Y – любые случайные величины;

4) $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$, если X и Y – независимые случайные величины.

Дисперсией случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины X относительно её математического ожидания: $D(X) = M(X - M(X))^2$. Для вычисления дисперсии удобнее пользоваться формулой

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X),$$

которая в случае дискретной случайной величины имеет вид

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - M^2(X)$$

Свойства дисперсии:

1) $D(C) = 0$, где $C = const$;

2) $D(C \cdot X) = C^2 \cdot D(X)$;

3) если X и Y – независимые случайные величины, то $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$.

Средним квадратическим отклонением случайной величины называется квадратный корень из дисперсии этой величины:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \qquad (4.3)$$

Модой (M_0(X)) ДСВ X называется наиболее вероятное значение этой случайной величины.

Медианой ДСВ X называется такое ее значение $M_e(X)$, для которого

$$P(X < M_e(X)) = P(X > M_e(X)) = \frac{1}{2}.$$

Пусть производится серия из n независимых испытаний, в каждом из которых случайное событие A («успех») может произойти с вероятностью p, а может не произойти («неудача») с вероятностью q=1-p. Вероятность того, что в n независимых испытаниях «успех» наступит ровно k раз, находится по *формуле Бернулли*

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \qquad (4.4)$$

где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ – число сочетаний из n по k; p – вероятность «успеха» в одном испытании; q=1–p – вероятность «неудачи».

Говорят, что случайная величина *распределена по биномиальному закону*, если её ряд распределения имеет вид

X	0	1	2	…	k	…	n
P	q^n	npq^{n-1}	np^2q^{n-2}	…	$C_n^k p^k q^{n-k}$	…	P^n

Число «успехов» m_0, имеющее наибольшую вероятность, называют *наивероятнейшим.* Наивероятнейшее число «успехов» m_0 находится из неравенства

$$np - q \le m_0 \le np + p.$$

Если ДСВ X имеет биномиальный закон распределения, то

[illegible] = [illegible], (4.5)

[illegible] = [illegible]. (4.6)

Решение типового задания

Задание 1. Проверкой качества установлено, что из каждых 100 деталей не имеют дефектов 75 штук в среднем. Составить закон распределения ДСВ X – число стандартных деталей из взятых наудачу 6 деталей. Найти основные числовые характеристики этой случайной величины.

Решение. Из условия следует, что p=0,75, q=0,25, n=6. В соответствии с формулой Бернулли (4.4) находим:

$P_6(0)=1\cdot(0{,}25)^6\approx 0{,}0002;$ $P_6(1)=6\cdot(0{,}75)\cdot(0{,}25)^5\approx 0{,}004;$

$P_6(2)=1\cdot(0{,}75)^2\cdot(0{,}25)^4\approx 0{,}033;$ $P_6(3)=1\cdot(0{,}75)^3\cdot(0{,}25)^3\approx 0{,}132;$

$P_6(4)=1\cdot(0{,}75)^4\cdot(0{,}25)^2\approx 0{,}297;$ $P_6(5)=1\cdot(0{,}75)^5\cdot(0{,}25)\approx 0{,}356;$

$P_6(6)=1\cdot(0{,}75)^6\approx 0{,}178;$

Закон распределения данной ДСВ X можно задать следующей таблицей:

X	0	1	2	3	4	5	6
P	0,000	0,004	0,033	0,132	0,297	0,356	0,178

Графическое представление дано на рисунке 4.3.

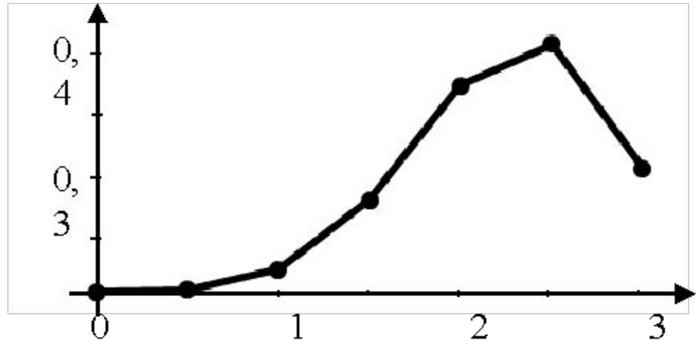

Рис. 4.3 Многоугольник распределения

Математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение определим по формулам (4.5), (4.6) и (4.3) соответственно. Получим

$$M(X) = np = 6 \cdot 0,75 = 4,5;$$

$$D(X) = npq = 6 \cdot 0,75 \cdot 0,25 = 1,25;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{1,25} \approx 1,12.$$

Моду $M_0(X)$ определим по закону распределения ДСВ X, представленному в виде таблицы. $M_0(X)=5$, так как при $X=5$ вероятность максимальная.

Медиана $M_e(X)=5$, так как при $X=5$ выполняются соотношения

$$P(X < M_e(X)) = P(X > M_e(X)) = \frac{1}{2}.$$

Практическая часть

Задание 1. В каждом из n независимых испытаний событие A происходит с постоянной вероятностью p. Случайная величина X – число наступлений события A в n испытаниях. Записать ряд распределения СВ X. Построить многоугольник распределения. Найти наивероятнейшее число наступлений события A в n испытаниях. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, моду и медиану данной СВ X.

Вариант			Вариант		
1.	7	0,31	**2.**	7	0,32
3.	7	0,33	**4.**	7	0,34
5.	7	0,35	**6.**	7	0,36
7.	7	0,37	**8.**	7	0,38
9.	7	0,39	**10.**	7	0,4
11.	8	0,41	**12.**	8	0, 42
13.	8	0,43	**14.**	8	0,44
15.	8	0,45	**16.**	8	0,46
17.	8	0,47	**18.**	8	0,48
19.	8	0,49	**20.**	8	0,5
21.	9	0,51	**22.**	9	0,52
23.	9	0,53	**24.**	9	0,54
25.	9	0,55	**26.**	9	0,56
27.	9	0,57	**28.**	9	0,58
29.	9	0,59	**30.**	9	0,6

Контрольные вопросы

1. Что называют случайное величиной?
2. Какую величину называют дискретной случайной величиной?
3. Что называют законом распределения дискретной случайной величины?
4. Что называют многоугольником распределения?
5. Как определяется функция распределения дискретной случайной величины?
6. Какими свойствами обладает функция распределения дискретной случайной величины?
7. Какой вид имеет график функции распределения дискретной случайной величины?
8. Является ли непрерывной функция распределения дискретной случайной величины?
9. Какими параметрами определяется схема испытаний Бернулли?
10. Какова формула Бернулли?

ЛАБОРАТОРНО-ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 5

ПОВТОРЕНИЕ НЕЗАВИСИСИМЫХ ИСПЫТАНИЙ

Цель работы:

- ознакомление с формулой Пуассона, локальной и интегральной формулами Муавра – Лапласа;
- применение изученных формул при нахождении законов распределения дискретной случайной величины.

Краткие теоретические сведения

Пусть производится серия из n независимых испытаний, в каждом из которых случайное событие A («успех») может произойти с вероятностью p, а может не произойти («неудача») с вероятностью q=1-p.

Если число опытов n велико, а вероятность успеха p мала ($n \to \infty, p \to 0$), то применяют приближенную *формулу Пуассона*

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \qquad (5.1)$$

где $\lambda = np$ – параметр распределения Пуассона (приложение 4).

Если m_1, m_2 – целые числа, такие, что $0 \leq m_1 \leq m_2 \leq n$, то вероятность того, что успех наступит не менее m_1 и не более m_2 раз в n испытаниях, находится по формуле

$$P(m_1 \leq m \leq m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} P_n(m).$$

В случае, когда n велико, а p и q не малы ($npq \geq 9$), используют приближенную *локальную формулу Муавра – Лапласа*:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\,\varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right), \qquad (5.2)$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$. Функция $\varphi(-x) = \varphi(x)$. Значения функции $\varphi(x)$ приведены в Приложении 2.

Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал ($k_1 \leq k \leq k_2$), определяется *интегральной формулой Муавра – Лапласа*:

$$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}\right), \qquad (5.3)$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2}dt$ - функция Лапласа.

Функция Лапласа нечётная, то есть $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Значения функции $\Phi(x)$ приведены в Приложении 3

Решение типовых заданий

Задание 1. В каждом из 700 независимых испытаний событие A происходит с постоянной вероятностью 0,35. Найти вероятность того, что событие A происходит:

а) точно 270 раз;

б) меньше чем 270 и больше чем 230 раз;

в) больше чем 270 раз.

Решение.

а) Известно, что $n = 700$, $p = 0,35$, $k = 270$. Необходимо найти $P_{700}(270)$. Используем локальную формулу Муавра – Лапласа (5.2). Находим:

$$\sqrt{npq} = \sqrt{700 \cdot 0,35 \cdot 0,65} = \sqrt{159,25} \approx 12,6$$

$$x = \frac{270 - 700 \cdot 0,35}{12,6} = \frac{25}{12,6} \approx 1,98$$

Значение функции *φ(x)* найдем из таблицы (Приложение 2);

$$\varphi(1,98) = 0,05618, \qquad P_{700}(270) = \frac{0,05618}{12,6} \approx 0,0045$$

б) Известно, что $n = 700$, $p = 0,35$, $a = 230$, $b = 270$.

Необходимо найти $P_{700}(230 < k < 270)$.

Используем интегральную формулу Муавра – Лапласа (5.3).

Ко всему списку заданий.

Находим:

$$\sqrt{npq} \approx 12{,}6;$$

$$x_1 = \frac{230 - 700 \cdot 0{,}35}{12{,}6} \approx 1{,}19$$

$$x_2 = \frac{270 - 700 \cdot 0{,}35}{12{,}6} \approx 1{,}98$$

Значения функции $\Phi(x)$ найдем из таблицы (Приложение 3):

$$P_{700}(230 < k < 270) = \Phi(1{,}98) - \Phi(-1{,}19) = \Phi(1{,}98) - 1 + \Phi(1{,}19)$$

$$= 0{,}97615 - 1 + 0{,}088298 = 0{,}85913.$$

в) Известно, что $n = 700$, $p = 0{,}35$, $a = 270$, $b = 700$. Необходимо найти $P_{700}(270 < k)$.

Имеем: $\sqrt{npq} \approx 12{,}6$; $x_1 \approx 1{,}98$; $x_2 = \frac{700 - 700 \cdot 0.35}{12.6} \approx 36{,}1$.

Применив формулу (5.4), получим $P_{700}(270 < k) = P_{700}(270 < k < 700) =$

$$= \Phi(36{,}1) - \Phi(1{,}98) = 1 - 0{,}97615 = 0{,}02385$$

Задание 2. На телефонной станции неправильное соединение происходит с вероятностью 1/200. Найти вероятность того, что среди 200 соединений имеет место:

а) точно 1 неправильное соединение,

б) меньше чем 3 неправильных соединений,

в) больше чем 2 неправильных соединений.

Решение.

Здесь вероятность события мала, поэтому применим формулу Пуассона (5.1).

Решение.

а) Известно, что $n = 200$, $p = 1/200$, $k = 1$. Необходимо найти $P_{200}(1)$.

Находим параметр распределения Пуассона $\lambda = 200 \cdot \frac{1}{200} = 1$.

Из таблицы распределения Пуассона (Приложение 4) определяем

$$P_{200}(1) = 0,3679.$$

б) Известно, что n=200, p=1/200, k< 3. Необходимо найти $P_{200}(k < 3)$.

При λ=1 из таблицы распределения Пуассона (Приложение 4) определяем

$P_{200}(k < 3) = P_{200}(0) + P_{200}(1) + P_{200}(2)$ = 0,3639+0,3639+0,1830=0,9197.

в) Известно, что n=200, p=1/200, k> 2. Необходимо найти $P_{200}(k > 2)$.

Имеем $\lambda = 1$, $P_{200}(k > 2) = 1 - P_{200}(k < 3) = 1 - 0,9197 = 0,0803$.

Ко всему списку заданий.

Практическое задание

Задание 1. В каждом из n независимых испытаний событие A происходит с постоянной вероятностью p. Найти вероятность того, что событие A происходит:

1) точно M раз;
2) меньше чем M и больше чем L раз;
3) больше чем M раз.

Значения параметров n, p, M, L вычислить по формулам:

$n = 700 + 10V$, $p = 0{,}35 + V/100$, $M = 270 + 10V$, $L = M - 40 - V$,

где V – номер варианта.

Задание 2. На телефонной станции неправильное соединение происходит с вероятностью p. Найти вероятность того, что среди n соединений имеет место:

1) точно G неправильных соединений;
2) меньше чем L неправильных соединений;
3) больше чем M неправильных соединений.
4) Значения параметров n, p вычислить по формулам:

$D = 100V + 200$, $p = 1/D$, $S =$остаток $(V/7) + 1$, $n = SD$,

$G=$остаток $(V/5) + 1$, $L=$остаток $(V/6) + 3$, $M =$остаток $(V/8) + 2$,

где V – номер варианта.

Контрольные вопросы

1. Какова приближенная формула Пуассона?
2. В каком случае применяется формула Пуассона?
3. Какова приближенная локальная формула Муавра – Лапласа?
4. Когда применяется локальная формула Муавра – Лапласа?
5. Какой функцией является функция $\varphi(x)$ – четной или нечетной?
6. Какова интегральная формула Муавра – Лапласа?
7. Когда применяется интегральная формула Муавра – Лапласа?
8. Какой функцией является функция $\Phi(x)$ – четной или нечетной?

ЛАБОРАТОРНО-ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 6

НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Цель работы:

- ознакомление с основными понятиями, касающимися непрерывных случайных величин;
- изучение основных числовых характеристик непрерывных случайных величин;
- применение полученных теоретических знаний на практике.

Краткие теоретические сведения

Закон распределения непрерывной случайной величины (НСВ) X задается или *функцией распределения*, или *функцией плотности вероятности*. Функция распределения НСВ X выражается формулой

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt, \qquad (6.1)$$

где $f(x) \geq 0$ – функция плотности вероятности, причём $f(x) = F'(x)$.

Свойства плотности вероятности:

1) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1;$

2) $f(x) = F'(x);$

3) $P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$

График функции распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины является непрерывной кривой. График функции плотности называется *кривой распределения*.

Основными числовыми характеристиками непрерывной случайной величины являются *математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение, мода и медиана*.

Математическим ожиданием случайной величины X называют число $M(X)$, определяемое соответственно формулой (предполагается, что интеграл сходится абсолютно)

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx, \qquad (6.2)$$

причем $f(x)$ – плотность вероятности.

Дисперсия НСВ X определяется формулой

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx - M^2(X). \qquad (6.3)$$

Средним квадратическим отклонением случайной величины называется квадратный корень из дисперсии этой величины:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} \qquad (6.4)$$

Модой (M_0(X)) НСВ X называется такое значение случайной величины, в которой функция плотности вероятности $f(x)$ имеет максимум.

Медианой ДСВ X называется такое ее значение $M_e(X)$, для которого

$$P(X < M_e(X)) = P(X > M_e(X)) = \frac{1}{2}.$$

Говорят, что НСВ X распределена *по нормальному закону* (или *по закону Гаусса*), если ее плотность распределения вероятностей имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (6.5)$$

где $a = M(X)$, $\sigma = \sigma(X)$.

Функция распределения нормального закона выражается формулой

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt = 0{,}5 + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right), \qquad (6.6)$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – функция Лапласа (Приложение 1).

Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в интервал $(\alpha;\, \beta)$ определяется формулой

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right). \qquad (6.7)$$

Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины X в интервал $(a-\varepsilon;\ a+\varepsilon)$, симметричный относительно центра рассеяния a, находится по формуле

$$P(|X-a| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right). \qquad (6.8)$$

Примеры заданий:

Задание 1

Задание 2

Задание 3

Задание 4

Задание 1. Случайная величина *X* задана функцией плотности вероятности

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x/2, & 0 < x \le 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

Найти функцию распределения *F(x)* случайной величины *X.* Вычислить для *СВ X,* математическое ожидание *M(X)*, дисперсию *D(X),* среднее квадратическое отклонение, моду и медиану.

Решение. Функцию распределения *F(x)* найдем по формуле (6.1):

$$F(x) = \int_0^x \frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{4}\Big|_0^x = \frac{x^2}{4}, 0 \le x \le 2.$$

Поэтому

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x^2/4, & 0 < x \le 2 \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Математическое ожидание М (X) вычисляем по формуле (6.2):

$$M(X) = \int_0^2 x \cdot \frac{x}{2}dx = \frac{x^3}{6}\Big|_0^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

Для нахождения дисперсии *X* воспользуемся формулой (6.3):

$$M(X^2) = \int_0^2 x^2 \frac{x}{2} dx = \frac{x^4}{8}\Big|_0^2 = \frac{16}{8} = 2;$$

$$D(X) = 2 - (4/3)^2 = 2 - \frac{16}{9} = 2/9.$$

Ко всем заданиям.

Среднее квадратическое отклонение $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{2}{9}} \approx 0{,}4713$.

Мода НСВ X $M_0(X)=2$, так как именно в этой точке функция $f(x)$ имеет максимум.

Для нахождения медианы решим уравнение $F(x) = 0{,}5$. В нашем случае $\frac{x^2}{4} = \frac{1}{2}$. Решая уравнение, получим $x = \pm\sqrt{2}$. Очевидно, что $M_e(X)=\sqrt{2}$, так как $\sqrt{2} \in (0;2]$.

Задание 2. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x^2/4, & 0 < x \le 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

Найти функцию плотности вероятности *f(x)* случайной величины *X*. Построить график функции *f(x)* и *F(x)*.

Решение. Функция плотности вероятности f(x), вычислим по формуле *f(x)* = $F'(x)$, в результате получим:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{x}{2}, & 0 < x \le 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

Графики функций изображены на рис.6.1 и рис. 6.2

Ко всем заданиям.

← →

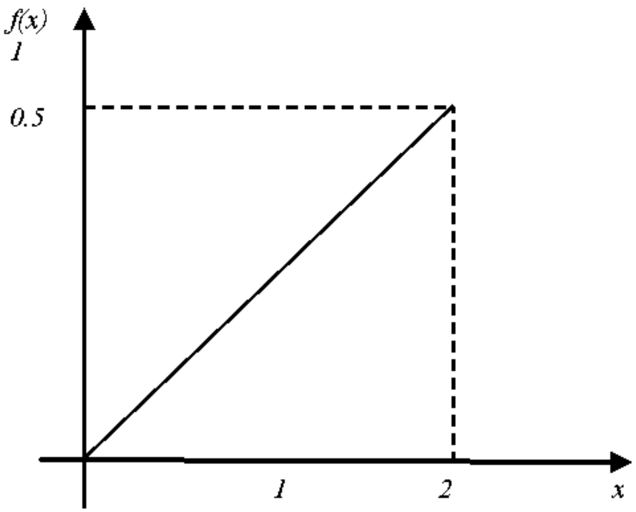

Рис.6.1 График функции $f(x)$

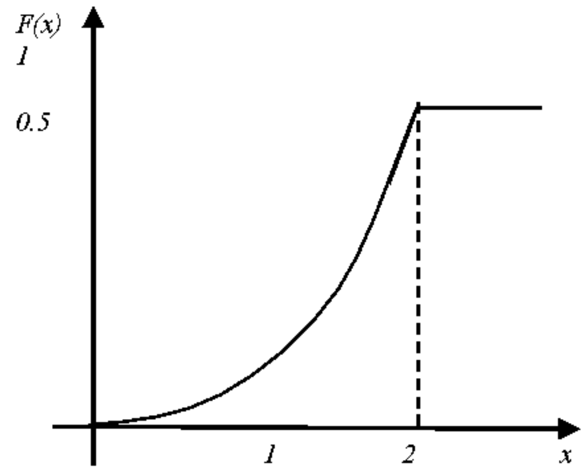

Рис.6.2 График функции $F(x)$

Математическое ожидание $M(X)$, дисперсия $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ вычисляются аналогично предыдущему примеру.

Задание 3. Рост взрослой женщины является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с параметрами: $a = 170$ см, $\sigma = 5$ см. Найдите плотность распределения вероятностей.

Решение.

Поскольку плотность распределения вероятностей в общем случае имеет вид $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, представленный в формуле (6.5), то при известных значениях $a = 170$ см, $\sigma = 5$ см будет выглядеть так: $f(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-170)^2}{50}}$.

Ко всем заданиям.

Задание 4. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $a = 7$ и $\sigma = 1$. Найти вероятность того, что случайная величина X принимает значения:

а) из интервала $[1, 9]$;

б) меньшее 1;

в) большее 9;

г) отличающиеся от своего среднего a по абсолютной величине не больше чем на 6.

Решение.

а) Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины X в заданный интервал $(\alpha; \beta)$ определяется формулой (6.7), получаем:

$$P(1 \le X \le 9) = \Phi\left(\frac{9-7}{1}\right) - \Phi\left(\frac{1-7}{1}\right) = \Phi(2) - \Phi(-6) = 0{,}4772 + 0{,}4999 =$$
$$= 0{,}9771$$

б) Вероятность того, что случайная величина X принимает значения меньшие a, определяется формулой $P(X < x) = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) + 0{,}5$.

Ко всем заданиям.

Отсюда получаем:

$$P(X < 1) = \Phi\left(\frac{1-7}{1}\right) + 0,5 = \Phi(-6) + 0,5 = -0,4999 + 0,5 = 0,0001.$$

в) Вероятность того, что случайная величина X принимает значения большие b, определяется формулой

$$P(X > b) = 0,5 - \Phi\left(\frac{b-a}{\sigma}\right)$$

Отсюда получаем:

$$P(X > 9) = 0,5 - \Phi\left(\frac{9-7}{1}\right) = 0,5 - \Phi(2) = 0,5 - 0,4772 = 0,0228.$$

г) Для нахождения вероятности отклонения случайной величины X от среднего a не более чем на ε применим формулу (6.8).

Получим:

$$P(|X - 7| < 6) = 2\Phi\left(\frac{6}{1}\right) = 2\Phi(6) = 2 \cdot 0,4999 = 0,9998.$$

Ко всем заданиям.

Практическое задание

Задание 1

Задание 2

Задание 3

Контрольные вопросы

Практическое задание

Задание 1. Случайная величина X задана функцией плотности вероятности

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x/k, & 0 < x \le k \\ 1, & x > k \end{cases}$$

Найти:

а) плотность распределения вероятностей случайной величины X.

б) математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение случайной величины X;

в)построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

Значение параметра k вычислить по формуле

$k = 3 + V,$

где V – номер варианта.

Ко всем заданиям.

Задание 2. Случайная величина *X* задана функцией плотности вероятности

$$\boxtimes\boxtimes\boxtimes\boxtimes = \begin{cases} 0, & \boxtimes \le 0 \\ \boxtimes\boxtimes/\boxtimes, & 0 < \boxtimes \le \boxtimes \\ 0, & \boxtimes > \boxtimes \end{cases}$$

Найти:

а) функцию распределения *F(x)* случайной величины *X*.

б) математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение случайной величины X;

в)построить графики функций *f(x)* и *F(x)*.

Значения параметров вычислить по формулам

$k = 2 + V$, $r = \xi\overline{2\boxtimes}$

Ко всем заданиям. ← →

Задание 3. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами m, σ. Найти вероятность того, что эта случайная величина принимает значения:

1) в интервале (a, b);

2) меньше K;

3) больше L;

4) отличающееся от своего среднего m по абсолютной величине $\le \varepsilon$.

Значения параметров для различных вариантов указаны в табл. 6.1.

Ко всем заданиям.

← →

Таблица 6.1

Вариант	m	σ	a	b	K	L	ε
1	1	3	-1	5	-1	5	2
2	2	4	-1	8	-1	8	3
3	3	5	-1	11	-1	11	4
4	4	6	-1	14	-1	14	5
5	5	7	4	7	4	7	1
6	6	8	4	10	4	10	2
7	7	9	4	13	4	13	3
8	8	2	4	16	4	16	4
9	9	3	4	19	4	19	5
10	10	4	9	12	9	12	1
11	11	5	9	15	9	15	2
12	12	6	9	18	9	18	3
13	13	7	9	21	9	21	4
14	14	8	9	24	9	24	5
15	15	9	14	17	14	17	1
16	16	2	14	20	14	20	2
17	17	3	14	23	14	23	3
18	18	4	14	26	14	26	4
19	19	5	14	29	14	29	5
20	20	6	19	22	19	22	1
21	21	7	19	25	19	25	2
22	22	8	19	28	19	28	3
23	23	9	19	31	19	31	4
24	24	2	19	34	19	34	5
25	25	3	24	27	24	27	1
26	26	4	24	30	24	30	2

Ко всем заданиям.

Контрольные вопросы

1. Какую величину называют непрерывной случайной величиной?
2. Как определяется функция распределения непрерывной случайной величины?
3. Какими свойствами обладает функция распределения непрерывной случайной величины? Какой вид может иметь график функции распределения непрерывной случайной величины?
4. Что называют плотностью распределения вероятности непрерывной случайной величины? Какой вид имеет её график?
5. Какими свойствами обладает плотность распределения вероятности?
6. Как выражается функция распределения через плотность распределения?
7. Как выражается плотность распределения вероятности через функцию распределения?
8. Что такое среднее квадратическое отклонение?
9. Как найти моду непрерывной случайной величины?
10. Как найти медиану непрерывной случайной величины?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 7

ВАРИАЦИОННЫЕ РЯДЫ И ИХ ГРАФИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ

Цель работы:

- приобретение навыков построения дискретных и интервальных вариационных рядов и их графических изображений;
- составление эмпирической функции распределения.

Краткие теоретические сведения

Генеральная совокупность – совокупность всех однородных объектов, подлежащих изучению.

Выборка (выборочная совокупность) – совокупность объектов, случайно отобранных из генеральной совокупности. *Объемом совокупности* (генеральной или выборочной) называется число ее объектов.

Пусть при изучении некоторого признака X генеральной совокупности получена выборка со следующими значениями признака: x_1, x_2, x_3, …, x_n. Последовательность наблюдаемых значений признака, расположенных в возрастающем порядке, называется *вариационным рядом*, а сами значения *вариантами*.

Вариационный ряд называется *дискретным,* если он представляет собой выборку значений дискретной случайной величины. Ряд называется *непрерывным(интервальным)*, если он представляет выборку значений непрерывной случайной величины.

Если среди вариант дискретного вариационного ряда имеются равные, то получают *статистический ряд* или *статистическое распределение выборки*:

Варианты	x_1	x_2	x_3	…	x_k
Частоты	n_1	n_2	n_3	…	n_k

где n_i – частота варианты x_i, причем $\sum n_i = n$, n – объем выборки.

Относительной частотой или *частостью* варианты x_i называется $\omega_i = n_i/n$ ($i = 1, \ldots, k$).

При изучении непрерывных случайных величин строят *интервальный вариационный ряд*. Для этого интервал, в котором заключены все значения признака, разбивают на несколько частичных полуинтервалов одинаковой длины h и находят для каждого интервала сумму частот вариант, попавших в этот интервал. Полученные частичные интервалы и соответствующие им частоты называются интервальным вариационным рядом:

Интервалы	$[x_0, x_1)$	$[x_1, x_2)$	$[x_2, x_3)$	…	$[x_{k-1}, x_k)$
Частоты	n_1	n_2	n_3	…	n_k

Число интервалов k для построения интервального ряда находится по формуле $k = 1 + 1{,}4\ln n$.

Тогда длина интервала h равна

$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k}$, где $x_{\max} - x_{\min} = R$ – размах выборки.

Для графического изображения дискретного вариационного ряда используется полигон частот. *Полигон частот* – это ломанная, соединяющая точки (x_1, n_1), (x_2, n_2), (x_3, n_3), …, (x_k, n_k).

Для графического изображения интервального вариационного ряда используется гистограмма частот. *Гистограмма частот* – это ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиною h, а высоты равны частотам n_i.

Изучаемый признак генеральной совокупности является случайной величиной. Эта случайная величина имеет функцию распределения $F(x)$, которая называется *теоретической функцией распределения*. Для ее оценки используется эмпирическая функция распределения $F^*(x)$, которая строится по выборочным данным и определяется формулой (7.1):

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, \ x \le x_1, \\ \dfrac{n_1}{n}, \ x_1 < x \le x_2, \\ \dfrac{n_1 + n_2}{n}, \ x_2 < x \le x_3, \\ \ldots \\ \sum\limits_{i=1}^{m-1} \dfrac{n_i}{n}, \ x_{m-1} < x \le x_m, \\ 1, \ x > x_k. \end{cases} \qquad (7.1)$$

Значениями эмпирической функции распределения $F^*(x)$ являются так называемые *накопленные частости*.

Практическое задание

[Задание 1]

[Задание 2]

[Задание 3]

Практическое задание

Задание 1

По выборке A (Приложение 1) выполнить с помощью калькулятора следующие задания:

– составить статистический ряд;

– вычислить относительные частоты (частости) и накопленные частости;

– построить полигон частот статистического ряда;

– составить эмпирическую функцию распределения и построить ее график.

Задание 2

По выборке B(приложение1) выполнить с помощью калькулятора следующие задания:

– составить интервальный вариационный ряд;

– вычислить относительные частоты (частости);

– построить гистограмму частот интервального вариационного ряда.

Ко всем заданиям.

← →

Задание 3

По данным выборок A и B (Приложение 1) выполнить следующие задания с использованием табличного процессора Excel и сравнить полученные результаты с данными ручного счета:

а) построить полигон частот дискретного вариационного ряда A;

б) построить гистограмму частот интервального вариационного ряда B.

Ко всем заданиям.

Решение типового варианта

Задание 1

По выборке A построить статистический ряд; вычислить относительные частоты (частости) и накопленные частости; построить полигон частот статистического ряда; составить эмпирическую функцию распределения и построить ее график.

Решение

Пусть задана выборка A:

7	8	4	0	4	6	5	4	3	2	4	8	6	2	2
5	3	6	6	5	5	3	5	6	7	8	9	5	2	5
4	5	6	6	3	6	5	3	4	5	10	3	7	5	3
3	3	7	5	3	4	9	2	1	4	4	4	2	4	3
4	4	5	5	3	7	5	3	2	6	2	4	4	4	0
6	1	3	4	4	5	4	8	3	5	4	11	9	9	

Составим статистический ряд, вычислим относительные частоты (частости), накопленные частости.

Ко всем заданиям.

Составим статистический ряд, вычислим относительные частоты (частости), накопленные частости.

По результатам вычислений заполним табл. 7.1.

Т а б л и ц а 7.1

Варианты	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
n_i	2	2	8	15	20	17	10	5	4	4	1	1
ω_i	2/89	2/89	8/89	15/89	20/89	17/89	10/89	5/89	4/89	4/89	1/89	1/89
$\omega_i^{нак}$	2/89	4/89	12/89	27/89	47/89	64/89	74/89	79/89	83/89	87/89	88/89	1

В первой строке табл. 7.1 приведены значения вариант, во второй строке – соответствующие частоты (n_i), в третьей и четвертой строках соответственно относительные частоты (ω_i) и накопленные частности ($\omega_i^{нак}$).

В первой строке табл. 7.1 приведены значения вариант, во второй строке – соответствующие частоты (n_i), в третьей и четвертой строках соответственно относительные частоты (ω_i) и накопленные частности ($\omega_i^{нак}$). Далее построим полигон частот статистического ряда A (рис. 7.1).

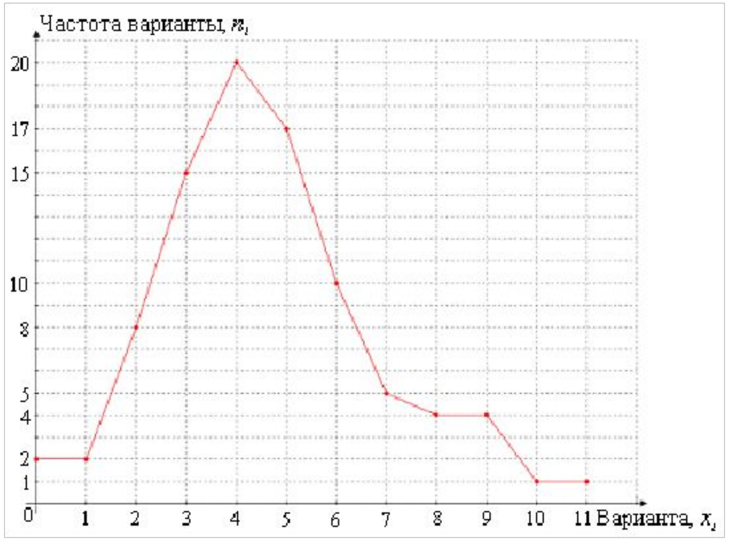

Рис. 7.1. Полигон частот

Эмпирическую функцию распределения $F^*(x)$ находим, используя формулу (7.1) и накопленные частости из табл. 7.1.

Получим:

$$F^*(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 2/89, & 0 < x \le 1, \\ 4/89, & 1 < x \le 2, \\ 12/89, & 2 < x \le 3, \\ 27/89, & 3 < x \le 4, \\ 47/89, & 4 < x \le 5, \\ 64/89, & 5 < x \le 6, \\ 74/89, & 6 < x \le 7, \\ 79/89, & 7 < x \le 8, \\ 83/89, & 8 < x \le 9, \\ 87/89, & 9 < x \le 10, \\ 88/89, & 10 < x \le 11, \\ 1, & x > 11. \end{cases}$$

При построении графика $F^*(x)$ откладываем значения функции в интервале от 0 до 1 (рис. 7.2).

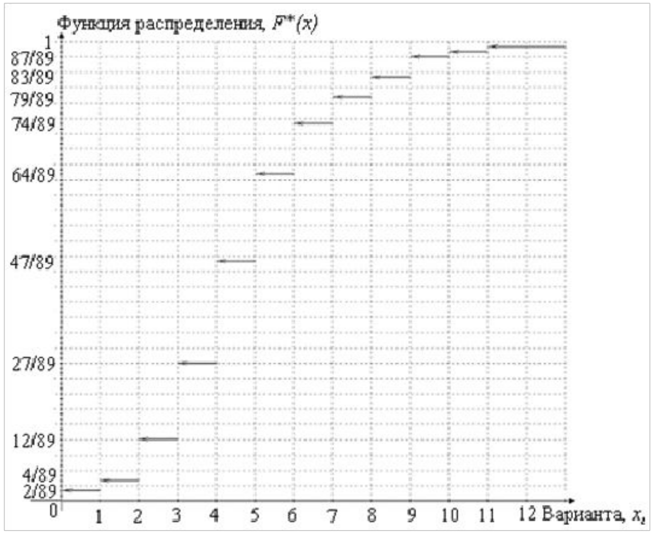

Рис. 7.2. График эмпирической функции распределения

Ко всем заданиям.

Задание 2

По выборке *B* составить интервальный вариационный ряд; вычислить относительные частоты (частости) и накопленные частости; построить гистограмму частот интервального вариационного ряда.

Решение

Пусть задана выборка *B*:

107	78	93	81	80	92	126	93	67	50	104	110
120	91	101	91	120	88	69	74	102	65	48	71
103	67	95	112	112	86	99	99	103	122	112	102
92	69	105	106	124	46	72	75	126	73	106	75
80	92	68	112	127	88	93	74	131	51	117	145
96	76	71	138	104	120	67	92	130	99	94	92
97	105	84	78	100	98	114	113	94	108	76	88
91	78	96	81	116	75	120	75	62	113	109	111
127	63	87	86	66	100	75	84	95	121	103	95
70	98	67	148	95	92	105	114	98	102	41	76
114	90	97	111	93	110	79	63	109	69	108	71
111	100	136	92	84	123	84	125	102	96	72	102
90	136	87	132	137	100	102	88	65	75	114	79
122	63	115	90	78	86	122	119	87	115	96	137
106	105	88	75	100	84	71	123	121	94	114	94
93	118	94	102	109	86	45	97	93	43	48	114
85	79	124	89	104	108	108	100	106	102	105	119
71	86	115	82	101							

Ко всем заданиям.

Объем выборки $n = 209$.

Найдем размах выборки $R = x_{\max} - x_{\min} = 148 - 41 = 107$.

Число интервалов для построения интервального вариационного ряда находим по формуле

$k = 1 + 1{,}4\ln n$ или $k = 1 + 1{,}4\ln 209 \approx 8{,}48 \approx 9$.

Тогда длина частичного интервала равна

$$h = \frac{x_{max} - x_{\min}}{k} = \frac{107}{9} = 11{,}8 \approx 12.$$

Следовательно, строим интервальный вариационный ряд с шагом

$h = 12$. Результаты вычислений занесем в табл. 7.2.

Таблица 7.2

Интервалы	[41,53)	[53,65)	[65,77)	[77,89)	[89,101)	[101,113)	[113,125)	[125,137)	[137,148)
n_i	8	4	32	31	48	42	29	10	5
ω_i	8/209	4/209	32/209	31/209	48/209	42/209	29/209	10/209	5/209
$\omega_i^{нак}$	8/209	12/209	44/209	75/209	123/209	165/209	194/209	204/20	1

Гистограмма частот вариационного ряда будет иметь следующий вид (рис. 7.3).

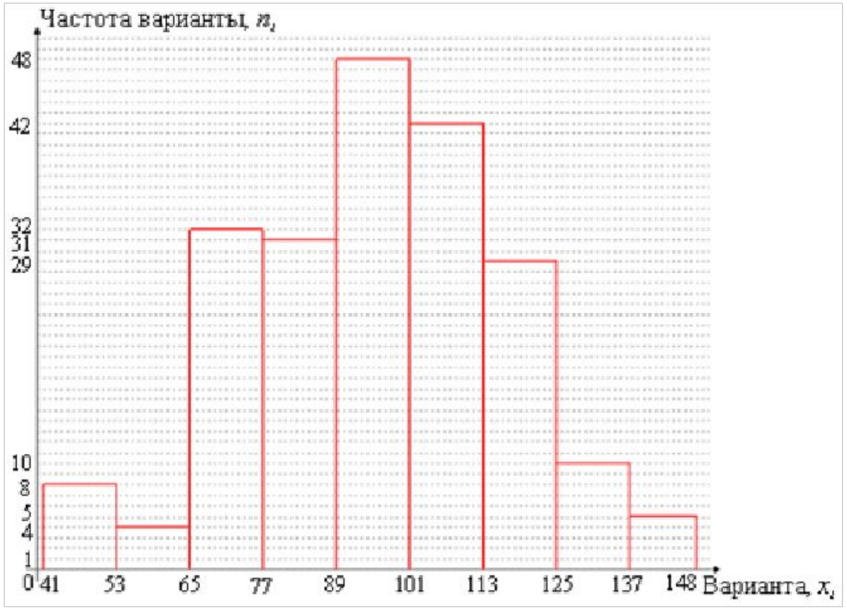

Рис. 7.3 Гистограмма частот

Ко всем заданиям.

Задание 3

а) По данным выборки *А* построить полигон частот вариационного ряда с использованием табличного процессора Excel.

Решение

В средства табличного процессора Excel для обработки статистических данных входит *Пакетанализа.* Для выполнения лабораторной работы надо использовать средство *Гистограмма,* котороевычисляет частоты ряда данных в интервалах, а также может выводить соответствующие графики. Можно указать границы интервалов (карманы). Обычно задают верхние границы интервалов.

Ко всем заданиям.

Вводим в поле страницы Excel исходные данные: в столбец Авводим все значения выборки, в столбец В – варианты (рис. 7.4).

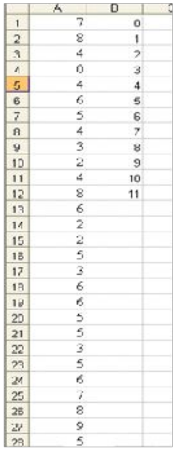

Рис. 7.4 Исходные данные

Дальше выбираем *Сервис / Анализ данных / Гистограмма* (рис. 7.5).

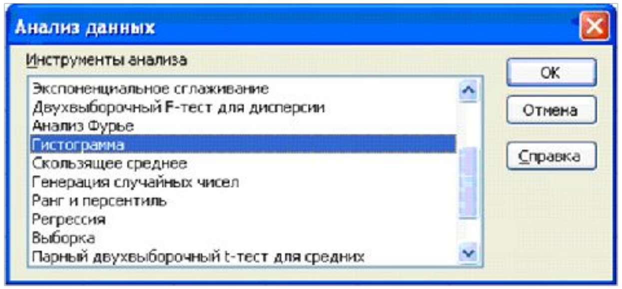

Рис. 7.5 Диалоговое окно программы

В открывшемся окне заполняем поля: *Входной интервал* – данные столбца А, *Интервал карманов*– столбец В. Нажимаем ОК (рис. 7.6).

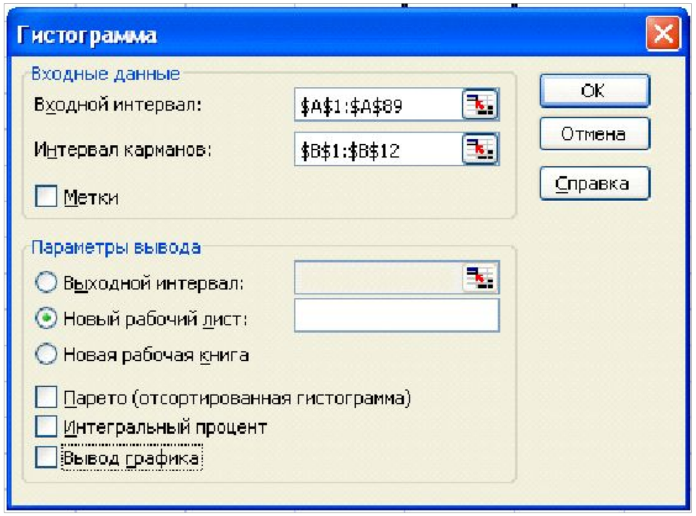

Рис. 7.6 Задание параметров расчета

В результате получаем значения вариант (столбец А) и их частоты (столбец В), что изображено на рис. 7.7. По этим данным мы можем построить полигон частот статистического ряда с помощью *Мастера диаграмм* (тип диаграммы *График*)(рис. 7.8).

	A	B
1	*Карман*	*Частота*
2	0	2
3	1	2
4	2	8
5	3	15
6	4	20
7	5	17
8	6	10
9	7	5
10	8	4
11	9	4
12	10	1
13	11	1
14	Еще	0

Рис. 7.7 Данные статистического ряда

Рис. 7.8 Полигон частот

б) По данным выборки *B* построить гистограмму частот интервального вариационного ряда с использованием табличного процессора Excel.

Решение

Вводим в поле страницы Excel исходные данные: в столбец А вводим все значения выборки, в столбец В – правые границы частичных интервалов. Далее выбираем *Сервис / Анализ данных / Гистограмма*. В открывшемся окне заполняем поля: *Входной интервал* – данные столбца А, *Интервал карманов* – столбец В и ставим галочку напротив пункта *Вывод графика*

Нажимаем ОК (рис. 7.9). В результате получаем интервальный вариационный ряд (рис. 7.10).

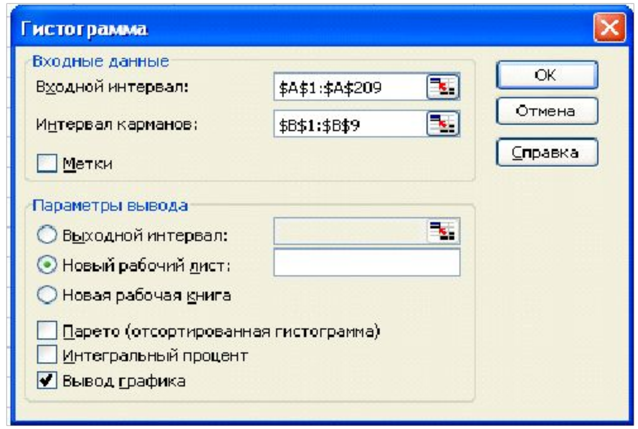

Рис. 7.9 Задание параметров расчета

	A	B
1	*Карман*	*Частота*
2	53	8
3	65	6
4	77	30
5	89	32
6	101	49
7	113	42
8	125	28
9	137	11
10	148	3
11	Еще	0
12		

Рис. 7.10 Данные интервального ряда

Далее получаем гистограмму частот интервального вариационного ряда B (рис. 7.11).

Рис. 7.11 Гистограмма частот

Ко всем заданиям.

Контрольные вопросы

1. Что такое вариационный ряд?
2. Как строятся вариационные ряды по дискретному признаку?
3. Как строятся вариационные ряды по непрерывному признаку?
4. Что такое полигон частот?
5. Что такое гистограмма частот?
6. С помощью какого средства табличного процессора Excel можно построить полигон частот?
7. С помощью какого средства табличного процессора Excel можно построить гистограмму?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 8

ТОЧЕЧНЫЕ И ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Цель работы:

- формирование умений вычисления несмещенных оценок среднего значения, дисперсии и среднего квадратического отклонения генеральной совокупности;
- формирование умений построения доверительных интервалов.

Краткие теоретические сведения

Статистические оценки параметров распределения. Пусть известно распределение генеральной совокупности, но неизвестны ее числовые характеристики. Одной из задач математической статистики является нахождение оценок неизвестных параметров по выборке.

Оценки неизвестных параметров бывают *точечные* и *интервальные*.

Выборочная характеристика, используемая в качестве приближенного значения неизвестного параметра генеральной совокупности, называется ее *точечной статистической оценкой* или *статистикой.* Точечная оценка определяется одним числом.

Пусть θ – неизвестная характеристика генеральной совокупности. Ее точечной оценкой называется любая функция $\overline{\theta}_n$, от значений выборки $\overline{\theta}_n = \overline{\theta}_n(x_1, ..., x_n)$.

Для того чтобы точечная оценка хорошо представляла числовую характеристику генеральной совокупности, она должна обладать следующими свойствами:

1) оценка $\overline{\theta}_n$ неизвестного параметра θ называется ***несмещенной***, если ее математическое ожидание равно неизвестному параметру θ, т.е. $M(\overline{\theta}_n) = \theta$.

Если $M(\overline{\theta}_n) \neq \theta$, то оценка называется смещенной;

2) оценка называется *состоятельной*, если

$$\lim_{n\to\infty} P(|\overline{\theta}_n - \theta| < \varepsilon) = 1, \forall \varepsilon > 0.$$

На практике это означает, что чем больше объем выборки, тем точнее оценка.

Точечные оценки числовых характеристик генеральной совокупности.

Пусть выборки получены из генеральных совокупностей, имеющих нормальное распределение.

1. *Выборочную среднюю* $\overline{x}$ *принимают в качестве оценки генеральной средней а.*

Это несмещенная и состоятельная оценка.

Выборочная средняя вычисляется по формулам:

а) для несгруппированных данных:

$\overline{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$, где n – объем выборки;

б) для статистического ряда:

$\overline{x} = \dfrac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + ... + x_k \cdot n_k}{n}$, где n – объем выборки.

2. *В качестве точечной оценкигенеральной дисперсии* σ^2 *принимают исправленную дисперсию* S^2. Это несмещенная и состоятельная оценка.

Исправленная дисперсия S^2 находится по формуле:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_B, \qquad (8.1)$$

где D_B – выборочная дисперсия, n – объем выборки.

Выборочная дисперсия D_B вычисляется по формулам:

а) для несгруппированных данных:

$D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$, где $\bar{x}$ –выборочная средняя;

б) для статистического ряда:

$D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i$, где $\bar{x}$ –выборочная средняя;

n – объем выборки.

3. В качестве оценки *генерального среднего квадратического отклонения* σ принимают стандартное отклонение S:

$S = \sqrt{S^2}$,

где S^2 – исправленная выборочная дисперсия.

Интервальные оценки числовых характеристик генеральной совокупности. *Интервальной* называют оценку, которая определяется двумя числами – концами интервалов.

Пусть θ – неизвестный параметр генеральной совокупности и $\overline{\theta}_n$ – его точечная оценка, полученная по выборке. Обозначим через δ – точность оценки, т. е. $\left|\theta - \overline{\theta}_n\right| < \delta$. Для получения интервальной оценки строим *доверительный* интервал.

Для этого задаем доверительную вероятность (или надежность) γ и находим значение δ из соотношения:

$P\left(\left|\theta - \overline{\theta}_n\right| < \delta\right) = \gamma$, где γ – вероятность, близкая к единице.

Раскроем неравенство: $P\left(-\delta < \theta - \overline{\theta}_n < \delta\right) = \gamma$. Получим

$$P\left(\overline{\theta}_n - \delta < \theta < \overline{\theta}_n + \delta\right) = \gamma.$$

Это означает, что интервал $\left(\overline{\theta}_n - \delta; \overline{\theta}_n + \delta\right)$ заключает в себе (покрывает) неизвестный параметр θ с вероятностью γ.

Доверительный интервал – это интервал $\left(\overline{\theta}_n - \delta; \overline{\theta}_n + \delta\right)$, который покрывает неизвестный параметр θ с заданной надежностью γ.

Доверительные интервалы для числовых характеристик нормальной генеральной совокупности. Пусть генеральная совокупность имеет нормальное распределение.

1. *Доверительный интервал для генеральной средней a* имеет следующий вид:

$$\left(\bar{x}-\frac{t_{n-1}\cdot S}{\sqrt{n}};\quad \bar{x}+\frac{t_{n-1}\cdot S}{\sqrt{n}}\right), \qquad (8.2)$$

где $\bar{x}$ – выборочная средняя;

t_{n-1} – находится по таблице распределения Стьюдента (приложение 5) с $(n-1)$ степенями свободы для двусторонней критической области с вероятностью $\alpha = 1-\gamma$,

где γ – доверительная вероятность;

S – стандартное отклонение, полученное по выборке; n – объем выборки.

Значение $\delta = \dfrac{t_{n-1}\cdot S}{\sqrt{n}}$ называется предельной ошибкой выборки.

2. *Доверительный интервал для дисперсии* σ^2 генеральной совокупности:

$$\left(\frac{(n-1)\cdot S^2}{U_2};\quad \frac{(n-1)\cdot S^2}{U_1}\right), \tag{8.3}$$

где n – объем выборки; S^2 – исправленная выборочная дисперсия;

U_1 и U_2 – значения из таблицы распределения χ^2(приложение6) с $(n-1)$ степенями свободы при условии, что

$P(\chi^2_{n-1} > U_2) = \frac{1-\gamma}{2}$; $P(\chi^2_{n-1} > U_1) = \frac{1+\gamma}{2}$.

3. *Доверительный интервал для среднего квадратического отклонения* σ генеральной совокупности:

$$\left(\frac{\sqrt{n-1}\cdot S}{\sqrt{U_2}};\quad \frac{\sqrt{n-1}\cdot S}{\sqrt{U_1}}\right), \tag{8.4}$$

где n – объем выборки;

S – стандартное отклонение; U_1 и U_2 – находятся по таблице распределения χ^2(приложение 6) с $(n-1)$ степенями свободы из условия, что

$P(\chi^2_{n-1} > U_2) = \frac{1-\gamma}{2}$; $P(\chi^2_{n-1} > U_1) = \frac{1+\gamma}{2}$.

4. *Определение объема выборки.*

Иногда нужно проводить исследования с заданной точностью δ. В этом случае необходимо рассчитать объем выборки n по формуле:

$$n = \frac{t^2_{n-1} \cdot S^2}{\delta^2}, \qquad (8.5)$$

где t_{n-1} – значение распределения Стьюдента (приложение 5) с $(n - 1)$ степенями свободы для двусторонней критической области с $\alpha = 1 - \gamma$,

где γ – доверительная вероятность;

S^2 – исправленная выборочная дисперсия;

δ – точность оценки.

Практическое задание

Задание 1

Вычислить по данным F1 выборки C (Приложение 1) несмещенные оценки генеральной средней a, дисперсии σ^2 и среднего квадратического отклонения σ: $\bar{x}$, S^2, S.

Задание 2

Построить доверительные интервалы для средней a, дисперсии σ^2 и среднего квадратического отклонения σ генеральной совокупности при доверительной вероятности(надежности) γ, если из генеральной совокупности получена выборка F1, используемая в задании 1.

$$\gamma = \begin{cases} 0{,}9, & V \le 10, \\ 0{,}98, & 10 < V \le 20, \\ 0{,}8, & 20 < V \le 30. \end{cases}$$

Ко всем заданиям.

Задание 3

Считая выборки, заданные в задании 1 пробными, определить минимальный объем выборки n для нахождения доверительного интервала для среднего значения a генеральной совокупности с точностью δ и доверительной вероятностью $\gamma=0,95$.

$$\delta = \begin{cases} 0,2\,, & V \le 10, \\ 0,3\,, & 10 < V \le 20, \\ 0,4\,, & 20 < V \le 30. \end{cases}$$

Задание 4

а) Используя *Пакет анализа* табличного процессора Excel найти по данным выборки B (Приложение 1) несмещенные оценки генеральной средней a, дисперсии σ^2 и среднего квадратического отклонения σ.

б) Построить доверительный интервал для генеральной средней a при доверительной вероятности γ по данным выборки B (Приложение 1), используя инструмент *Пакет анализа* средство *Описательная статистика*.

$$\gamma = \begin{cases} 0,9, & V \le 10, \\ 0,95, & 10 < V \le 20, \\ 0,98, & V > 20. \end{cases}$$

Ко всем заданиям.

Решение типового варианта

Задание 1
Задание 2

Задание 3

Задание 4

Контрольные вопросы

Задание 1

Вычислить по выборке $F1$ несмещенные оценки генеральной средней a, дисперсии σ^2 и среднего квадратического отклонения σ: $\bar{x}, S^2, S$.

Решение.

Исходные данные:

$F1$: 114, 105, 103, 122, 118, 113, 107

Вычислим по данным выборки $F1$ выборочную среднюю $\bar{x}$, которая является несмещенной оценкой генеральной средней a по формуле

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

$$\bar{x} = \frac{114+105+103+122+118+113+107}{7} = 111{,}7.$$

Вычислим по данным выборки $F1$ исправленную дисперсию S^2, которая является несмещенной оценкой генеральной дисперсии σ^2 по формуле

$S^2 = \dfrac{n}{n-1} \cdot D_B$, где n – объем выборки;

Ко всем заданиям.

← →

D_B – выборочная дисперсия, которая вычисляется по формуле

$$D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2;$$

$$D_B = \frac{1}{7}\Big((114-111{,}7)^2 + (105-111{,}7)^2 + (103-111{,}7)^2 + (122-111{,}7)^2 +$$
$$+ (118-111{,}7)^2 + (113-111{,}7)^2 + (107-111{,}7)^2\Big) = 42{,}2.$$

Откуда $S^2 = \frac{7}{6}\cdot 42{,}2 = 49{,}2.$

Вычислим по данным выборки $F1$ стандартное отклонение S, которое является несмещенной оценкой генерального среднего квадратического отклонения σ по формуле

$$S = \sqrt{S^2}.$$

Имеем $S = \sqrt{49{,}2} = 7{,}01.$

Ко всем заданиям.

Задание 2

Построить доверительные интервалы для средней a, дисперсии σ^2 и среднего квадратического отклонения σ генеральной совокупности при доверительной вероятности $\gamma = 0{,}8$ по данным выборки $F1$.

Решение.

1) Построим доверительный интервал для средней генеральной совокупности, пользуясь формулой (8.2):

$$\left(\bar{x} - \frac{t_{n-1} \cdot S}{\sqrt{n}};\quad \bar{x} + \frac{t_{n-1} \cdot S}{\sqrt{n}}\right),$$

где $\bar{x}$ – выборочная средняя; t_{n-1} – значение распределения Стьюдента с $(n-1)$ степенями свободы для двусторонней критической области с $\alpha = 1 - \gamma$,

где γ – доверительная вероятность;

S – стандартное отклонение, полученное по выборке; n – объем выборки.

В нашем случае $\bar{x} = 111{,}7$, доверительная вероятность $\gamma = 0{,}8$, $\alpha = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$, $n = 7$, $S = 7{,}01$.

Ко всем заданиям.

⟵ ⟶

Из таблицы распределения Стьюдента (приложение 5) для двусторонней критической области найдем $t_{n-1} = t_6 = 1,44.$ Далее находим предельную ошибку выборки

$$\delta = \frac{t_{n-1} \cdot S}{\sqrt{n}} = \frac{1,44 \cdot 7,01}{\sqrt{7}} = 3,8.$$

Подставляем найденные значения в исходную формулу (8.2)

(111,7 – 3,8; 111,7 + 3,8) и получаем доверительный интервал **(107,9; 115,5).**

2) Доверительный интервал для дисперсии σ^2 генеральной совокупности строим по формуле (8.3)

$$\left(\frac{(n-1)\cdot S^2}{U_2} \; ; \quad \frac{(n-1)\cdot S^2}{U_1} \right),$$

где n – объем выборки; S^2 – исправленная выборочная дисперсия;

U_1 и U_2 – значения из таблицы χ^2 с $(n – 1)$ степенями свободы (приложение 6) при условии, что

$$P(\chi^2_{n-1} > U_2) = \frac{1-\gamma}{2}; \; P(\chi^2_{n-1} > U_1) = \frac{1+\gamma}{2}.$$

Имеем $n = 7$, $S^2 = 49{,}2$, число степеней свободы равно $n - 1 = \ = 7 - 1 = 6$.

$$P(\chi^2_{n-1} > U_2) = \frac{1-\gamma}{2} = \frac{1-0{,}8}{2} = 0{,}1, \text{ тогда } U_2 = 10{,}645.$$

$$P(\chi^2_{n-1} > U_1) = \frac{1+\gamma}{2} = \frac{1+0{,}8}{2} = 0{,}9, \text{ тогда } U_1 = 2{,}204.$$

Строим доверительный интервал по формуле :

$$\left(\frac{(n-1)\cdot S^2}{U_2}; \ \frac{(n-1)\cdot S^2}{U_1}\right) = \left(\frac{(7-1)\cdot 49{,}2}{10{,}645}; \ \frac{(7-1)\cdot 49{,}2}{2{,}204}\right) =$$

= (27,73; 133,94) и получаем **(27,73; 133,94).**

3) Доверительный интервал для среднего квадратического отклонения генеральной совокупности получаем, извлекая квадратные корни из концов доверительного интервала для дисперсии, по формуле (2.4).

Если доверительный интервал для дисперсии имеет вид

($27{,}73 < \sigma^2 < 133{,}94$), то доверительный интервал для среднего квадратического отклонения σ будет: $\left(\sqrt{27{,}73} < \sigma < \sqrt{133{,}94}\right)$, т. е. **(5,27; 11,57).**

Ко всем заданиям.

Задание 3

Считая выборку $F1$ пробной, определить минимальный объем выборки n для нахождения доверительного интервала для среднего значения a генеральной совокупности с точностью $\delta = 2$ и доверительной вероятностью $\gamma = 0{,}9$.

Решение.

Рассчитываем объем выборки по формуле (8.5)

$$n = \frac{t^2{}_{n-1} \cdot S^2}{\delta^2}.$$

Из решения задания 1 имеем $S^2 = 49{,}2$, $\delta^2 = 4$, значение t^2_{n-1} находим из таблицы распределения Стьюдента (приложение 5) с $n - 1 = 7 - 1 = 6$ степенями свободы для двусторонней критической области с $\alpha = 1 - \gamma = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$.

Получим $t_{n-1} = 1{,}94$. Откуда

$$n = \frac{1{,}94^2 \cdot 49{,}2}{4} = 46{,}3 \approx 47.$$

Ко всем заданиям.

← →

Задание 4

С помощью табличного процессора Excel найти по выборке B несмещенные оценки генеральной средней a, дисперсии σ^2 и среднего квадратического отклонения и найти доверительный интервал для среднего значения генеральной совокупности с надежностью $\gamma = 0{,}8$.

Решение.

Пусть имеем выборку B:

29, 30, 30, 32, 30, 30, 29, 31, 30, 29, 29, 29, 30, 29, 28, 29, 29, 27, 27, 28, 32, 29, 31, 33.

Для вычисления точечных оценок $\bar{x}, S^2$, S и построения доверительного интервала в программе Excel надо использовать инструмент *Пакет анализа* средство *Описательная статистика,* котороеслужит для создания статистического отчета, содержащего информацию о выборочной средней, выборочной дисперсии S^2, стандартном отклонении, моде, медиане (рис. 8.1).

Ко всем заданиям.

← →

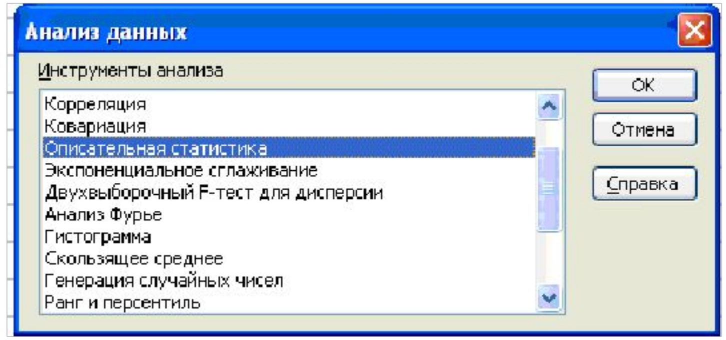

Рис. 8.1 Средство *Описательная статистика*

Вводим в лист таблицы Excel исходные данные, ставим флажок в поле *Итоговая статистика* и указываем в поле *Уровень надежности* заданную надежность $\gamma =$ 0,8(рис. 8.2).

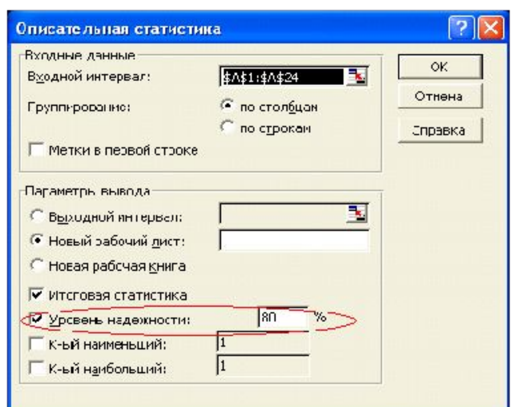

Рис. 8.2 Задание параметров расчета

Проанализируем полученные результаты (рис. 8.3):

– выборочная средняя (*среднее*) $\bar{x}$ = 29,58333333;

– исправленная дисперсия (*дисперсия выборки*)

S^2 = 2,166666667;

– стандартное отклонение S = 1,471960144;

– размах выборки (*интервал*) равен 6,

– объем выборки (*счет*) равен 24

В строке *Уровень надежности* находится предельная ошибка выборки δ = 0,396448633, с помощью которой формируется доверительный интервал $(\bar{x} - \delta; \quad \bar{x} + \delta)$.

Потому доверительный интервал имеет вид:

(29,58333333 – 0,396448633; 29,58333333 + 0,396448633).

Округляя значения, получим доверительный интервал **(29,187; 29,979)** для среднего значения генеральной совокупности с надежностью $\gamma = 0,8$.

	A	B
1	*Столбец1*	
2		
3	Среднее	29,58333333
4	Стандартная ошибка	0,300462606
5	Медиана	29
6	Мода	29
7	Стандартное отклонение	1,471960144
8	Дисперсия выборки	2,166666667
9	Эксцесс	0,358758299
10	Асимметричность	0,446576397
11	Интервал	6
12	Минимум	27
13	Максимум	33
14	Сумма	710
15	Счет	24
16	Уровень надежности(80,0%)	0,396448633

Рис. 8.3 Результаты расчета

Ко всем заданиям.

Контрольные вопросы

1. Что называется точечной оценкой неизвестного параметра распределения?
2. Что называется интервальной оценкой неизвестного параметра распределения?
3. Какие выборочные характеристики являются точечными оценками генеральной средней, генеральной дисперсии и среднего квадратического отклонения нормальной совокупности?
4. Что такое доверительная вероятность или надежность?
5. Что такое доверительный интервал?
6. Как строится доверительный интервал для генеральной средней нормальной совокупности?
7. Как строятся доверительные интервалы для генеральной дисперсии и среднего квадратического отклонения нормальной совокупности?
8. С помощью какого средства табличного процессора Excel можно найти точечные оценки параметров распределения и построить доверительный интервал для генеральной средней?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 9

ПРОВЕРКА ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

Цель работы:

- формирование умений и навыков проверки параметрических гипотез.

Краткие теоретические сведения

Статистическая гипотеза – утверждение о виде неизвестного распределения или о параметрах известных распределений.

Гипотеза, подлежащая проверке, называется *нулевой* или *основной* и обозначается H_0. *Конкурирующей (альтернативной)*называют гипотезу H_1, которая противоречит нулевой.

Для проверки нулевой гипотезы используют специально подобранную случайную величину K, которая называется *статистическим критерием*.

Вероятность отвергнуть гипотезу H_0, если она верна (т.е. принять гипотезуH_1),называется *уровнем значимости* и обозначается α.

Критической областью называется совокупность значений критерия, при котором нулевую гипотезу отвергают.

Областью принятия гипотезы называют совокупность значений критерия, при котором гипотезу принимают.

Критическими точками $x_{кр}$ называют точки, отделяющие критическую область от области принятия гипотезы.

Наблюдаемым значением критерия $K_{набл.}$ называют значение критерия, вычисленное по выборке.

Основной принцип проверки гипотез:

если наблюдаемое значение критерия принадлежит критической области, гипотезу отвергают; если наблюдаемое значение критерия принадлежит области принятия гипотезы, то ее принимают (нет оснований отвергнуть гипотезу).

Схема статистической проверки гипотез:

1) формулировка нулевой и альтернативной гипотез;
2) выбор уровня значимости и критерия для проверки основной гипотезы H_0;
3) нахождение критической точки, критической области и области принятия гипотезы;
4) вычисление значения критерия по выборке;
5) принятие решения.

Проверка параметрических гипотез. Гипотезы о параметрах известных распределений называются *параметрическими.*Предполагаем, что выборки получены из генеральных совокупностей, имеющих нормальное распределение.

1. Гипотеза *о равенстве двух средних значений.*

Пусть заданы две генеральные совокупности с нормальным распределением X и Y, которые имеют средние значения соответственно a_1 и a_2, при этом их дисперсии неизвестны, но должны быть равными. Из этих генеральных совокупностей получены выборки и рассчитаны числовые характеристики:

для совокупности X:	для совокупности Y:
n_1 – объем выборки;	n_2 – объем выборки;
$\bar{x}$ – выборочная средняя;	$\bar{y}$ – выборочная средняя;
S_1^2 – исправленная дисперсия.	S_2^2 – исправленная дисперсия.

Гипотеза H_0 состоит в том, что средние распределений равны,

т.е. H_0: $a_1 = a_2$, при этом H_1: $a_1 \neq a_2$

Для проверки нулевой гипотезы H_0: $a_1 = a_2$ при уровне значимости α используем критерий:

$$T = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{(n_1 - 1)\cdot S_1^2 + (n_2 - 1)\cdot S_2^2}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}. \qquad (9.1)$$

Если нулевая гипотеза H_0 верна, то она имеет распределение Стьюдента (приложение 5) с $(n_1 + n_2 - 2)$ степенями свободы.

Поскольку альтернативная гипотеза H_1: $a_1 \neq a_2$, то строим двухстороннюю критическую область. Критическую точку ищем по таблице Стьюдента (приложение 5) для двухсторонней критической области из условия: $P(|T| > x_{кр}) = \alpha$;

2. Гипотеза *о равенстве двух дисперсий.*

Пусть даны две генеральные совокупности X и Y с нормальными распределениями, причем их дисперсии σ_1^2 и σ_2^2 неизвестны, но есть основания считать их равными. Из этих совокупностей получены независимые выборки с параметрами:

для совокупности X:	для совокупности Y:
n_1 – объем выборки;	n_2 – объем выборки;
S_1^2 – исправленная дисперсия.	S_2^2 – исправленная дисперсия.

Требуется при уровне значимости α проверить нулевую гипотезу H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

Для проверки этой гипотезы в качестве критерия используем случайную величину:

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2},\ (S_1^2 > S_2^2). \qquad (9.2)$$

Если гипотеза H_0 верна, то случайная величина F имеет распределение Фишера (приложение 7) с $k_1 = n_1 - 1$ и $k_2 = n_2 - 1$ степенями свободы.

При альтернативной гипотезе H_1: $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ строим правостороннюю критическую область. Критическую точку ищем по таблице Фишера с k_1, k_2 степенями свободы из условия: $P(F > x_{кр}) = \alpha$.

Практическое задание

Задание 1

А) По данным F1 и F2 выборки C (Приложение 1) при уровне значимости α проверить гипотезу о равенстве средних значений H_0: $a_1=a_2$ при альтернативной гипотезе H_1: $a_1 \neq a_2$, если неизвестные дисперсии обеих совокупностей считать равными

$$\alpha = \begin{cases} 0{,}01, & V - \text{нечетное}, \\ 0{,}05, & V - \text{четное}. \end{cases}.$$

Б) Проверить гипотезу, используя *Пакет анализа* средство *Двухвыборочный t-тест с одинаковыми дисперсиями.*

Задание 2

А) По данным F1 и F2 выборки C при уровне значимости α проверить гипотезу о равенстве дисперсий H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ при альтернативной гипотезе H_1: $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$.

$$\alpha = \begin{cases} 0{,}05, & V - \text{четное}, \\ 0{,}01, & V - \text{нечетное} \end{cases}$$

Б) Проверить гипотезу, используя *Пакет анализа* средство *Двухвыборочный F-тест для дисперсии.*

Решение типового варианта

[Задание 1](#)
[Задание 2](#)

[Контрольные вопросы](#)

Задание 1

А) По данным F1 и F2 выборки C при уровне значимости $\alpha = 0{,}1$ проверить гипотезу о равенстве средних значении H_0: $a_1 = a_2$ при альтернативной гипотезе H_1: $a_1 \neq a_2$, если неизвестные дисперсии обеих совокупностей считать равными.

Исходные данные:

F1: 114, 105, 103, 122, 118, 113, 107.

F2: 120, 113, 109, 111, 102, 116, 113.

Решение.

Рассчитаем числовые характеристики выборок и получим:

для выборки F1: $\overline{x} = 111{,}71$, $S_1^2 = 49{,}24$, $n_1 = 7$;

для выборки F2: $\overline{y} = 112$, $S_2^2 = 32$, $n_2 = 7$.

Тогда нулевая и альтернативная гипотезы будут выглядеть так:

H_0: $a_1 = a_2$,

H_1: $a_1 \neq a_2$.

Для проверки нулевой гипотезы H_0: $a_1 = a_2$ при уровне значимости α используем критерий:

$$T = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{(n_1 - 1)\cdot S_1^2 + (n_2 - 1)\cdot S_2^2}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}.$$

[Ко всем вариантам.](#)

Так как альтернативная гипотеза имеет вид H_1: $a_1 \neq a_2$, то строим двустороннюю критическую область. Критическую точку $x_{кр}$ находим из таблицы распределения Стьюдента (приложение 5) для двусторонней критической области с $n_1 + n_2 - 2 = 7 + 7 - 2 = 12$ степенями свободы и уровнем значимости $\alpha = 0,1$. Получим $x_{кр} = 1,78$.

Тогда получаем, что при |T|>1,78 – критическая область, а при |T| < 1,78 – область принятия гипотезы.

Найдем наблюдаемое значение $T_{набл}$ по формуле(9.1)

$$T_{набл} = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{(n_1 - 1)\cdot S_1^2 + (n_2 - 1)\cdot S_2^2}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}} =$$

$$= \frac{111,71 - 112}{\sqrt{(7-1)\cdot 49,24 + (7-1)\cdot 32}} \cdot \sqrt{\frac{7\cdot 7(7+7-2)}{7+7}} = -0,08.$$

Следовательно, так как наблюдаемое значение $T_{набл}$ находится в области принятия гипотезы, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Б) Проверить гипотезу о равенстве средних значений H_0: $a_1 = a_2$ при альтернативной гипотезе H_1: $a_1 \neq a_2$ и уровне значимости $\alpha = 0{,}001$.

Исходные данные приведены на рис. 9.1.

F1		**F2**
133		138
134		125
141		131
132		137
139		151
132		140

Рис. 9.1 Исходные данные

Решение.

Проверим гипотезу, используя *Пакет анализа* средство *Двухвыборочный t-тест с одинаковыми дисперсиями* (рис. 9.2 и 9.3).

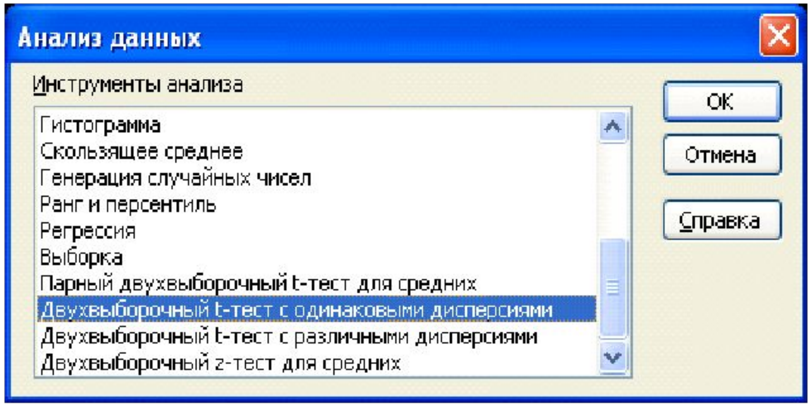

Рис. 9.2 Диалоговое окно программы

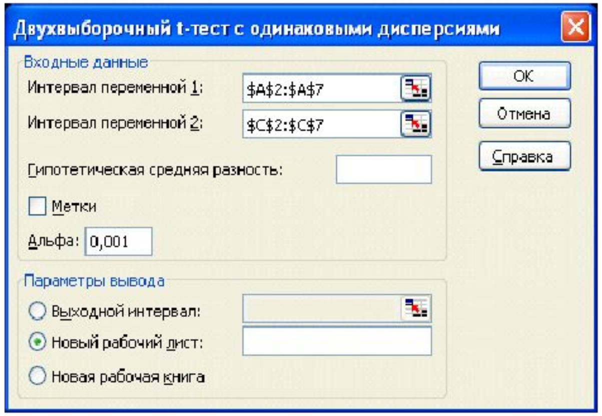

Рис. 9.3Диалоговое окно программы

Получаем вывод итогов, которые приведены на рис. 9.4

Двухвыборочный t-тест с одинаковыми дисперсиями		
	Переменная 1	*Переменная 2*
Среднее	135,1666667	137
Дисперсия	14,96666667	77,2
Наблюдения	6	6
Объединенная дисперсия	46,08333333	
Гипотетическая разность средних	0	
df	10	
t-статистика	-0,467767581	
P(T<=t) одностороннее	0,324989268	
t критическое одностороннее	4,143700493	
P(T<=t) двухстороннее	0,649978535	
t критическое двухстороннее	4,586893858	

Рис. 9.4 Вывод итогов

По виду альтернативной гипотезы строим двухстороннюю критическую область. Из рис. 9.4 видно, что $x_{кр} = 4{,}586893858$ (*t* критическое двухстороннее) и $|T| > 4{,}59$ – критическая область. Наблюдаемое значение $T_{набл} = -0{,}467767581$ (*t*-статистика) находится в области принятия гипотезы, значит нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Ко всем вариантам.

← →

Задание 2

А) По данным F1 и F2 выборки C при уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ проверить гипотезу о равенстве дисперсий

H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ при альтернативной гипотезе H_1: $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$.

Исходные данные:

F1: 114,105,103,122,118,113,107.

F2: 120,113,109,111,102,116,113.

Решение

Рассчитаем числовые характеристики выборок и получим

для выборки $F1$: $S_1^2 = 49{,}24$, $n_1 = 7$;

для выборки $F2$: $S_2^2 = 32$, $n_2 = 7$.

Тогда нулевая и альтернативная гипотезы будут выглядеть так:

H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$;

H_1: $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$.

Для проверки нулевой гипотезы при уровне значимости α используем критерий:

$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$, так как $S_1^2 > S_2^2$.

[Ко всем вариантам.](#) ⟵ ⟶

Если гипотеза H_0 верна, то случайная величина F имеет распределение Фишера (приложение 7) с $k_1 = 7 - 1 = 6$ и $k_2 = 7 - 1 = 6$ степенями свободы.

При альтернативной гипотезе H_1: $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ строим правостороннюю критическую область. Критическую точку ищем по таблице Фишера (приложение 7) с $k_1 = 6$, $k_2 = 6$ степенями свободы и уровнем значимости $\alpha = 0{,}01$: $P(F > x_{кр}) = 0{,}01$. Получим $x_{кр} = 8{,}47$.

Тогда получаем, что при $F > 8{,}47$ – критическая область, а при $F < 8{,}47$ – область принятия гипотезы.

Найдем наблюдаемое значение $F_{набл}$ по формуле (9.2)

$$F_{набл} = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{49{,}24}{32} = 1{,}54.$$

Так как наблюдаемое значение $F_{набл}$ находится в области принятия гипотезы, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Б) По данным F1 и F2 при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить *гипотезу о равенстве дисперсий* H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ при альтернативной гипотезе H_1: $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$, используя *Пакет анализа*.

Решение. Исходные данные:

F1: 138 143 135 137 145 128

F2: 128 134 141 126 139 140

Проверим гипотезу, используя *Пакет анализа* средство *Двухвыборочный F-тест для дисперсии*(рис. 9.5 и 9.6).

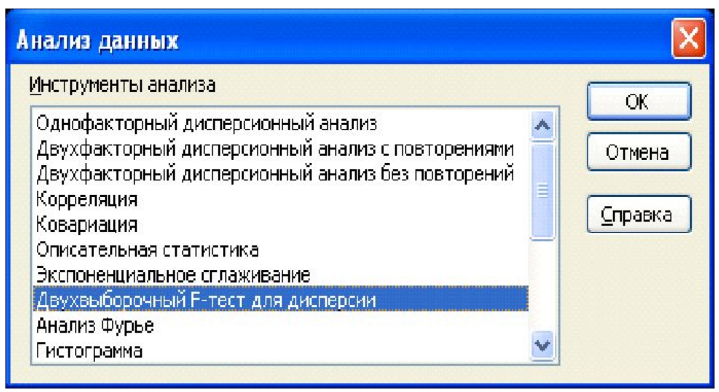

Рис. 9.5.Диалоговое окно программы

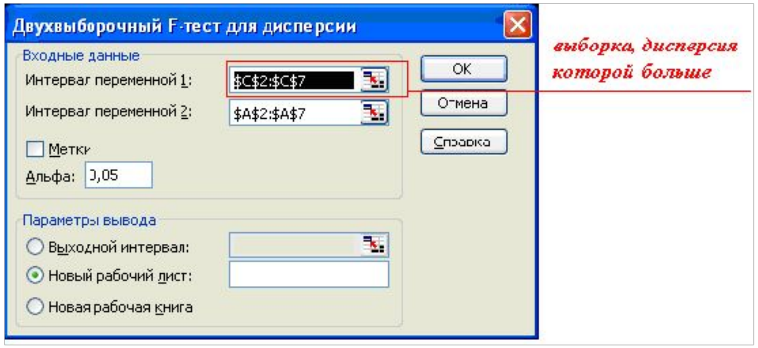

Рис. 9.6. Диалоговое окно программы

Получаем вывод итогов, которые приведены на рис. 9.7.

Двухвыборочный F-тест для дисперсии		
	Переменная 1	*Переменная 2*
Среднее	134,6666667	137,6666667
Дисперсия	41,46666667	36,66666667
Наблюдения	6	6
df	5	5
F	1,130909091	
P(F<=f) одностороннее	0,447952016	
F критическое одностороннее	5,050329058	

Рис. 9.7. Вывод итогов

По виду альтернативной гипотезы строим правостороннюю критическую область. Из рис. 9.7 видно, что критическая точка $x_{кр}$ = 5,050329058 (F критическое одностороннее) и при F> 5,05 –критическая область, а наблюдаемое значение критерия F =1,130909091. Так как F принадлежит области принятия гипотезы, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Ко всем вариантам.

Контрольные вопросы

1. Что называется нулевой и альтернативной гипотезами?
2. Что такое критическая область?
3. Что такое область принятия гипотезы?
4. Что называется критической точкой?
5. Что называется статистическим критерием?
6. Что называется наблюдаемым значением критерия?
7. Каков основной принцип проверки гипотез?
8. Какие гипотезы называются параметрическими?
9. Какое средство *Пакета анализа* табличного процессора Excel используется для проверки гипотезы о равенстве средних значений?
10. Какое средство *Пакета анализа* табличного процессора Excel используется для проверки гипотезы о равенстве дисперсий?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 10

ПРОВЕРКА НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

Цель работы:

- формирование умений проверки статистических гипотез о виде распределения;
- применение критерия согласия Пирсона для проверки гипотезы о законе распределения.

Краткие теоретические сведения

Гипотезы о виде распределения называются *непараметрическими*.

Пусть генеральная совокупность X имеет какое-то неизвестное распределение. Сделаем выборку из генеральной совокупности. На основании выборки, построив полигон или гистограмму или учитывая какие-то другие соображения, составим гипотезу о конкретном распределении генеральной совокупности.

Пусть генеральная совокупность имеет функцию распределения $F_{теор}(x)$. Тогда нулевая гипотеза имеет вид:

H_0: $F(x) = F_{теор}(x)$, а альтернативная H_1: $F(x) \neq F_{теор}(x)$.

По выборке мы можем найти эмпирическую функцию распределения $F^*(x)$. Гипотезу H_0 о распределение генеральной совокупности принимают тогда, когда эмпирическое распределение хорошо согласуется с теоретическим.

Критерий, с помощью которого проверяется гипотеза о предполагаемом законе распределения (гипотеза H_0), называется *критерием согласия*. Существуют критерии согласия Пирсона, Колмогорова и др.

Рассмотрим критерий согласия χ^2Пирсона.

Пусть данные выборки представлены в виде статистического ряда:

$x_1 x_2 \ldots x_k$

$n_1 n_2 \ldots n_k$где $m_i, \quad i = 1,\ldots,k$, - *эмпирические* частоты.

По выборке вычисляем оценки параметров теоретического распределения, а затем по теоретическому распределению находим *теоретические* частоты: $m_i, \quad i = 1,\ldots,k$.

Гипотеза H_0 верна, если теоретические и эмпирические частоты m_i и n_i достаточно мало отличаются друг от друга.

Для проверки гипотезы H_0 в качестве критерия берем случайную величину

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - m_i)^2}{m_i}. \qquad (10.1)$$

Если верна нулевая гипотеза, то эта статистика имеет распределение χ^2 с числом степеней свободы $k - r - 1$,где k – число групп (интервалов);r – число параметров, вычисленных по выборке.

В данной задаче строим правостороннюю критическую область, а критическую точку находим из условия: $P(\chi^2 > x_{кр}) = \alpha$ по таблицам χ^2-распределения, где α – уровень значимости.

Вычисляем по выборке наблюдаемое значение $\chi^2_{набл}$. Если $\chi^2_{набл} > x_{кр}$, то нулевую гипотезу отвергаем, если $\chi^2_{набл} \le x_{кр}$, то нет оснований нулевую отвергнуть гипотезу.

Проверка гипотезы о распределении генеральной совокупности по закону Пуассона. Пусть задано эмпирическое распределение дискретной случайной величины X. Требуется, используя критерий Пирсона, проверить гипотезу о распределении генеральной совокупности по закону Пуассона.

Для того чтобы при уровне значимости αпроверить гипотезу надо:

1)найти по заданному эмпирическому распределению выборочную среднюю $\overline{x}$;

2) принять в качестве оценки параметра λраспределения Пуассона выборочную среднюю $\lambda = \overline{x}$;

3) найти по формуле Пуассона (приложение 3) вероятности p_i появления ровно iсобытий в n испытаниях (i = 0, 1, …, k, где k – максимальное число наблюдавшихся событий, n – объем выборки).

4) найти теоретические частоты по формуле $m_i = n \cdot p_i$;

5) сравнить эмпирические и теоретические частоты с помощью критерия Пирсона χ^2, приняв число степеней свободы равным $k - 2$, где k – число групп. Критическую точку находим по таблице χ^2 (приложение 6) при уровне значимости α с числом степеней свободы $k - 2$.

Если $\chi^2_{набл} > x_{кр}$, нулевую гипотезу отвергаем, если $\chi^2_{набл} \le x_{кр}$, нет оснований отвергнуть гипотезу о распределении случайной величины X по закону Пуассона.

Практическое задание

Задание 1

По выборке A (Приложение 1) при уровне значимости α проверить гипотезу о распределении Пуассона соответствующей генеральной совокупности.

$$\alpha = \begin{cases} 0{,}01 & V - \quad \textit{нечетное} \\ 0{,}05 & V - \quad \textit{четное.} \end{cases}$$

Решение типового варианта

[Задание 1](#)

[Контрольные вопросы](#)

Задание 1

По выборке A при уровне значимости α = 0,1 проверить гипотезу о распределении Пуассона соответствующей генеральной совокупности.

Исходные данные:

Выборка A:

2 2 1 2 3 1 1 0 2 2 4 3 3 0 3 0 3 2 3 1 2

2 3 0 2 3 0 2 3 3 4 4 1 4 0 0 1 2 4 4 3 0

0 0 2 2 3 2 1 0 0 0 3 1 0 1 2 1 2 2 4 3 0

0 1 0 3 0 0 3 1 3 4 2 3 3 2 0 4

Решение.

1) По данным выборки построим вариационный ряд:

Варианты	0	1	2	3	4
Частоты	20	12	19	19	9

По заданному эмпирическому распределению найдем выборочную среднюю $\overline{x}$:

$$\overline{x} = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + ... + x_k \cdot n_k}{n} =$$

$$= \frac{0 \cdot 20 + 1 \cdot 12 + 2 \cdot 19 + 3 \cdot 19 + 4 \cdot 9}{79} = \frac{143}{79} = 1{,}81.$$

2) Примем в качестве оценки параметра λ распределения Пуассона выборочную среднюю $\lambda = \overline{x} = 1{,}81 \approx 2$.

3) Положив последовательно i = 0, 1, 2, 3, 4, найдем по формуле Пуассона (приложение 4) вероятности p_iпоявления ровно iсобытий в 79-тииспытаниях при $\lambda = 2$:

$P_0 = P_{79}(0) = 0{,}1353$, $P_1 = P_{79}(1) = 0{,}2707$,

$P_2 = P_{79}(2) = 0{,}2707$, $P_3 = P_{79}(3) = 0{,}1804$,

$P_4 = P_{79}(4) = 0{,}0902$

4) Найдем теоретические частоты по формуле $m_i = 79 \cdot p_i$ исоставимрасчетную таблицу (табл. 10.1).

Т а б л и ц а 10.1

x_i	n_i	p_i	$m_i = n \cdot p_i$	$n_i - m_i$	$(n_i - m_i)^2$	$\frac{(n_i - m_i)^2}{m_i}$
0	20	0,1353	10,69	9,31	86,6761	8,1081
1	12	0,2707	21,39	-9,39	88,1721	4,1221
2	19	0,2707	21,39	-2,39	5,7121	0,267
3	19	0,1804	14,25	4,75	22,5625	1,5833
4	9	0,0902	7,13	1,87	3,4969	0,4904
					$\chi^2_{набл} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_i - n_i)^2}{m_i}$	14,5709

Суммируя значения последнего столбца в расчетной табл. 10.1 или используя формулу (10.1), находим наблюдаемое значение критерия $\chi^2_{набл} = 14{,}5709$

Критическую точку находим по таблице χ^2 (приложение 6) по уровню значимости $\alpha = 0{,}1$ и числу степеней свободы $5 - 2 = 3$, получим $x_{кр} = 6{,}251$.

Так как $\chi^2_{набл} > x_{кр}$ – отвергаем гипотезу о распределении генеральной совокупности по закону Пуассона.

П р и м е ч а н и е. Для того чтобы по выборке A при уровне значимости α проверить гипотезу о распределении Пуассона соответствующей генеральной совокупности, можно запрограммировать таблицу в Excel, используя *Мастер функций*, категория *Статистические*.

Вероятности $p_i = P(X = x_i)$ находятся с помощью функции **ПУАССОН(х;среднее;ложь).**

Для нахождения критической точки используется статистическая функция **ХИ2.ОБР.ПХ(вероятность;степени_свободы).**

Ко всем вариантам.

Контрольные вопросы

1. Какие гипотезы называются непараметрическими?
2. Что такое критерий согласия?
3. Какие критерии согласия вам известны?
4. Что такое эмпирические частоты?
5. Что такое теоретические частоты?
6. Как находятся теоретические частоты при проверке гипотезы о распределении генеральной совокупности по закону Пуассона?
7. С помощью какой формулы сравнивают эмпирические и теоретические частоты по критерию Пирсона?
8. Какие статистические функции табличного процессора Excel используются для проверки гипотезы о распределении генеральной совокупности по закону Пуассона с помощью критерия Пирсона?

[Ко всем вариантам.](#) [Оглавление.](#)

Рекомендуемая литература

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей и математическая статистика. – Учебник - 5-е из-дание, стереотипное / Е.С. Вентцель. – М.: Высшая школа, 1998. – 576 с.
2. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для вузов. – 8-е изд., стер. / В.Е. Гмурман. – М.: Высш.шк., 2002. – 479 с.
3. Жевняк, Р.М. Высшая математика: Учебное издание. Ч. 5. / Р.М. Жевняк, А.А. Карпук. – Минск: Вышэйшая школа, 1988. – 254 с.
4. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по теории вероятностей и математической ста-тистике / Д.Т. Письменный. – М.: Айрис-пресс, 2004. – 256 с.
5. Калинина, В.Н. Математическая статистика: учеб. для студ. сред. спец. учеб. заведе-ний. – 3-е изд., испр. / В.Н. Калинина, В.Ф. Панкин. – М.: Высш.шк., 2001. – 336 с.
6. Горелова, Г.В. Теория вероятностей и математическая статистика в примерах и задачах с применением Excel: Учебное пособие для вузов (Изд. 3-е, доп. и перераб.) / Г.В. Горелова, И.А. Кацко / Серия «Высшее образование». – Ростов н/Д: Феникс, 2005. – 480 с.
7. Гусак, А.А. Теория вероятностей: справ. пособ. к решению задач / А.А. Гусак, Е.А. Бричикова. – 6-е изд. – Минск: ТетраСистемс, 2007. – 288 с.
8. Математика в примерах и задачах: учеб. пособие. В 2 ч. Ч.2 / Л.И. Майсеня [и др.]; под общ. ред. Л.И. Майсени. – Минск: Вышэйшая школа, 2014. – 430 с.

Оглавление.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

(справочное)

Выборки для задач математической статистики

Для каждого варианта заданы при выборки: *A*, *B и C*.

Все выборки одного варианта расположены последовательно. Перед названием выборки задан номер варианта.

- Вариант 1
- Вариант 2
- Вариант 3
- Вариант 4
- Вариант 5
- Вариант 6
- Вариант 7
- Вариант 8
- Вариант 9
- Вариант 10
- Вариант 11
- Вариант 12
- Вариант 13
- Вариант 14
- Вариант 15
- Вариант 16
- Вариант 17
- Вариант 18
- Вариант 19

Вариант 1

Выборка A1

0	4	2	0	5	1	1	3	0	2	2	4	3	2	3	3	0	4	5	1
3	1	5	2	0	2	2	3	2	2	2	6	2	1	3	1	3	1	5	4
5	5	3	2	2	0	2	1	1	3	2	3	5	3	5	2	5	2	1	1
2	3	4	3	2	3	2	4	2											

Выборка B1

135	133	123	132	104	152	134	130	129	120	122	124
117	123	123	129	121	122	125	131	147	124	137	112
126	128	111	129	115	147	131	132	137	119	125	120
129	125	123	127	132	118	133	132	132	134	131	120
135	132	125	132	108	114	121	133	133	135	131	125
114	115	122	131	125	132	120	126	115	117	118	188
132	134	127	127	124	135	128	127	115	144	129	120
137	127	125	116	132	120	117	127	118	109	127	122
120	135	116	118	133	136	125	126	119	126	129	127

Выборка C1

№	F1		F2		
1	52	36	43	52	37
2	49	42	51	42	45
3	45	48	44	40	55
4	44	37	47	38	47
5	34	37	34	37	39

Ко всем вариантам.

Вариант 2

Выборка А2

3	7	4	6	1	4	2	4	6	5	3	2	9	0	5	6	7	7	3	1
5	5	4	2	6	2	1	5	3	3	1	5	6	4	4	3	4	1	5	5
3	4	3	7	4	5	6	7	5	2	4	6	6	7	7	3	5	4	4	3

Выборка В2

95	96	103	89	72	105	85	85	91	101	82	91
80	85	91	87	101	94	98	85	82	94	86	72
89	83	100	86	85	95	95	83	87	92	92	79
93	88	77	92	92	103	85	90	83	86	104	104
85	86	80	95	91	93	70	83	93	95	95	78
111	95	94	84	64	87	85	87	87	81	82	97
101	86	89	80	88	85	93	79	95	90	107	93
96	83	88	91	95	94	88	80	96	93	77	71
88	97	90	86	93	91	98	95	83	84	91	99
95	91	88	91	81	88	78	75	80	97	95	83

Выборка С2

№	F1		F2		
1	48	45	41	49	45
2	33	41	41	46	36
3	53	49	34	41	46
4	43	42	38	41	36
5	38	43	50	47	37

Ко всем вариантам.

Вариант 3

Выборка А3

0	0	2	0	1	3	0	1	0	1	2	1	3	0	0	2	1	3	2	2
1	3	3	2	0	2	4	3	2	1	2	2	2	2	3	3	1	1	1	3
2	1	0	1	2	1	4	4	2	3	3	5	5	2	1	2	3	2	3	1
1	0	1	0	4	1	1	0	2	2	4	2	1	4	3	0	2	0	2	0
3	1																		

Выборка В3

29	22	16	20	16	18	28	20	32	22	23	26	10	25
29	29	19	12	26	18	20	9	24	20	19	26	23	11
30	23	30	18	20	13	17	24	28	26	21	26	24	36
23	24	25	20	23	17	11	22	19	19	25	29	23	16
15	18	17	19	21	12	24	30	33	22	15	18	26	22
25	23	21	22	22	25	16	25	19	17	30	13	25	19
17	24	16	23	15	22	22	19	20	19	33	14	17	21
24	13	20	19	17	13	27	25	25	19	22	22	22	23
11	22	24	18	19	18	31	16	18	24	14	23	26	25

Выборка С3

№	F1		F2		
1	114	106	110	88	99
2	96	107	92	94	100
3	113	99	113	100	114
4	98	95	110	99	95
5	100	102	116	112	111

Ко всем вариантам.

← →

Вариант 4

Выборка А4

3	3	1	0	0	3	3	5	3	0	0	4	1	5	1	6	5	4	7	4
5	3	3	0	2	3	1	4	1	2	4	3	4	5	4	0	5	6	6	3
5	4	1	3	3	6	3	1	1	5	2	3	5	3	3	4	1	5	6	1
3	3	3	5	6	1	2	1	3	4										

Выборка В4

58	78	84	62	63	100	55	90	102	70	66	89
71	92	71	93	83	42	110	110	56	96	95	87
88	102	104	88	64	96	92	67	78	95	71	105
50	66	73	76	100	72	86	46	102	95	98	84
82	46	60	94	109	93	79	74	62	97	94	91
81	71	89	78	85	50	93	64	65	109	89	55
103	98	108	68	65	71	82	70	84	73	65	79
99	81	92	76	82	95	75	45	94	81	84	68
77	90	103	119	57	102	100	83	68	69	68	81

Выборка С4

№	F1		F2		
1	20	18	18	26	29
2	28	17	12	23	18
3	14	19	18	16	21
4	11	26	20	13	21
5	20	11	21	22	18

Ко всем вариантам.

← →

Вариант 5

Выборка A5

0	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	2	0	0	0	1	1	1	1

Выборка B5

303	350	309	327	345	329	338	310	316	324	310	306
308	302	315	314	343	320	304	306	345	312	330	324
308	326	313	320	328	309	306	313	308	324	312	309
324	321	313	330	330	315	320	315	302	295	337	346
327	320	307	305	323	331	345	303	331	331	322	315
304	324	317	322	312	314	308	319	318	321	312	323
317	288	317	327	292	316	322	319	333	328	313	309
329	313	334	314	320	301	329	321	313	316	300	300
304	306	314	323	318	337	325	323	332	288	313	314

Выборка C5

№	F1		F2	
1	46	45	49	45
2	49	45	43	46
3	48	43	47	46
4	47	42	43	44
5	45	48	46	43
6	48	44	45	45

Ко всем вариантам.

Вариант 6

Выборка А6

0 10 7 6 3 7 8 7 4 7 10 7 3 9 3 1 5 8 10 11

6 5 7 6 3 8 4 3 8 4 10 6 8 7 8 7 7 7 4 6

7 10 4 4 0 5 4 4 8 5 5 10 7 3 8 5 6 6 6 3

5 7 8 5 7 10 9 10 8 2 3 3 6 9

Выборка С6

№	F1			F2			
1	20	24	30	30	31	24	30
2	25	30	22	22	19	23	31
3	22	29	28	28	34	22	21
4	42	22	17	17	14	17	14

Выборка В6

324	296	313	323	312	321	322	301	337	322	329	307
301	328	312	318	327	315	319	317	309	334	323	340
326	322	314	335	313	322	319	325	312	300	323	335
339	326	298	298	337	322	303	314	315	310	316	321
312	315	331	322	321	336	328	315	338	318	327	323
325	314	297	303	322	314	317	330	318	320	312	333
332	319	325	319	307	305	316	305	318	335	327	321
332	288	322	334	295	318	329	317	310	304	326	319
317	316	316	307	309	309	328	311	317	322	316	304

Ко всем вариантам.

Вариант 7

Выборка A7

2	2	1	3	4	2	1	3	3	4	3	2	4	3	2
1	4	3	1	4	0	4	2	3	4	3	1	3	3	3
4	3	2	1	2	3	3	1	5	3	0	2	1	2	3
0	0	3	6	2	4	3	4	2	4	1	2	0	3	1

Выборка B7

61	59	60	50	58	71	57	61	55	75	68	65	63	68	60
66	52	70	69	62	58	56	54	65	61	67	64	58	61	64
71	60	51	54	57	56	55	57	65	56	64	49	67	64	59
65	63	72	67	54	53	53	69	63	66	55	57	68	53	61
55	69	54	64	54	61	61	65	57	60	66	62	68	61	62
52	62	55	70	72	64	64	54	58	71	60	65	68	62	58
60	64	63	61	60	64	64	68	64	66	71	53	57	59	62

Выборка C7

№	F1		F2		
1	20	22	14	15	17
2	18	20	18	14	14
3	23	18	25	18	10
4	19	19	12	16	15
5	16	17	17	18	18

Ко всем вариантам.

← →

Вариант 8

Выборка A8

8	4	4	7	5	5	5	3	10	2	3	6	7	6	10	6	7	7	6
7	6	8	10	7	7	9	1	3	4	7	4	4	5	4	9	6	5	9
6	5	6	7	2	5	7	6	7	3	8	8	7	4	7	5	7	6	6
6	6	6	12	5	11	8	1	10	10	9	1	4	5	6	8	4	10	8

Выборка B8

78	85	52	53	62	56	58	68	98	58	94	84	57	68	64
61	64	62	53	89	66	54	62	57	64	66	35	53	73	57
62	54	75	52	59	72	54	66	46	44	57	63	86	63	61
59	54	83	53	71	64	60	48	77	47	51	54	60	67	85
54	66	64	82	78	70	88	61	63	77	41	62	69	60	64
64	66	80	71	53	99	58	63	43	56	51	70	73	76	73
60	58	59	67	53	50	74	78	60	78	55	58	67	76	69
73	85	50	63	50	74	78	60	78	68	72	65	87	62	72
51	68	65	64	72	72	70	70	78	50	56	66	73	45	60

Выборка C8

№	F1		F2		
1	55	57	58	57	54
2	58	59	60	55	57
3	56	58	59	57	58
4	59	56	62	59	60
5	57	54	58	56	59

Ко всем вариантам.

←　　　　→

Вариант 9

Выборка А9

2	1	2	3	1	1	0	2	2	4	3	3	0	3	0	3	2	3	1	2
2	3	0	2	3	0	2	3	3	4	4	1	4	0	0	1	2	4	4	3
0	0	0	2	2	3	2	1	0	0	0	3	1	2	1	2	1	2	2	4

Выборка В9

56	76	65	66	76	62	89	48	62	50	47	80
67	87	78	55	67	87	78	55	67	51	73	75
61	88	46	57	65	69	72	28	75	51	69	68
65	34	77	63	57	61	42	85	49	41	62	63
80	62	65	75	56	66	92	60	43	52	80	58
70	76	62	55	42	87	81	67	65	81	90	38
58	60	79	79	50	64	70	58	77	73	54	58
77	86	52	61	42	70	93	54	65	51	53	64
65	76	88	59	62	67	62	90	88	69	61	81

Выборка С9

№	F1			F2			
1	120	123	114	114	120	106	102
3	95	111	105	105	113	101	109
3	110	127	103	103	109	108	118
4	105	97	122	122	111	116	107

Ко всем вариантам.

Вариант 10

Выборка A10

3	5	8	4	5	4	7	2	7	7	3	7	4	4	5	4	4	5	2	4
8	8	4	6	5	9	4	0	4	4	4	9	3	3	2	1	5	2	5	5
3	4	4	7	8	9	9	4	5	2	5	7	6	1	2	5	6	3	1	2
6	7	3	3	2	5	4	8	2	6	5	9	5	5	2	8	3	6	4	6

Выборка B10

65	71	67	73	68	68	72	68	67	70	78	74	79	65	72
65	71	70	69	69	76	71	63	77	75	70	74	65	71	68
74	69	69	66	71	69	73	74	80	69	73	76	69	69	67
67	74	68	74	60	70	66	70	68	64	75	78	71	70	69
73	75	74	72	80	72	69	69	71	70	73	65	66	67	69
71	70	72	76	72	73	64	74	71	76	68	69	75	76	73
74	78	66	75	72	69	68	63	70	70	78	76	73	73	67
71	66	66	72	69	71	71	68	72	69	73	73	66	72	73

Выборка C10

№	F1		F2		
1	49	48	50	46	51
2	46	49	52	49	52
3	46	50	51	51	48
4	47	44	51	49	47
5	49	50	51	51	52

Ко всем вариантам.

Вариант 11

Выборка А11

4	5	6	1	1	6	2	2	8	4	5	5	4	2	3	4	7	5	4	7
3	3	4	4	3	8	4	3	5	5	2	1	4	3	5	1	4	3	3	3
1	0	2	2	1	7	5	2	6	2	1	1	8	4	5	4	1	4	5	4
4	2	3	4	3	3	9	2	6	2	3	2	7	1	4	7	3	5	7	2

Выборка В11

127	141	121	131	145	139	141	131	139	137	128	132
129	134	140	143	140	127	132	136	134	133	121	133
136	126	138	144	138	138	137	137	127	139	140	141
125	136	136	129	136	135	142	132	129	128	134	139
130	137	132	140	125	127	129	133	134	135	124	132
127	133	140	135	140	130	130	130	131	133	133	131
129	127	138	128	122	137	136	137	140	138	117	114
132	137	126	137	136	130	148	130	140	132	127	125
134	136	116	120	125	136	124	144	133	132	123	136
131	130	130	134	132	131	125	138	130	146	132	131

Выборка С11

№	F1		F2		
1	98	98	87	104	101
2	100	88	91	93	95
3	95	96	92	100	99
4	94	96	98	96	97
5	110	100	90	98	101

Ко всем вариантам.

← →

Вариант 12

Выборка A12

11	6	7	8	7	3	7	3	3	12	7	9	12	5	10
4	7	2	7	7	4	5	11	5	5	6	4	5	8	9
8	12	5	6	7	10	11	9	13	9	3	8	11	9	7
12	6	6	11	11	9	8	12	6	4	10	8	4	6	8
3	6	6	7	7	6	10	11	3	11	8	5	8	11	11

Выборка B12

103	120	129	105	131	138	113	87	117	109	109	113
162	139	101	98	114	116	94	125	108	119	130	127
116	124	137	140	151	102	115	127	121	110	131	106
112	96	112	112	120	100	118	104	106	123	112	134
106	107	115	130	140	104	127	125	117	109	106	109
112	90	111	138	112	97	124	128	105	122	118	126
84	138	123	119	121	116	120	101	118	102	102	120
145	117	110	138	107	127	119	127	128	90	95	92
105	131	118	127	105	139	92	122	116	111	111	101

Выборка C12

№	F1		F2			
1	75	54	38	35	45	67
2	66	62	65	46	56	43
3	71	59	43	65	38	48
4	66	47	37	50	39	70

Ко всем вариантам.

Вариант 13

Выборка A13

1	0	1	1	1	2	0	2	1	0	0	0	1	0	3	2	1	1	1	0
0	0	1	1	0	2	0	3	1	2	1	3	2	1	0	0	1	0	1	1
0	2	3	1	0	3	1	1	1	2	1	1	0	0	1	1	3	0	2	3

Выборка B13

71	74	51	87	37	72	64	77	63	58	50	39	71	48	39
44	62	59	50	91	51	65	54	70	50	46	66	44	71	72
58	52	58	72	62	47	58	69	58	72	42	70	84	65	65
49	45	53	50	73	47	21	40	74	35	49	58	44	50	74
53	66	67	64	62	49	67	41	67	57	56	60	71	46	79
72	48	38	51	37	60	58	52	58	55	50	64	68	53	70
59	59	90	72	61	74	36	79	65	68	39	54	86	49	48
59	44	68	52	60	42	78	29	68	79	78	68	70	66	45

Выборка C13

№	F1		F2		
1	126	112	133	131	135
2	133	137	139	143	148
3	140	152	157	127	151
4	118	140	142	121	139
5	167	121	155	127	140

Ко всем вариантам.

← →

Вариант 14

Выборка А14

6	6	5	6	11	8	7	4	4	8	3	2	3	9	7
6	9	5	8	8	7	10	8	6	9	9	10	3	10	5
7	6	8	9	9	3	8	4	11	4	6	9	2	8	7
7	7	8	4	3	6	12	10	2	3	8	6	8	2	3

Выборка В14

58	49	46	53	63	64	53	46	59	64	50	55	57	55	68
48	58	54	59	66	61	69	70	51	60	47	50	43	62	48
40	51	46	58	63	51	65	55	55	61	45	50	44	45	57
65	52	60	58	27	41	60	44	38	44	59	72	43	60	50
55	53	51	33	53	70	55	60	50	51	50	55	57	58	61
52	46	56	65	52	61	52	65	51	58	54	55	64	58	68
52	52	47	48	55	58	72	53	69	42	41	59	56	28	50
47	54	52	60	47	55	48	64	63	72	51	55	50	65	66

Выборка С14

№	F1		F2		
1	45	39	41	48	53
2	46	50	66	63	55
3	48	62	44	60	66
4	47	36	52	61	59
5	34	60	48	63	58

Ко всем вариантам.

← →

Вариант 15

Выборка A15

2	0	1	2	0	0	2	2	1	1	0	0	0	0	1	2	0	4	0	0
1	0	4	1	1	0	2	1	0	0	2	1	1	1	1	0	1	1	0	3
1	2	1	0	1	2	1	2	3	0	2	4	0	0	0	3	0	2	0	2

Выборка B15

174	166	157	161	165	161	164	172	158	161	163	164
160	154	171	160	168	171	161	162	168	164	166	159
172	154	154	154	153	159	160	173	150	166	157	177
165	168	152	168	164	158	153	164	174	179	159	165
167	169	164	168	151	174	166	169	170	159	162	153
175	178	157	170	174	169	159	154	165	167	161	168
157	182	175	170	155	164	174	167	170	159	160	153
151	169	155	143	163	155	173	166	164	186	161	158

Выборка C15

№	F1		F2		
1	46	88	83	64	69
2	75	63	66	61	68
3	63	69	49	65	54
4	56	79	79	66	64
5	70	47	71	71	76

Ко всем вариантам.

←   →

Вариант 16

Выборка A16

5	4	4	4	5	0	3	7	2	2	3	0	5	6	3	4	6	1	2	5
3	2	3	6	6	2	3	1	7	2	3	2	2	5	2	0	2	2	6	1
3	6	7	7	2	0	4	6	1	1	6	7	1	3	4	6	6	3	2	1

Выборка B16

79	56	46	50	67	39	53	49	42	57	49	20	45	83	15
54	43	82	54	49	27	56	49	26	46	72	41	38	29	65
59	61	41	21	42	71	55	46	71	68	37	67	36	33	38
39	59	39	42	45	55	45	54	87	72	68	44	33	17	63
69	52	67	66	47	54	56	39	40	61	73	50	49	72	57
77	54	70	45	49	50	41	39	61	70	44	42	42	71	57
70	55	45	36	40	71	17	48	49	48	72	48	53	28	44
64	11	66	37	12	36	15	55	39	72	61	68	42	48	72
48	28	40	32	26	69	33	50	78	56	61	36	44	36	52

Выборка C16

№	F1			F2			
1	71	71	83	70	70	70	84
2	75	72	77	79	63	72	75
3	79	75	66	71	77	68	69
4	72	61	76	77	62	67	73

Ко всем вариантам.

Вариант 17

Выборка A17

4	8	4	10	7	7	5	8	9	6	7	1	6	5	8
4	7	4	8	4	6	5	7	4	8	7	4	3	2	8
7	5	0	4	7	6	3	5	7	2	6	6	5	8	1
3	8	6	6	8	8	9	6	8	7	5	10	5	3	9
5	7	7	8	3	7	9	6	5	4	4	4	7	7	4
7	5	9	5	9	3	4	4	8	5	1	10	6	1	7

Выборка B17

21	66	28	40	37	58	44	32	60	33	47	55	47	37	31
41	45	45	41	42	27	33	33	63	51	53	46	37	23	36
43	78	38	43	46	37	46	47	48	59	30	37	60	42	49
32	61	37	54	42	26	30	60	40	65	50	63	53	47	61
47	34	30	62	44	39	25	49	48	51	43	50	44	64	45
54	21	40	25	59	40	48	54	38	42	34	46	31	30	75
70	59	45	57	45	33	51	47	58	32	36	42	37	47	32
28	69	33	45	38	42	30	29	18	57	46	45	47	37	58

Выборка C17

№	F1	F2		
1	93	87	100	79
2	79	86	94	91
3	93	88	104	97
4	96	97	102	92
5	91	99	89	91

Ко всем вариантам.

Вариант 18

Выборка A18

5	3	3	3	5	4	5	3	3	4	2	1	5	2	4	0	2	2	3	2
1	3	3	1	2	4	6	6	4	1	2	4	3	1	5	2	4	6	3	8
4	5	1	1	2	0	2	3	3	2	4	3	1	3	3	2	2	4	3	0

Выборка B18

52	40	47	54	40	54	41	74	45	45	51	76	58	37	40
42	53	54	65	46	65	61	55	38	66	42	56	54	40	60
43	49	77	64	53	64	58	54	56	53	43	35	56	34	59
58	66	49	49	57	48	42	46	52	59	50	62	50	55	55
46	53	51	50	60	30	48	56	29	74	52	60	44	62	23
54	40	33	20	55	42	61	54	41	45	72	59	41	51	45
54	52	62	69	65	49	48	63	52	46	44	55	60	54	39
82	67	68	34	56	51	56	48	53	47	59	51	59	66	48
61	42	54	33	39	47	46	47	73	63	34	44	51	46	40
43	30	60	61	53	47	42	56	70	48	45	65	48	48	51

Выборка C18

№	F1		F2		
1	58	57	60	52	59
2	59	54	54	56	54
3	53	56	51	53	57
4	51	53	56	55	54
5	56	54	53	56	62

Ко всем вариантам.

← →

Вариант 19

Выборка A19

2	2	0	1	3	0	3	3	0	0	1	0	1	0	0	1	4	1	0	0
0	2	0	1	1	0	1	2	1	2	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	2	3	0	4	1	1	1	0	0	2	0	4	1	1	0	0
0	0	0	2	1	1	3	1	3	0	3	1	1	0	1	0	1	1	1	3

Выборка B19

144	166	120	89	103	140	143	126	119	125	161	140
168	133	151	132	135	166	131	120	127	105	136	145
154	105	173	97	113	150	143	107	133	139	127	138
107	107	127	127	159	170	120	120	106	126	152	128
160	120	109	106	134	127	107	106	95	91	113	128
120	99	160	137	143	103	138	143	131	57	148	146
112	141	174	109	173	91	148	122	133	117	122	139
107	139	169	125	141	132	115	157	127	158	115	161

Выборка C19

№	F1			F2			
1	199	255	199	190	201	205	210
3	187	208	200	203	211	201	204
3	207	209	213	214	197	197	211
4	210	212	194	195	201	215	215

Ко всем вариантам.

Вариант 20

Выборка A20

2	4	2	4	3	3	3	2	0	6	1	2	3	2	2	4	3	3	5	1
0	2	4	3	2	2	3	3	1	3	3	3	1	1	2	3	1	4	3	1
7	4	3	4	2	3	2	3	3	1	4	3	1	4	5	3	4	2	4	5
3	6	4	1	3	2	4	1	3	1	0	0	4	6	4	7	4	1	3	5

Выборка B20

65	71	67	73	68	68	72	68	67	70	78	74	79	65	72
65	71	70	69	69	76	71	63	77	75	70	74	65	71	68
74	69	69	66	71	69	73	74	80	69	73	76	69	69	67
67	74	68	74	60	70	66	70	68	64	75	78	71	70	69
73	75	74	72	80	72	69	69	71	70	73	65	66	67	69
71	70	72	76	72	73	64	74	71	76	68	69	75	76	73
74	78	66	75	72	69	68	63	70	70	78	76	73	73	67
71	66	66	72	69	71	71	68	72	69	73	73	66	72	73
70	69	74	72	69	74	70	74	72	76	71	66	62	69	74

Выборка C20

№	F1		F2		
1	19	31	35	31	32
2	28	33	32	27	20
3	39	35	26	28	18
4	36	25	35	35	21
5	44	28	30	40	25

Ко всем вариантам.

Вариант 21

Выборка A21

4	5	3	4	5	2	3	3	3	4	4	5	3	1	4	1	4	5	5	1
2	5	5	5	3	4	3	5	5	4	0	2	6	7	1	3	2	2	4	2
3	3	6	0	6	2	4	3	6	1	5	4	4	4	5	2	4	5	3	5
5	6	2	2	3	2	2	5	2	5	5	0	7	1	0	0	0	5	3	2

Выборка B21

110	115	122	128	115	118	116	124	120	127	136
119	124	131	116	108	122	118	132	118	118	116
124	120	124	124	118	127	126	119	115	122	131
128	122	103	125	115	122	14	109	132	122	121
108	111	104	115	105	135	132	13	119	137	126
114	109	125	121	112	131	115	122	118	116	130
131	127	116	120	119	128	104	131	115	140	115
126	115	104	125	131	117	118	102	127	120	102
130	128	106	132	129	131	126	116	128	134	132
107	119	132	117	120	122	114	125	139	116	125
111	122	120	113	123	119	122	12	125	101	121

Выборка C21

№	F1		F2		
1	92	95	92	98	91
2	95	93	92	96	94
3	96	94	103	93	92
4	99	93	95	104	94
5	98	92	101	103	96

Ко всем вариантам.

Вариант 22

Выборка А22

2	3	1	6	4	6	3	3	1	3	1	2	4	4	4	3	0	3	2
2	3	2	3	3	2	0	6	1	0	2	2	6	2	0	2	4	3	1
3	0	4	4	3	5	3	2	5	2	0	2	0	2	5	0	1	3	3
0	2	2	2	5	0	0	1	0										

Выборка В22

184	181	201	178	190	188	181	180	186	180	176	186
185	184	187	176	189	194	196	190	193	180	186	195
197	189	197	190	176	200	196	188	203	191	180	181
188	185	188	173	184	180	189	178	190	175	193	184
177	179	177	203	185	182	191	183	183	211	189	177
195	196	175	188	189	187	193	185	184	193	181	185
214	177	196	195	193	172	190	200	176	179	185	182
175	180	179	170	206	181	197	197	180	193	192	200
175	196	174	171	160	187	185	206	187	182	175	172

Выборка С22

№	F1			F2		
1	63	50	65	35	46	43
2	51	40	45	34	57	60
3	40	44	34	47	36	53
4	47	43	53	46	41	57

Ко всем вариантам.

Вариант 23

Выборка A23

1	4	3	3	1	0	4	0	4	3	2	0	2	2	3	3	1	0	3	3
3	2	3	3	3	2	5	6	3	2	5	2	3	4	2	3	2	2	6	2
0	1	2	3	6	2	1	4	3	3	1	5	4	3	2	1	1	1	6	3
2	0	2	2	2	3														

Выборка B23

5	25	13	29	28	24	8	40	24	7	42	49	30	31
3	53	6	14	46	16	3	2	19	31	26	10	46	4
5	8	6	30	39	14	3	32	6	25	13	12	20	26
33	2	20	5	29	5	39	36	24	38	2	30	53	52
20	35	27	11	12	23	1	10	3	5	31	21	6	15
17	15	26	17	0	46	13	21	3	6	9	31	15	43
19	8	9	37	43	3	20	20	24	17	3	43	19	36
6	14	6	24	5	50	4	24	6	43	17	22	37	19
9	3	34	7	19	18	14	19	15	26	6	52	5	26

Выборка C23

№	F1			F2			
1	86	91	97	96	88	88	95
2	103	93	95	94	91	87	90
3	100	94	99	93	106	90	91
4	97	97	94	95	87	86	94

Ко всем вариантам.

← →

Вариант 24

Выборка A24

7	11	5	5	5	5	9	4	5	3	8	5	3	8	3	11	3	9
9	6	8	3	3	6	2	7	4	4	3	5	7	4	6	5	2	7
9	5	8	6	1	1	7	7	4	4	9	7	4	3	1	6	6	2
4	5	4	5	5	7	8	6	8	4	10	2	7	7	5	9	6	11

Выборка B24

71	74	51	87	37	72	64	77	63	58	50	39	71	48	39
44	62	59	50	91	51	65	54	70	50	46	66	44	71	72
58	52	58	72	62	47	58	69	58	72	42	70	84	65	65
49	45	53	50	73	47	21	40	74	35	49	58	44	50	74
53	66	67	64	62	49	67	41	67	57	56	60	71	46	79
72	48	38	51	37	60	58	52	58	55	50	64	68	53	70
59	59	90	72	61	74	36	79	65	68	39	54	86	49	48

Выборка C24

№	F1		F2		
1	83	83	84	83	84
2	83	82	83	82	83
3	81	83	83	82	83
4	84	84	83	81	81
5	85	82	83	82	82

Ко всем вариантам.

Вариант 25

Выборка A25

2	0	2	6	2	3	5	3	8	3	6	4	5	2	6	6	5	5	8	8
3	5	3	2	4	5	2	1	6	9	7	6	7	4	5	6	5	6	8	3
6	5	5	1	7	6	4	1	5	6	4	7	2	8	8	2	8	2	1	6
5	2	3	6	3	3	5	3	3	7	5	6	6	3	4	6	7	4	6	2
7	7	1	2	3	6	6	3	2	6	4	2	4	8						

Выборка B25

100	51	80	83	83	67	55	84	78	83	101	75
78	99	69	99	71	67	56	74	51	78	34	67
107	66	106	70	117	67	116	79	120	47	113	113
59	100	78	31	68	66	91	85	64	55	83	77
68	83	38	89	88	58	75	60	89	111	42	104
33	96	50	42	81	78	42	64	89	60	32	46
82	33	72	93	94	49	153	68	85	78	95	51
76	81	67	50	75	99	114	111	108	127	110	91

Выборка C25

№	F1			F2			
1	57	67	55	47	60	65	47
2	60	67	55	59	45	51	59
3	51	64	61	61	56	55	56
4	67	49	62	60	41	54	32

Ко всем вариантам.

Вариант 26

Выборка A26

2	0	0	3	1	2	2	2	3	4	1	2	3	3	2	1	1	3	3	0
4	1	3	3	0	1	0	0	1	2	1	1	3	2	3	0	1	0	4	2
3	1	2	1	1	1	1	2	1	2	5	2	1	3	2	3	1	1	1	1
2	1	1	1	3	1	3	1	2	1	2	1	1	0	0	3	3	1	2	3

Выборка B26

22	49	18	44	52	31	18	20	27	35	41	28	29	45	36
40	41	37	18	40	25	38	46	37	50	41	37	37	21	37
27	27	32	34	28	40	31	20	22	25	31	34	56	35	37
47	40	29	28	29	3	27	12	41	24	40	57	49	37	34
23	38	19	29	27	32	21	21	13	40	24	37	7	24	34
52	38	32	49	43	25	16	33	22	6	41	48	35	55	35
4	31	18	19	17	23	6	36	40	12	66	26	23	30	28
49	30	50	13	33	46	26	37	30	46	41	18	28	14	50

Выборка C26

№	F1		F2		
1	169	175	177	175	176
2	170	181	172	176	172
3	171	179	174	176	184
4	174	175	171	177	177
5	176	179	170	177	180

Ко всем вариантам.

Вариант 27

Выборка А27

1	0	1	3	1	1	4	0	0	1	1	1	0	1	2	0	2	1	0	1
1	0	1	0	2	2	1	1	0	0	0	1	2	1	1	1	2	3	0	1
0	2	2	0	2	2	0	1	0	0	0	0	3	2	2	3	1	2	0	1
2	1	1	0	1	2	0	2	2	1	0	0	2	0	0	0	3	1	2	2

Выборка В27

187	193	199	197	196	184	200	193	198	191	193	188
193	195	197	199	202	193	190	197	195	182	201	202
184	197	205	178	191	200	223	188	192	188	194	183
207	183	195	184	175	195	212	197	194	184	175	198
189	194	185	213	192	200	194	173	206	163	204	174
183	199	203	185	199	196	196	188	169	196	190	205
189	189	190	175	190	193	209	190	183	191	193	191
190	192	191	185	202	173	184	176	199	182	186	189
193	185	168	192	193	205	171	193	191	206	187	193

Выборка С27

№	F1		F2		
1	178	180	176	181	176
2	174	179	173	171	177
3	172	183	172	184	176
4	175	180	173	182	179

Ко всем вариантам.

Вариант 28

Выборка A28

0	0	0	1	0	0	1	3	1	1	1	0	3	0	2
0	0	0	0	1	1	1	3	2	0	0	1	4	1	0
0	0	2	0	1	2	1	2	0	1	2	1	0	0	1
0	1	1	0	2	1	1	2	0	1	0	0	0	2	1

Выборка B28

50	39	48	56	49	44	39	42	56	46	39	50
52	48	55	46	37	51	52	45	46	51	43	49
35	57	48	42	42	54	33	44	56	44	43	41
47	42	47	59	54	53	55	34	53	50	36	53
53	55	54	39	53	42	49	45	48	50	48	56
52	46	53	56	57	42	53	50	44	46	59	62
57	36	43	46	59	52	52	64	46	46	49	53
44	49	62	50	42	53	41	44	49	49	52	62
44	53	44	50	47	48	48	51	55	64	52	48

Выборка C28

№	F1			F2		
1	161	147	176	143	160	171
2	167	154	174	151	153	159
3	153	169	170	150	165	149
4	155	144	166	156	157	163

Ко всем вариантам.

← →

Вариант 29

Выборка А29

4	1	9	6	11	11	6	5	10	4	10	10	11	10	9	6	6
4	10	2	5	6	8	6	7	2	2	6	12	2	8	8	11	9
7	4	5	9	7	9	5	9	10	5	8	6	10	8	8	6	9
8	6	1	3	10	4	8	6	10	9	10	3	6	11			

Выборка С29

№	F1			F2		
1	50	77	67	64	80	67
2	84	60	72	62	62	67
3	71	58	75	66	73	73
4	74	60	73	71	82	48
5	74	72	75	61	77	53

Выборка В29

17	25	25	25	32	32	23	24	23	26	29	34	29	26	23
21	21	19	27	17	22	31	23	23	26	37	15	12	32	23
25	45	27	38	8	19	25	15	24	23	39	21	29	22	22
24	21	24	31	22	23	31	24	26	19	17	26	25	30	18
32	32	37	28	29	18	18	24	28	18	28	18	28	25	14
18	26	27	26	20	33	24	33	33	36	22	19	25	23	23
33	25	32	24	33	17	15	26	25	21	37	24	36	28	37
19	25	21	23	27	32	12	25	23	28	18	41	21	26	35
31	21	16	27	34	16	30	20	24	16	20	33	21	31	22

Ко всем вариантам.

← →

Вариант 30

Выборка A30

6	6	5	6	11	8	7	4	4	8	3	2	3	9	7
6	9	5	8	8	7	10	8	6	9	9	10	3	10	5
7	6	8	9	9	3	8	4	11	4	6	9	2	8	7
7	7	8	4	3	6	11	10	2	3	8	6	8	2	3

Выборка B30

57	61	60	63	66	68	64	72	69	59	71	62	69	57	61
58	60	66	59	62	64	53	50	50	55	70	61	77	70	65
66	72	71	60	74	62	49	62	76	66	64	62	60	53	65
49	79	58	73	61	63	64	59	55	70	62	61	68	69	67
64	42	73	62	69	60	64	69	62	67	67	72	57	51	77
58	63	71	73	68	80	54	64	53	64	68	58	73	68	61
54	73	59	69	60	67	57	54	69	55	70	65	61	65	62
71	55	67	57	64	70	55	65	69	65	65	60	66	63	74
60	54	75	62	74	63	64	76	59	71	68	55	68	61	57
73	54	57	56	65	53	64	58	67	48	66	68	55	77	59

Выборка D30

№	F1			F2		
1	89	71	74	73	70	64
2	43	67	48	75	74	69
3	54	61	60	62	87	79
4	79	77	44	60	74	90

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444

Оглавление.

1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046

$\longleftarrow$ $\longrightarrow$

3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ ЛАПЛАСА $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)
0,00	0,0000	0,44	0,1700	0,88	0,3106	1,32	0,4066	1,76	0,4608	2,40	0,4918
0,01	0,0040	0,45	0,1736	0,89	0,3133	1,33	0,4082	1,77	0,4616	2,42	0,4922
0,02	0,0080	0,46	0,1772	0,90	0,3159	1,34	0,4099	1,78	0,4625	2,44	0,4927
0,03	0,0120	0,47	0,1808	0,91	0,3186	1,35	0,4115	1,79	0,4633	2,46	0,4931
0,04	0,0160	0,48	0,1844	0,92	0,3212	1,36	0,4131	1,80	0,4641	2,48	0,4934
0,05	0,0199	0,49	0,1879	0,93	0,3238	1,37	0,4147	1,81	0,4649	2,50	0,4938
0,06	0,0239	0,50	0,1915	0,94	0,3264	1,38	0,4162	1,82	0,4656	2,52	0,4941
0,07	0,0279	0,51	0,1950	0,95	0,3289	1,39	0,4177	1,83	0,4664	2,54	0,4945
0,08	0,0319	0,52	0,1985	0,96	0,3315	1,40	0,4192	1,84	0,4671	2,56	0,4948
0,09	0,0359	0,53	0,2019	0,97	0,3340	1,41	0,4207	1,85	0,4678	2,58	0,4951
0,10	0,0398	0,54	0,2054	0,98	0,3365	1,42	0,4222	1,86	0,4686	2,60	0,4953
0,11	0,0438	0,55	0,2088	0,99	0,3389	1,43	0,4236	1,87	0,4693	2,62	0,4956
0,12	0,0478	0,56	0,2123	1,00	0,3413	1,44	0,4251	1,88	0,4699	2,64	0,4959
0,13	0,0517	0,57	0,2157	1,01	0,3438	1,45	0,4265	1,89	0,4706	2,66	0,4961
0,14	0,0557	0,58	0,2190	1,02	0,3461	1,46	0,4279	1,90	0,4713	2,68	0,4963
0,15	0,0596	0,59	0,2224	1,03	0,3485	1,47	0,4292	1,91	0,4719	2,70	0,4965

Оглавление.

0,16	0,0636	0,60	0,2257	1,04	0,3508	1,48	0,4306	1,92	0,4726	2,72	0,4967
0,17	0,0675	0,61	0,2291	1,05	0,3531	1,49	0,4319	1,93	0,4732	2,74	0,4969
0,18	0,0714	0,62	0,2324	1,06	0,3554	1,50	0,4332	1,94	0,4738	2,76	0,4971
0,19	0,0753	0,63	0,2357	1,07	0,3577	1,51	0,4345	1,95	0,4744	2,78	0,4973
0,20	0,0793	0,64	0,2389	1,08	0,3599	1,52	0,4357	1,96	0,4750	2,80	0,4974
0,21	0,0832	0,65	0,2422	1,09	0,3621	1,53	0,4370	1,97	0,4756	2,82	0,4976
0,22	0,0871	0,66	0,2454	1,10	0,3643	1,54	0,4382	1,98	0,4761	2,84	0,4977
0,23	0,0910	0,67	0,2486	1,11	0,3665	1,55	0,4394	1,99	0,4767	2,86	0,4979
0,24	0,0948	0,68	0,2517	1,12	0,3686	1,56	0,4406	2,00	0,4772	2,88	0,4980
0,25	0,0987	0,69	0,2549	1,13	0,3708	1,57	0,4418	2,02	0,4783	2,90	0,4981
0,26	0,1026	0,70	0,2580	1,14	0,3729	1,58	0,4429	2,04	0,4793	2,92	0,4982
0,27	0,1064	0,71	0,2611	1,15	0,3749	1,59	0,4441	2,06	0,4803	2,94	0,4984
0,28	0,1103	0,72	0,2642	1,16	0,3770	1,60	0,4452	2,08	0,4812	2,96	0,4985
0,29	0,1141	0,73	0,2673	1,17	0,3790	1,61	0,4463	2,10	0,4821	2,98	0,4986
0,30	0,1179	0,74	0,2703	1,18	0,3810	1,62	0,4474	2,12	0,4830	3,00	0,49865

0,30	0,1179	0,74	0,2703	1,18	0,3810	1,62	0,4474	2,12	0,4830	3,00	0,49865
0,31	0,1217	0,75	0,2734	1,19	0,3830	1,63	0,4484	2,14	0,4838	3,20	0,49931
0,32	0,1255	0,76	0,2764	1,20	0,3849	1,64	0,4495	2,16	0,4846	3,40	0,49966
0,33	0,1293	0,77	0,2794	1,21	0,3869	1,65	0,4505	2,18	0,4854	3,60	0,499841
0,34	0,1331	0,78	0,2823	1,22	0,3883	1,66	0,4515	2,20	0,4861	3,80	0,499928
0,35	0,1368	0,79	0,2852	1,23	0,3907	1,67	0,4525	2,22	0,4868	4,00	0,499968
0,36	0,1406	0,80	0,2881	1,24	0,3925	1,68	0,4535	2,24	0,4875	4,50	0,499997
0,37	0,1443	0,81	0,2910	1,25	0,3944	1,69	0,4545	2,26	0,4881	5,00	0,499997
0,38	0,1480	0,82	0,2939	1,26	0,3962	1,70	0,4554	2,28	0,4887		
0,39	0,1517	0,83	0,2967	1,27	0,3980	1,71	0,4564	2,30	0,4893		
0,40	0,1554	0,84	0,2995	1,28	0,3997	1,72	0,4573	2,32	0,4898		
0,41	0,1591	0,85	0,3023	1,29	0,4015	1,73	0,4582	2,34	0,4904		
0,42	0,1628	0,86	0,3051	1,30	0,4032	1,74	0,4591	2,36	0,4909		
0,43	0,1664	0,87	0,3078	1,31	0,4049	1,75	0,4599	2,38	0,4913		

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУАССОНА $P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

k	$\lambda = 0,1$	$\lambda = 0,2$	$\lambda = 0,3$	$\lambda = 0,4$	$\lambda = 0,5$	$\lambda = 0,6$	$\lambda = 0,7$	$\lambda = 0,8$	$\lambda = 0,9$	
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	
1	0,0905	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659	
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647	
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494	
4		0,0001	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111	
5				0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020	
6							0,0001	0,0002	0,0003	
k	$\lambda = 1$	$\lambda = 2$	$\lambda = 3$	$\lambda = 4$	$\lambda = 5$	$\lambda = 6$	$\lambda = 7$	$\lambda = 8$	$\lambda = 9$	$\lambda = 10$
0	0,3679	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0000
1	0,3679	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011	0,0005
2	0,1839	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050	0,0023
3	0,0613	0,1804	0,2240	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150	0,0076
4	0,0153	0,0902	0,1680	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0572	0,0337	0,0189
5	0,0031	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607	0,0378

Оглавление.

5	0,0031	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607	0,0378
6	0,0005	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911	0,0631
7	0,0001	0,0034	0,0216	0,0595	0,1044	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171	0,0901
8		0,0009	0,0081	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318	0,1126
9		0,0002	0,0027	0,0132	0,0363	0,0688	0,1014	0,1241	0,1318	0,1251
10			0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186	0,1251
11			0,0002	0,0019	0,0082	0,0213	0,0452	0,0722	0,0970	0,1137
12			0,0001	0,0006	0,0034	0,0126	0,0263	0,0481	0,0728	0,0948
13				0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504	0,0729
14				0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324	0,0521
15					0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194	0,0347
16						0,0003	0,0014	0,0045	0,0109	0,0217
17						0,0001	0,0006	0,0021	0,0058	0,0128
18							0,0002	0,0009	0,0029	0,0071
19							0,0001	0,0004	0,0014	0,0037
20								0,0002	0,0006	0,0019
21								0,0001	0,0003	0,0009
22									0,0001	0,0004
23										0,0002
24										0,0001

Оглавление.

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

t - распределение(распределение Стьюдента)

$$P(t > t_\alpha) = \alpha \quad \text{и} \quad P(|t| > t_\alpha) = \alpha$$

Число степеней свободы k	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32

Оглавление.

13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72

$\longleftarrow$ $\longrightarrow$

26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
	Уровень значимости (односторонняя критическая область)					

Оглавление.

ПРИЛОЖЕНИЕ 6

χ^2 - распределение (распределение Пирсона) $P(\chi^2 > x_\alpha) = \alpha$

Число степеней свободы k	Уровень значимости α							
	0,01	0,025	0,05	0,1	0,9	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	2,706	0,0158	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	4,605	0,211	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	6,251	0,584	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	7,779	1,064	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	9,236	1,610	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	10,645	2,204	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	12,017	2,833	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	13,362	3,490	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	14,684	4,168	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	15,987	4,865	3,94	3,25	2,56

Оглавление.

11	24,7	21,9	19,7	17,275	5,578	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	18,549	6,304	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	19,812	7,042	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	21,064	7,790	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	22,307	8,547	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	23,542	9,312	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	24,769	10,085	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	25,989	10,865	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	27,204	11,615	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	28,412	12,443	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	29,615	13,240	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	30,813	14,041	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	32,007	14,848	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	33,196	15,659	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	34,382	16,473	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	35,563	17,292	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	36,741	18,114	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	37,916	18,939	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	39,087	19,768	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	40,256	20,599	18,5	16,8	15,0

ПРИЛОЖЕНИЕ 7

F -распределение (распределение Фишера)

$$P(F > f_{\alpha}) = \alpha$$

Уровень значимости $\alpha = 0,01$												
k_1 / k_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4052	4999	5403	5625	5764	5889	5928	5981	6022	6056	6082	6106
2	98,49	99,01	90,17	99,25	99,33	99,30	99,34	99,36	99,36	99,40	99,41	99,42
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13	27,05
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,54	14,45	14,37
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,45	10,27	10,15	10,05	9,96	9,89
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	7,00	6,84	6,71	6,62	6,54	6,47
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,19	6,03	5,91	5,82	5,74	5,67
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,62	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,21	5,06	4,95	4,85	4,78	4,71

11	9,86	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,88	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,65	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,61	3,55
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,45

Уровень значимости $\alpha = 0,05$												
k_1 / k_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,40	19,41
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,76	8,74
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93	5,91
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70	4,68
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,60	3,57

8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31	3,28
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,10	3,07
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,94	2,91
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,82	2,79
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,72	2,69
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,63	2,60
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,56	2,53
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59	2,55	2,51	2,48
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,45	2,42
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,50	2,45	2,41	2,38

Оглавление.