



ЗДРАВСТВУЙТЕ !

Лекция 5. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

- 5.1. Основная задача механики.
- 5.2. Замкнутая система тел.
- 5.3. Закон сохранения импульса.
- 5.4. Центр инерции и законы его движения.

5.1. Основная задача механики

Основная задача механики:

определить закон движения материальной точки, если известны действующие на нее силы.

Для ее решения в начале с помощью основного закона динамики (II закон Ньютона) находим ускорение, с которым движется материальная точка. Затем с помощью известных формул кинематики ищем выражения для скоростей и координат.

5.2. ЗАМКНУТАЯ СИСТЕМА ТЕЛ


Не все окружающие тела действуют на данное тело с одинаковыми силами. Так, если спутник Земли движется вокруг Земли по орбите с радиусом $r \approx 8000$ км, то Солнце действует на него с силой, которая значительно меньше притяжения Земли:

$$\frac{F_3}{F_C} = \frac{\gamma \cdot m \cdot M_3 \cdot R^2}{r^2 \cdot \gamma \cdot M_C \cdot m} = \frac{M_3 \cdot R^2}{M_C \cdot r^2} \approx 10^3$$

где $R = 1,49598 \cdot 10^{11}$ м, $M_3 = 6 \cdot 10^{24}$ кг, $M_C = 2 \cdot 10^{30}$ кг.

Этот расчет показывает, что мы можем в первом приближении отвлечься от действия на спутник всех сил, кроме силы тяготения Земли. Следовательно, можно рассмотреть систему, состоящую из двух тел – спутника и Земли, и считать, что их взаимодействие в основном определяет характер движения спутника. Все остальные тела можно считать **внешними** по отношению к этой системе и действие этих тел учесть в виде поправок к основной силе.

Принято силы, с которыми взаимодействуют между собой составные части системы, называть **внутренними силами**.



Внешними, называются силы, с которыми вся система или отдельные тела, входящие в ее состав, взаимодействуют с окружающими телами.

Система тел называется замкнутой (или изолированной), если можно пренебречь действием внешних сил по сравнению с внутренними.

Так, в рассмотренном примере систему тел Земля-спутник можно в первом приближении рассматривать как замкнутую.

С еще большей степенью можно считать замкнутой солнечную систему. Действительно, силы взаимодействия между Солнцем и планетами значительно превосходят силы, с которыми на эти планеты действуют даже самые близкие звезды.

Ближайшая к Солнечной системе звезда расположена на колоссальном расстоянии $R_{зв} = 4,5$ св. года $= 4,2 \cdot 10^{13}$ км; расстояние же от Земли до Солнца $r = 1,5 \cdot 10^8$ км. Полагая, что масса звезды примерно равна массе Солнца, получим:

$$\frac{F_C}{F_{зв}} = \frac{\gamma \cdot m \cdot M \cdot R^2}{r^2 \cdot \gamma \cdot m \cdot M} = \frac{R^2}{r^2} = \left(\frac{4,2 \cdot 10^{13}}{1,5 \cdot 10^8} \right)^2 \approx 8 \cdot 10^{10}$$

Понятие замкнутой системы является весьма полезной абстракцией, ибо в таких системах все явления описываются с помощью наиболее простых и общих законов.

Поэтому всюду, где это возможно, следует отвлечься от действия внешних сил и рассматривать изучаемую систему тел как замкнутую.

Затем, если это необходимо, следует в решение, полученное в первом приближении, внести поправки, учитывающие характер возмущений, вносимых действием внешних сил.

5.3. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

Закон сохранения импульса: Суммарный импульс замкнутой системы тел сохраняется при любых процессах, происходящих в этой системе.

Не следует думать, что этот закон требует неизменности импульса каждого тела, входящего в систему. Как раз, наоборот, – благодаря действию внутренних сил импульсы тел, входящих в систему, все время меняются.

Сохраняется лишь векторная сумма импульсов всех составных частей системы.

Пусть в момент времени t' первое тело имеет массу m'_1 и скорость \vec{v}'_1 , а второе – массу m'_2 и скорость \vec{v}'_2 ; в момент времени t'' – соответственно m''_1 и \vec{v}''_1 , m''_2 и \vec{v}''_2

II закон Ньютона:
для 1-ого тела

$$\vec{F}_{12} = \frac{m''_1 \cdot \vec{v}''_1 - m'_1 \cdot \vec{v}'_1}{t'' - t'}$$

для 2-ого тела

$$\vec{F}_{21} = \frac{m''_2 \cdot \vec{v}''_2 - m'_2 \cdot \vec{v}'_2}{t'' - t'}$$

III закон Ньютона $F_{12} = -F_{21}$

$$\frac{m''_2 \cdot \vec{v}''_2 - m'_2 \cdot \vec{v}'_2}{t'' - t'} = - \frac{m''_1 \cdot \vec{v}''_1 - m'_1 \cdot \vec{v}'_1}{t'' - t'}$$

$$m_2'' \cdot \vec{v}_2'' + m_1'' \cdot \vec{v}_1'' = m_2' \cdot \vec{v}_2' + m_1' \cdot \vec{v}_1' \quad (5.1)$$

Или
$$m_2 v_2 + m_1 v_1 = \text{const} \quad (5.2)$$

$$m_N v_N + \dots + m_1 v_1 = \text{const} \quad (5.3)$$

При выводе закона сохранения импульса мы пользовались только законами Ньютона, причем в форме, которая справедлива как в релятивистской механике, так и в ньютоновской механике. Следовательно, закон сохранения импульса применим как в ньютоновской, так и в релятивистской механике, но в последней следует учитывать зависимость массы от скорости.

Сумма в левой части (5.3) представляет собой суммарный импульс системы, следовательно:

$$\sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{v}_i = \vec{P} = \text{const} \quad \text{и тогда} \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = \mathbf{0}$$



Это и есть **закон сохранения импульса** в дифференциальной форме:

Векторная сумма количества движения или полный импульс замкнутой системы остается постоянным при любых взаимодействиях между телами этой системы.

Этот закон является фундаментальным и выполняется при любых движениях, в том числе и релятивистских.

Из закона сохранения импульса вытекают два важных следствия: **закон движения центра инерции и закон аддитивности массы.**

5.4. ЦЕНТР ИНЕРЦИИ И ЗАКОНЫ ЕГО ДВИЖЕНИЯ

Пусть две материальные точки (частицы) с массами m_1 и m_2 расположены на оси абсцисс в точках с координатами X_1 и X_2 . Расстояние между этими точками $L = X_2 - X_1$ (рис. 5.1). Точку C , которая делит расстояние между частицами на отрезки, обратно пропорциональные массам этих частиц, назовем **центром инерции (или центром масс)** данной системы частиц.

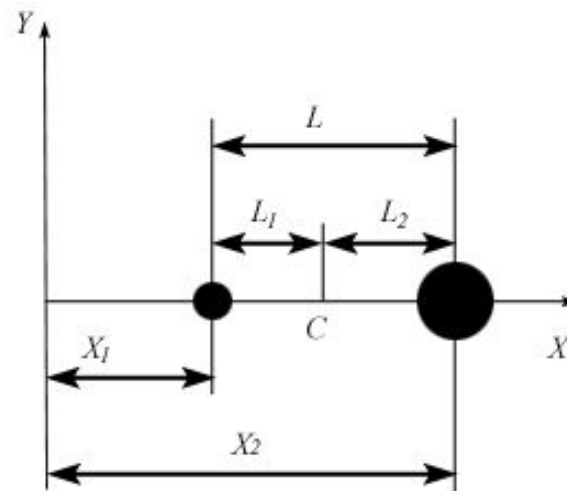


Рис. 5.1.

Итак, по определению

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{m_2}{m_1}. \quad (5.4)$$

Поскольку $L_1 = X_{\text{ц}} - X_1$, $L_2 = X_2 - X_{\text{ц}}$, где $X_{\text{ц}}$ - координата центра инерции, то,

$$m_1 \cdot (x_{\text{ц}} - x_1) = m_2 (x_2 - x_{\text{ц}}) \quad (5.5)$$

откуда

$$X_{\text{ц}} = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2}{m_1 + m_2}$$

Для N-материальных точек, расположенных произвольным образом, абсцисса центра инерции:

$$X_{\text{ц}} = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + \dots + m_n \cdot x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \quad (5.6)$$

Аналогичные выражения получаются для ординаты Y_c и аппликаты Z_c центра инерции системы материальных точек. Определив абсциссу, ординату и аппликату, мы тем самым определим радиус-вектор центра инерции.

$$\mathbf{R} = \left(\sum_{i=1}^n m_i \cdot \mathbf{r}_i \right) / \sum_{i=1}^n m_i \quad (5.7)$$

где \mathbf{r}_i и m_i — радиус-вектор и масса тел (частиц), входящих в систему.

Центром инерции (центром масс)

системы частиц с радиус-векторами

$\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$

называют точку с радиус-вектором

$$\mathbf{R} = \left(\sum_{i=1}^n m_i \cdot \mathbf{v}_i \right) / \sum_{i=1}^n m_i$$

Тогда движение центра инерции для системы частиц (в том числе для тела любой формы конечных размеров) можно описать следующим образом

$$\begin{aligned} \overset{\boxtimes}{\mathbf{v}}_u &= d\overset{\boxtimes}{\mathbf{R}} / dt = d\left(\sum_{i=1}^n m_i \cdot \overset{\boxtimes}{\mathbf{r}}_i / \sum_{i=1}^n m_i\right) / dt = \sum m_i (d\overset{\boxtimes}{\mathbf{r}}_i / dt) / \sum m_i = \\ &= \sum m_i \cdot \overset{\boxtimes}{\mathbf{v}}_i / \sum m_i = \sum \overset{\boxtimes}{\mathbf{P}}_i / \sum m_i = \frac{\overset{\boxtimes}{\mathbf{P}}}{M}. \end{aligned}$$

$$\overset{\boxtimes}{\mathbf{P}} = M \overset{\boxtimes}{\mathbf{v}}_u \quad (5.7,a)$$

где M – суммарная масса системы,

$\overset{\boxtimes}{\mathbf{P}}$ – суммарный импульс.

Если сумма внешних сил не равна нулю, то движение центра инерции можно рассматривать как движение материи, в которой сосредоточена вся масса системы и координаты совпадают с центром масс. Уравнением ее движения является

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = M \left(\frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} \right) = \sum \mathbf{F}_{\text{внешн}} = \mathbf{F}$$

Коэффициент пропорциональности (M) в (5.7,а) между импульсом системы и скоростью центра инерции равен сумме масс составляющих частиц. **В этом выражается закон аддитивности масс.**

Аддитивностью, вообще, называют свойство, состоящее в том, что величина, характеризующая систему в целом, складывается алгебраически из величин того же рода, характеризующих каждую часть системы.

Задачу о характере движения центра инерции, решаем для случая, когда тела движутся со скоростями, много меньшими скорости света, когда массы являются постоянными величинами.

Записав выражение (5.6) для двух моментов времени и вычитая одно из другого, получим

$$\Delta X_{ц} = \frac{m_1 \cdot \Delta x_1 + m_2 \cdot \Delta x_2 \dots + m_n \cdot \Delta x_n}{m_1 + m_2 \dots + m_n} \quad (5.8)$$

Разделив обе части равенства (5.8) на $\Delta t = t_2 - t_1$ и положив

$\frac{\Delta X_{ц}}{\Delta t} = v_{ц}^{(x)}$ (компонента вектора скорости по оси абсцисс),
имеем

$$v_{ц}^{(x)} = \frac{m_1 \cdot v_1^{(x)} + m_2 \cdot v_2^{(x)} + \dots + m_n \cdot v_n^{(x)}}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \quad (5.9)$$

$$\vec{v}_c = \frac{m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + m_n \cdot \vec{v}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\vec{P}}{M} \quad (5.10)$$

где M – суммарная масса системы, \vec{P} – ее суммарный импульс. Поскольку в теории относительности масса тела зависит от скорости, то из формулы (5.6) не вытекает формула (5.9). В связи с этим в теории относительности выражения (5.9) и (5.10) не выводятся, а используются в качестве определяющих уравнений: **центром инерции системы называется точка, скорость которой равна отношению суммарного импульса системы к ее суммарной массе.** Что же касается формулы (5.6), то ею в теории относительности не пользуются.

Следовательно, если система частиц замкнута, то ее суммарный импульс является постоянной величиной.

Иными словами, *центр инерции замкнутой системы совершает инерциальное движение, т.е. движется прямолинейно и равномерно независимо от того, как движутся отдельные тела, из которых составлена система.*

Следует обратить внимание на смысл этого утверждения. В замкнутой системе тел действуют внутренние силы, вследствие чего тела, входящие в состав системы, могут двигаться ускоренно и их скорости (и импульсы) могут непрерывно меняться. Однако это не сказывается на движении центра инерции. Итак, *под действием внутренних сил скорость движения центра инерции не меняется.*



Лекция окончена!





